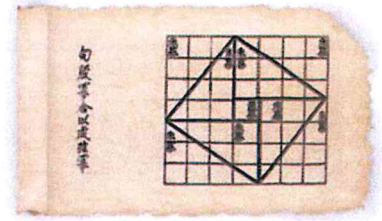
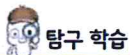


피타고라스 정리

피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.



신라의 천문학 교재로 쓰인 중국의 책 "주비산경"에는 직각삼각형의 두 변의 길이가 3, 4일 때, 나머지 한 변의 길이는 5가 된다고 쓰여 있다.

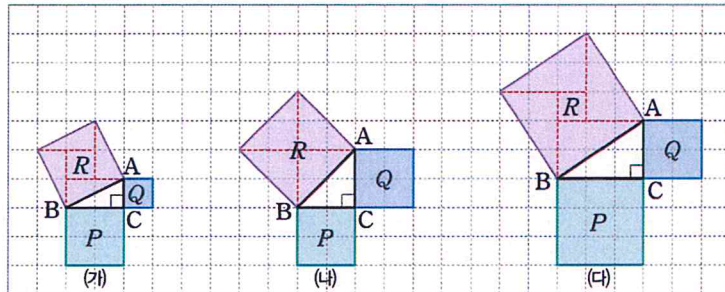


탐구 학습

❖ 피타고라스 정리는 무엇인가요?

열기

다음 그림은 한 칸의 크기가 1인 모눈종이 위에 세 직각삼각형 ABC와 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형 P, Q, R를 그린 것이다. 그림 (가), (나), (다)에서 정사각형 P, Q, R의 넓이를 구하고, 이들 사이에 어떤 관계가 있는지 설명하여 보자.



다지기

그림 (가), (나), (다)에서 정사각형 P, Q, R의 넓이를 구하면 다음과 같다.

	P의 넓이	Q의 넓이	R의 넓이
(가)	4	1	
(나)	4	4	
(다)	9	4	

(가)에서 $4 + 1 = \square$, (나)에서 $4 + 4 = \square$, (다)에서 $9 + 4 = \square$ 이므로

$$(P \text{의 넓이}) + (Q \text{의 넓이}) = (R \text{의 넓이})$$

인 관계가 성립한다.

키우기

직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

피타고라스 정리

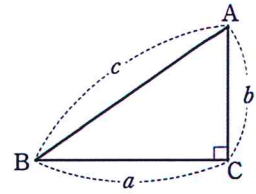
탐구 학습에서 정사각형 P와 Q의 넓이는 각각 \overline{BC}^2 , \overline{AC}^2 이고, 정사각형 R의 넓이는 \overline{AB}^2 이므로 다음을 알 수 있다.

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$

$\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$,
 $\overline{AB}=c$ 라고 할 때 도형의 닮음을 이용하여

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립하는지 설명하여 보자.



생각
열기

△ABC와 닮음인 직각삼각형이 나타나도록 보조선을 그어 변의 길이 사이의 관계를 구하면 돼.



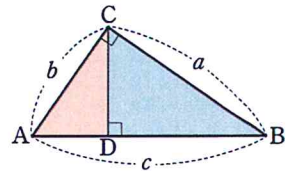
닮음인 직각삼각형을 만들기 위해 점 C에서 \overline{AB} 에 수선의 발을 내리면 돼.



설명
하기

1 단계 | 점 C에서 빗변에 수선의 발 내리기

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



2 단계 | 닮은 두 삼각형에서 변의 길이 사이의 관계 구하기

△ABC와 △CBD에서

$\angle B$ 는 공통인 각, $\angle ACB = \angle CDB = 90^\circ$

이므로 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$

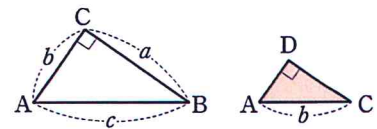
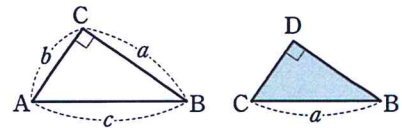
따라서 $c : a = a : \overline{DB}$ 이므로

$$a^2 = c \times \overline{DB} \quad \dots\dots ①$$

마찬가지로 △ABC와 △ACD에서

$c : b = b : \overline{AD}$ 이므로

$$b^2 = c \times \overline{AD} \quad \dots\dots ②$$



3 단계 | $a^2+b^2=c^2$ 임을 보이기

①, ②를 변끼리 더하면

$$a^2+b^2=c \times \overline{DB} + c \times \overline{AD} = c \times (\overline{DB} + \overline{AD})$$

이때 $\overline{DB} + \overline{AD} = c$ 이므로 $a^2+b^2=c^2$

⊗ 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때 두 삼각형은 서로 닮음이다.

일반적으로 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 알 수 있다. 이와 같은 성질을 **피타고라스 정리**라고 한다.

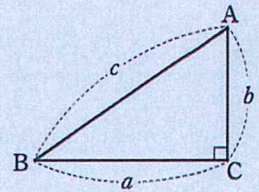
이상을 정리하면 다음과 같다.

❖ 피타고라스 정리는 고대 그리스의 수학자인 피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)의 이름에서 유래하였다.

피타고라스 정리

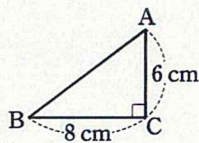
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a , b 라 하고, 빗변의 길이를 c 라고 하면

$$a^2 + b^2 = c^2$$



예제 1

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm일 때, \overline{AB} 의 길이를 구하시오.



풀이 피타고라스 정리에 따라

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 \\ &= 100 = 10^2\end{aligned}$$

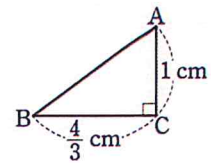
그런데 $\overline{AB} > 0$ 이므로 $\overline{AB} = 10$ cm

답 10 cm

따라 하기

| 피타고라스 정리 이해하기

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 1$ cm, $\overline{BC} = \frac{4}{3}$ cm일 때, \overline{AB} 의 길이를 구하시오.



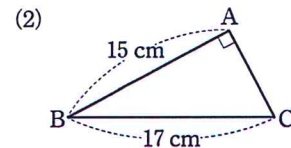
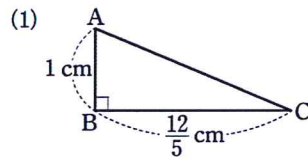
풀이 피타고라스 정리에 따라

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}}\end{aligned}$$

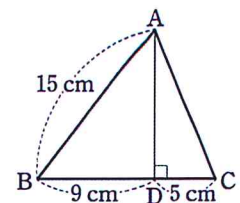
그런데 $\overline{AB} > 0$ 이므로 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

답

문제 1 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 \overline{AC} 의 길이를 구하시오.



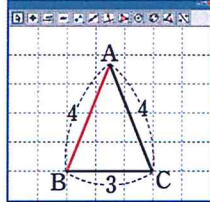
문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 점 D라고 하자. $\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm, $\overline{DC} = 5$ cm일 때, \overline{AD} , \overline{AC} 의 길이를 구하시오.



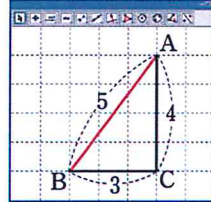
직각삼각형이 되는 조건은 무엇인가요?

직각삼각형이
되는 조건

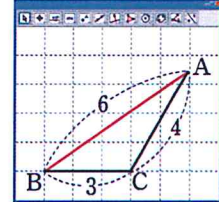
컴퓨터 프로그램을 이용하여 $\triangle ABC$ 의 세 변의 길이 a, b, c 중 한 변의 길이를 바꾸면서 이들 사이에 어떤 관계가 있을 때, 이 삼각형이 직각삼각형이 되는지 알아보자.



$$3^2 + 4^2 > 4^2$$



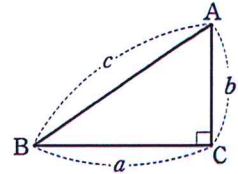
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$3^2 + 4^2 < 6^2$$

위의 그림에서 $3^2 + 4^2 = 5^2$ 인 두 번째 삼각형이 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형임을 알 수 있다.

일반적으로 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형 ABC에서 $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형임이 알려져 있다.



개념 확인

삼각형의 세 변의 길이가 주어졌을 때, 직각삼각형인지 판단하기

$6^2 + 8^2 = 10^2$ 이므로
직각삼각형이야!

6 cm, 8 cm, 10 cm

4 cm, 5 cm, 6 cm

$4^2 + 5^2 \neq 6^2$ 이므로
직각삼각형이 아니야!

문제 3 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 모두 찾으시오.

(1) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(2) 5 cm, 12 cm, 13 cm

(3) 9 cm, 12 cm, 15 cm

(4) 8 cm, 8 cm, 11 cm

문제 해결



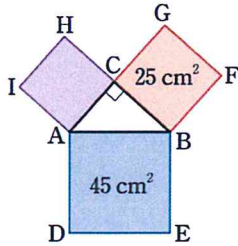
3, 4, 5와 같이 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 세 자연수의 쌍을 피타고라스 수라고 한다. 모둠별로 계산기를 이용하여 가장 큰 수가 17인 피타고라스 수를 찾아보자.

세 자연수 a, b, c 가 $a^2 + b^2 = c^2$ 을 만족시켜야 하니까...



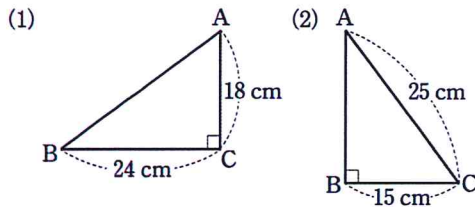
1

오른쪽 그림은 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형 3개를 그린 것이다. $\square ADEB$ 의 넓이는 45 cm^2 , $\square BFGC$ 의 넓이는 25 cm^2 일 때, $\square ACHI$ 의 넓이를 구하시오.



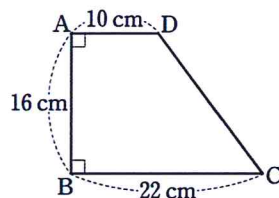
2

다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 \overline{AB} 의 길이를 구하시오.



3

오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 ABCD에서 \overline{DC} 의 길이를 구하시오.



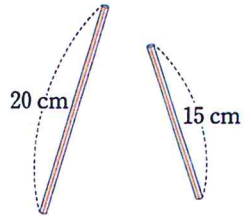
4

세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 찾으시오.

- (1) 6 cm, 10 cm, 14 cm
- (2) 7 cm, 15 cm, 20 cm
- (3) 9 cm, 40 cm, 41 cm
- (4) 12 cm, 15 cm, 25 cm

5

길이가 각각 20 cm, 15 cm인 빨대에 길이가 x cm인 빨대를 하나만 추가하여 직각삼각형을 만들려고 한다. 필요한 빨대의 길이는 몇 cm인지 구하시오. (단, $x > 20$)



6 **창의·융합**

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 지름으로 하는 세 반원을 그릴 때, 그 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라고 하자. 이때 S_1 , S_2 , S_3 사이의 관계를 말하시오.

