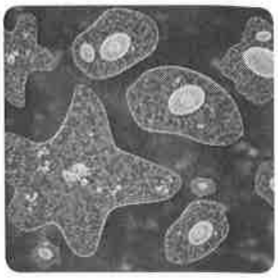
1 지수함수

- 지수함수의 뜻을 안다.
- 지수함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

지수함수란 무엇일까

생각 톡

아메바는 한 번 분열할 때마다 개체 수가 2배가 된다고 한다. 다음은 아메바 한 마리가 x번 분열한 후의 개체 수 y를 나타낸 표의 일부이다.



x	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	2					$\cdots$

탐구 ① 위의 표를 완성해 보자.

탐구 ② x와 y 사이의 관계식을 구해 보자.

위의 **생각 톡**에서 x와 y 사이에는 $y=2^x$인 관계가 성립하고 x에 대하여 2^x의 값은 하나로 정해지므로 $y=2^x$은 x에 대한 함수이다.

일반적으로 a가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x에 대하여 a^x의 값은 하나로 정해진다.

따라서 x에 a^x의 값을 대응시키면

$$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

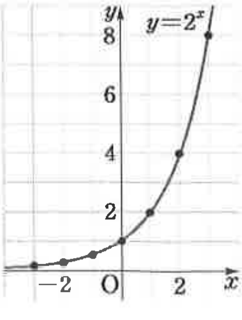
은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

$y=a^x$에서 $a=1$이면 $y=1$이므로 이 함수는 상수함수이다.

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 그려 보자.

지수함수 $y=2^x$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$



위의 표로부터 얻은 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고 이 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같은 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 얻는다. 이때 함수 $y=2^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. 또 이 함수는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

한편 x의 값이 한없이 작아지면 y의 값은 양수이면서 0에 한없이 가까워지므로 이 그래프의 점근선은 x축이다.

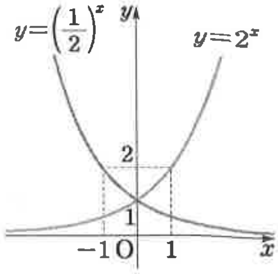
곡선 위의 점이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

예제 1 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그리시오.

$y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

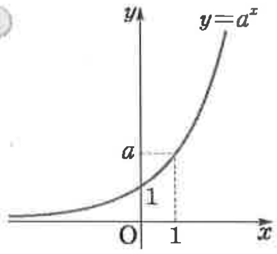
문제 1 다음 지수함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

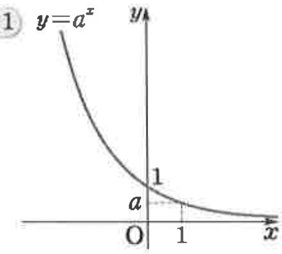
지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

$a>0,\ a\neq1$일 때, $a^0=1,\ a^1=a$

$a>1$



$0<a<1$



이상에서 지수함수는 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

지수함수 $y=a^x$의 성질

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대하여

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

❷ $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

❸ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축이다.

지수함수 $y=a^x$에서
(ⅰ) $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
(ⅱ) $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

참고 $a>0,\ a\neq1$일 때, 함수 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

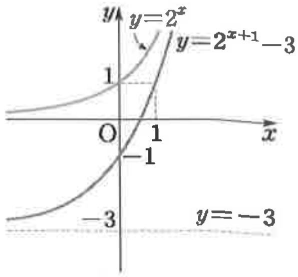
예제 2 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

풀이 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 풀이 참조



문제 2 다음 함수의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}-2$ (2) $y=-2^x$

문제 3 정의역이 $\{x\mid -1\le x\le 2\}$일 때, 함수 $y=3^{x-1}+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

예제 3 두 수 $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{8}$의 대소를 비교하시오.

풀이 $\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{8}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$

함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $\dfrac{2}{3}>\dfrac{3}{5}$이므로 $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

답 $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

문제 4 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{49}$ (2) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^3$, $\left(\dfrac{1}{9}\right)^5$