2022학년도 대학수학능력시험 모의평가 정답 및 해설

전국진학지도협의회

나의 원점수를 입력하면 성적처리 후 담당 선생님을 통해 표준점수와 등급을 안내해 드립니다.

• 수학 영역 •

수학 정답

1	③	2	⑤	3	④	4	⑤
5	④	6	①	7	②	8	③
9	①	10	④	11	③	12	②
13	②	14	②	15	③	16	4
17	1	18	39	19	16	20	13
21	2	22	64				

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱근을 계산할 수 있다.

$\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}=2^k=\sqrt{4^k}$ 이므로 $k=\frac{3}{5}$

2. [출제의도] 미분계수를 구할 수 있다.

$f(x)=x^3+x^2+1$ 에서 $f'(x)=3x^2+2x$ 이므로

$f'(1)=5$

3. [출제의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해한다.

y축 위의 점은 x좌표가 0이므로

$y=2^{x+m}$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{A}(0,\ 2^m)$

$y=2^{-x}$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ 1)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=|2^m-1|=15$에서 $m=4$

4. [출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있다.

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{20}{x+3}=\frac{20}{5}=4$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}\sqrt{4x+1}=\sqrt{9}=3$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{3f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{3\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)}{\lim\limits_{x\to2}f(x)-\lim\limits_{x\to2}g(x)}$

$=\frac{3\times4+3}{4-3}=15$

5. [출제의도] 삼각함수의 값을 계산할 수 있다.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$\tan\theta=-\frac{5}{12}\Leftrightarrow 12\sin\theta=-5\cos\theta$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta+\left(-\frac{5}{12}\cos\theta\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{13^2}{12^2}\cos^2\theta=1$

따라서 $\cos\theta=\pm\frac{12}{13}$, $\sin\theta=\pm\frac{5}{13}$이다.

이때, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{17}{13}$

6. [출제의도] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

점 $(1,5)$이 곡선 $y=x^2f(x)$ 위에 있으므로

$f(1)=5$

$g(x)=x^2f(x)$라 하면 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,5)$에서의 접선의 기울기가 $g'(1)=2f(1)+f'(1)=10+f'(1)$이므로 접선의 방정식은 $y=\{10+f'(1)\}(x-1)+5$

이 직선이 원점을 지나므로 $-10-f'(1)+5=0$

따라서 $f'(1)=-5$

7. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해한다.

$\int_a^x f(t)dt=x^2-2x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-2a$, $a(a-2)=0$

$a=0$ 또는 $a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

$a=0$이면 $f(a)=f(0)=-2<0$

$a=2$이면 $f(a)=f(2)=2>0$

따라서 $a=0$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해한다.

$f(x)=a\cos\frac{\pi}{3}x+b$에서 $-1\le\cos\frac{\pi}{3}x\le1$이므로

$a+b=5$

$f(1)=a\cos\frac{\pi}{3}+b=3$이므로 $\frac{1}{2}a+b=3$

따라서 $a=4, b=1$이므로 $a+2b=6$

9. [출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있다.

$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x}{x-1}=x(x+1) & (x\ne1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(a)}{h}$ 에서 분모가 0을 향해 다가가므로 분자도 0을 향해 다가간다.

즉, $\lim\limits_{h\to0}\{f(1-h)-f(a)\}$에서

$f(a)=\lim\limits_{h\to0}f(1-h)=2$

따라서 $a^2+a=2$, $(a+2)(a-1)=0$

$a\ne1$이므로 $a=-2$

$b=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-h)-2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1-h)(2-h)-2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(h-3)=-3$

$a=-2$, $b=-3$이므로 $a+b=-5$

10. [출제의도] 상용로그를 활용할 수 있다.

$\log2x^3-\log\frac{\sqrt{x}}{50}$

$=(\log2+\log x^3)-(\log\sqrt{x}-\log50)$

$=(1-\log5+3\log x)-\left(\frac{1}{2}\log x-\log5-1\right)$

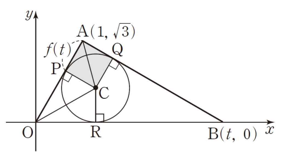
$=2+\frac{5}{2}\log x$

$\frac{1}{4}<\log x<\frac{1}{2}$이므로 $\frac{21}{8}<2+\frac{5}{2}\log x<\frac{13}{4}$이고

$2+\frac{5}{2}\log x$가 정수이어야 하므로

$2+\frac{5}{2}\log x=3$, $\log x=\frac{2}{5}$, $x=10^{\frac{2}{5}}$

11. [출제의도] 넓이를 활용하여 극한을 계산할 수 있다.



삼각형 AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(t)$라 하고, 이 원이 변 OB와 접하는 점을 R,

$\overline{\mathrm{AP}}=f(t)$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AP}}=2-f(t)$

점 A의 좌표가 $(1,\sqrt{3})$이므로 $\angle\mathrm{AOR}=60^\circ$이고 $\angle\mathrm{CPO}=\angle\mathrm{CRO}=90^\circ$인 두 직각삼각형 CPO, CRO는 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{POC}=\frac{1}{2}\times\angle\mathrm{POR}=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$

$\overline{\mathrm{PC}}=r(t)=\overline{\mathrm{OP}}\times\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}$

$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{AQC}=90^\circ$인 두 직각삼각형 APC, AQC는 서로 합동이므로 사각형 APCQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{AP}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}f(t)$

한편, 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times t\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times r(t)\times(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}})$이므로

$\sqrt{3}t=r(t)\left\{2+t+\sqrt{(t-1)^2+(-\sqrt{3})^2}\right\}$

$\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}\left(2+t+\sqrt{t^2-2t+4}\right)$

$2-f(t)=\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}$

$f(t)=2-\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}$

$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}2-\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(2-\frac{3}{1+\frac{2}{t}+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}}}\right)=2-\frac{3}{1+1}=\frac{1}{2}$

따라서

$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\frac{\sqrt{3}}{3}\lim\limits_{t\to\infty}\{2-f(t)\}f(t)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\lim\limits_{t\to\infty}\{2-f(t)\}\times\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$

12. [출제의도] 함수의 그래프를 활용할 수 있다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극대의 개수가 2, 극소의 개수가 3이려면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대를 갖고 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$이다.

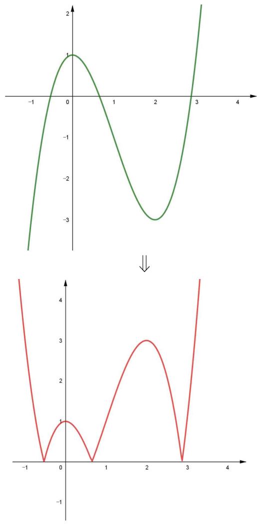
따라서 $f'(x)=3x(x-2)$이다.

조건 (나)에서 $g(2)-g(\gamma)=3$이므로

$f(2)-f(\gamma)=f(2)-0=-3$, $f(2)=-3$이다.

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+k$에 점 $(2,-3)$을 대입하면 $k=1$이다.

$f(x)=x^3-3x^2+1$이므로 $f(1)=-1$이다.



13. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있다.

(가) $(n+1)$

(나) $(n-1)!$

(다) $\frac{a_{n+1}}{n!}=\frac{a_n}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$ 에서

$\frac{a_2}{1!}=\frac{a_1}{0!}+\frac{1}{1!}$, $\frac{a_3}{2!}=\frac{a_2}{1!}+\frac{1}{2!}$, $\frac{a_4}{3!}=\frac{a_3}{2!}+\frac{1}{3!}$, ⋯,

$\frac{a_n}{(n-1)!}=\frac{a_{n-1}}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$

변변 더하면

$a_n=(n-1)!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)$이다.

따라서 (나)는 $(n-1)!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)$이므로 $f(6)=7$, $g(5)=24$,

$h(4)=3!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)=16$이다.

따라서 $f(6)+g(5)+h(4)=47$

14. [출제의도] 위치와 속도를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

시각 t에서 각각 두 점 P, Q가 만나면

$\int_0^t f(t)\,dt=\int_0^t g(t)\,dt$이다.

$\int_0^t\{f(t)-g(t)\}\,dt$

$=\int_0^t\{(t^2+at+1)-(4t^2-4t+b)\}\,dt$

$=\int_0^t\{-3t^2+(a+4)t+(1-b)\}\,dt$

$=\left[-t^3+\frac{a+4}{2}t^2+(1-b)t\right]_0^t$

$=-t^3+\frac{a+4}{2}t^2+(1-b)t=0$

이므로 $t\left\{t^2-\frac{a+4}{2}t+(b-1)\right\}=0$

시각 $t=1$, $t=5$에서 각각 두 점 P, Q가 만나므로 이차방정식 $t^2-\frac{a+4}{2}t+(b-1)=0$의 서로 다른 두 실근이 $t=1$ 또는 $t=5$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\frac{a+4}{2}$, $1\times5=b-1$

따라서 $a=8$, $b=6$이므로 $a-b=2$

15. [출제의도] 수열을 추론할 수 있다.

$4S_{n+1}=3a_{n+1}+10a_n$과 $4S_{n+2}=3a_{n+2}+10a_{n+1}$에서 $a_{n+2}=7a_{n+1}+(-10)\times a_n$

$a_{n+1}-5a_n=b_n$이라 하면,

수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

∴ $b_n=2^{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-5\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-5a_k)$

$=\sum_{k=1}^{n}b_n=2^n-1$

이므로 $2^n-1\le2022$이고 자연수 n은 $n=1,2,\cdots,10$이다.

따라서 자연수 n의 최댓값은 10

16. [출제의도] 등비수열의 항을 구할 수 있다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

이때 $a_5=ar^4, a_7=ar^6$이고, $a_5:a_7=4:1\Leftrightarrow4a_7=a_5$

이므로 $4r^2=1$, $r^2=\frac{1}{4}$

따라서

$a_6a_8=a_4r^2a_4r^4=(-16)\times\frac{1}{4}\times(-16)\times\frac{1}{16}=4$

17. [출제의도] 함수의 연속을 이해할 수 있다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이때 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2-k)=3-k$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^3+kx)=1+k$

$f(1)=1+k$이므로 $3-k=1+k$, $k=1$

18. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있다.

$b\sqrt{a}=64$ 에서 $\log_2b+\frac{1}{2}\log_2a=6$이고,

$\log_2\frac{a^4}{b^3}=4\log_2a-3\log_2b=15$이므로

$\log_2a=6$, $\log_2b=3$이다.

따라서 $5\log_2a+3\log_2b=30+9=39$

19. [출제의도] 수열을 추론할 수 있다.

수열 a_n의 첫째항을 a_1, 수열 b_n의 첫째항을 b_1라 하면

$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}$, $T_n=\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$

$S_nT_n=4n^2(n^2-1)$에서 n^4의 계수를 비교하면

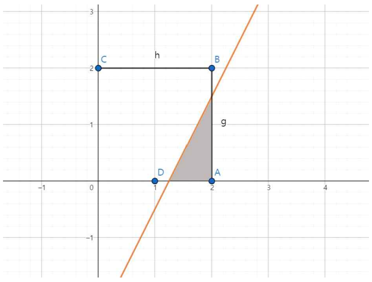
$\frac{d_1}{2}\times\frac{d_2}{2}=4$이므로 $d_1d_2=16$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

$t=-1$일 때, 정사각형 OABC가 직선 $y=2x+t$에 의하여 잘려진 두 도형의 넓이가 같아지므로

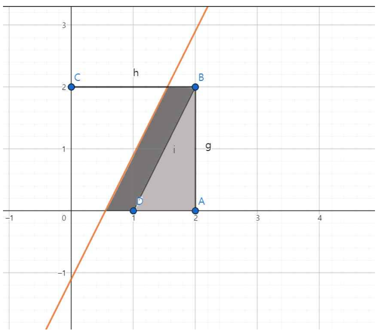
$\int_{-4}^{2}S(t)dt=2\int_{-4}^{-1}S(t)dt$

(ⅰ) $-4\le t\le-2$일 때



$S(t)=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{t}{2}\right)\times(4+t)=\frac{t^2}{4}+2t+4$

(ⅱ) $-2\le t\le-1$일 때



$S(t)=\left\{1-\left(-\frac{t}{2}\right)\right\}\times2+\frac{1}{2}\times1\times2=t+3$

$\int_{-4}^{-2}S(t)dt=\int_{-4}^{-2}\left(\frac{t^2}{4}+2t+4\right)dt+\int_{-2}^{-1}(t+3)dt$

$=\left[\frac{1}{12}t^3+t^2+4t\right]_{-4}^{-2}+\left[\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{-2}^{-1}$

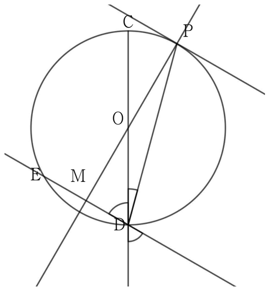
$=\left\{\left(\frac{-8}{12}+4-8\right)-\left(\frac{-64}{12}+16-16\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}-3\right)-(2-6)\right\}$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$

따라서 $3\int_{-4}^{2}S(t)dt=6\int_{-4}^{-1}S(t)dt=13$

21. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 도형의 조건을 추론할 수 있다.

삼각형 ABD에서 ∠ADB$=60°$



직선 BD가 원과 만나는 점을 E, 원의 중심을 O, 선분 DE의 중점을 M이라 하면 ∠ODM$=60°$이고 ∠MOD$=30°$이다.

한편, 삼각형 DBP의 넓이가 최대가 되려면 $\overline{BD}$의 길이가 일정하므로 삼각형의 높이가 최대가 되어야 한다. 따라서 직선 BD와 평행한 원의 접선 l의 접점을 P로 잡으면 된다.

이때, 세 점 P,O,M은 일직선 위에 있게 되므로 ∠POC$=30°$이고

∠PDC$=\theta=\frac{1}{2}\times30°=15°$이다.

따라서 $2\theta=30°, 4\theta=60°$이고 $\overline{CD}=\sqrt{3}-1$

$\therefore\overline{CD}\times\frac{\sin2\theta+\sin4\theta}{\cos4\theta}=(\sqrt{3}-1)\times\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2$

22. [출제의도] 함수의 그래프를 추론하고 이를 활용할 수 있다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이고, $g(x)=kx+c$

(단, $k>0$)라 할 수 있다.

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-(kx+c)$이므로

$h'(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-k$

이때, $h'(x)=0$, 즉

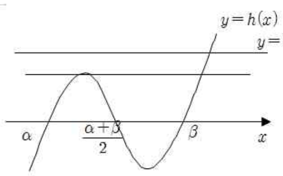
$4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

따라서 $p(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$라 하면 곡선 $y=p(x)$와 직선 $y=k$는 한 점에서 만나거나 두 점에서 만나야 한다.

$\beta=\alpha+4\sqrt{3}$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=0$으로 가정하여 함수 $y=4x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$의 극값을 구해도 함수 $p(x)$의 극값과 같다.

이때, $y'=12(x+2)(x-2)$이므로 $y'=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$다.

함수 $y=4x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$에서 극솟값은 -64, 극댓값은 64다.



따라서 k의 범위는 $k\le-64$ 또는 $k\ge64$

이때, $k>0$이므로 k의 최솟값은 64이다.

따라서 $g'(x)$의 최솟값도 64이다.

‘확률과 통계’ 정답

23	④	24	②	25	①	26	⑤
27	④	28	③	29	10	30	180

해 설

23. [출제의도] 중복순열의 수를 구할 수 있다.

$_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

24. [출제의도] 중복조합의 수를 구할 수 있다.

세 명의 학생에게 나누어주는 사탕의 수를 각각 $2x+1,\ 2y+1,\ 2z+1$ (단, x, y, z은 음이 아닌 정수)라 하면, $(2x+1)+(2y+1)+(2z+1)=15$이므로 $x+y+z=6$

그러므로 $_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$

25. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있다.

흰 공 2개를 하나로 생각하고 흰 공 1개와 파란공 3개, 검은공 4개를 일렬로 나열하는 경우로 생각하면

$\dfrac{8!}{3!\cdot 4!} = 280$

26. [출제의도] 중복조합의 수를 구할 수 있다.

(i) 사탕 4개를 A를 제외한 3명에게 나누어주는 방법의 수는 $_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(ii) A에게 구슬 1개를 먼저 나누어 주고 나머지 구슬 4개를 A를 포함한 4명에게 나누어 주는 방법의 수는 $_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$

(i), (ii)에 의하여 $15\times 35 = 525$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있다.

1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나누어 나머지가 0인 수의 집합을 A, 3으로 나누어 나머지가 1인 수의 집합을 B, 3으로 나누어 나머지가 2인 수의 집합을 C라 하자.

3개의 수의 합이 3의 배수이기 위해서는

(i) 집합 A에서 서로 다른 3개의 수를 선택: $_3C_3$

(ii) 집합 B에서 서로 다른 3개의 수를 선택: $_4C_3$

(iii) 집합 C에서 서로 다른 3개의 수를 선택: $_3C_3$

(iv) 집합 A, B, C에서 각각 1개씩 택하는 경우의 수: $_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1$

(i)~(iv)에서 3개의 수의 곱이 홀수인 경우는 (iv)의 경우 중에서 집합 A, B, C에서 각각 홀수만 선택하는 경우만 있으므로 $_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1$

$\therefore\ 1+4+1+36-4 = 38$

28. [출제의도] 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있다.

집합 A의 원소 5개 중에서 치역의 원소 3개를 택하는 경우의 수는 $_5C_3 = 10$

(i) $f(1)=f(2)$ 인 경우

선택된 치역의 원소 중 $f(1)$의 값이 되는 경우의 수는 $_3C_1$

이 각각에 대하여 $f(3), f(4), f(5)$가 대응하는 경우의 수는 3^3이다. 이때, 치역의 원소의 개수가 2인 경우의 수는 $_2C_1(2^3-1)$이고, 치역의 원소의 개수가 1인 경우의 수는 1이므로

$_5C_3 \times {}_3C_1 \times \{3^3 - {}_2C_1(2^3-1)-1\} = 360$

(ii) $f(1) < f(2)$ 인 경우

선택된 치역의 원소 중 $f(1)<f(2)$인 경우의 수는 $_3C_2$

이 각각에 대하여 $f(3), f(4), f(5)$가 대응하는 경우의 수는 3^3이다. 이때, 치역의 원소의 개수가 2인 경우의 수는 2^3이고 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 없으므로

$_5C_3 \times {}_3C_2 \times (3^3 - 2^3) = 570$

(i), (ii)에 의하여 $360+570 = 930$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

a, b, c는 1보다 큰 자연수이므로

$a=2^p,\ b=2^q,\ c=2^r$ (p, q, r은 자연수)

이라 하면

$2^p\cdot 2^q\cdot 2^r = 2^n,\ 2^{p+q+r} = 2^n \Rightarrow p+q+r=n$

$p=p'+1, q=q'+1, r=r'+1$로 놓으면

$p'+q'+r' = n-3$

즉, $p'+q'+r'=n-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r'의 순서쌍 (p', q', r')의 순서쌍의 개수가 36이므로 $_3H_{n-3} = 36$

$$_3H_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 36$$

$n^2-3n-70=0 \Rightarrow (n-10)(n+7)=0$

$\therefore\ n=10$ ($\because n$은 자연수)

30. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있다.

$4=2^2, 8=2^3$이므로 N은 2의 거듭제곱의 형태이다. N의 양의 약수의 개수가 홀수이기 위해서는, 2 또는 8을 선택하지 않거나 두 번만 선택하여야 한다.

(i) 1을 두 번만 선택하는 경우

$(1,1,4,4,4)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}$

$(1,1,2,2,4)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}$

$(1,1,2,4,8)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{2!}$

$(1,1,4,8,8)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}$

$\therefore\ 10+30+60+30 = 130$

(ii) 1을 세 번만 선택하는 경우

$(1,1,1,4,4)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}$

$(1,1,1,2,2)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}$

$(1,1,1,2,8)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{3!}$

$(1,1,1,8,8)$를 선택하여 나열하는 경우: $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}$

$\therefore\ 10+10+20+10 = 50$

(i), (ii)에 의하여 $130+50 = 180$

‘미적분’ 정답

23	⑤	24	④	25	③	26	①
27	④	28	②	29	75	30	25

해 설

23. [출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1} = 1$$

24. [출제의도] 등비수열의 극한이 수렴할 조건을 구할 수 있다.

등비수열 $\{(x-1)(x-2)^{n-1}\}$가 수렴하기 위한 조건은 $x-1=0$ 또는 $-1<x-2\le 1$이므로

$x=1$ 또는 $1<x\le 3$이다.

따라서 만족하는 정수는 $x=1,2,3$이므로 정수 x값의 합은 6이다.

25. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1}(2n+1)b_n\frac{n^2+1}{(2n+1)(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}(2n+1)b_n\times \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(2n+1)(n+1)}$$

$$= 4\times 4\times\frac{1}{2} = 8$$

26. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 활용할 수 있다.

이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 실근이 존재하므로

$D=n^2-4a_n \ge 0$ 이고,

이차방정식 $x^2-(n-1)x+a_n=0$은 실근이 존재하지 않으므로

$D=(n-1)^2-4a_n<0$이다.

따라서 $\dfrac{(n-1)^2}{4} < a_n \le \dfrac{n^2}{4}$이므로

$\dfrac{(n-1)^2}{4(2n^2+1)} < \dfrac{a_n}{2n^2+1} \le \dfrac{n^2}{4(2n^2+1)}$ 이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+1} = \frac{1}{8}$

27. [출제의도] 등비수열의 극한값을 구하고 이를 활용할 수 있다.

지수함수 $f(x)=a^{x-2}+7$의 그래프가 a값에 관계없이 항상 $(2,8)$을 지나므로

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{x^{2n}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-4^n}{x^{2n}+4^n}$$

$$= \begin{cases} -1 & |x|<2 \\ 0 & x=2, x=-2 \\ 1 & |x|>2 \end{cases}$$

방정식 $g(x)=ax$의 실근이 존재하지 않기 위해서는 두 함수 $y=g(x)$와 $y=ax$의 교점이 존재하지 않으면 충분하다.

한편, $y=g(x)$는 $x=\pm 2$에서 불연속이고 a는 양수이므로 함수 $y=ax$가 $(2,1)$을 지나면 $y=g(x)$와 $y=ax$의 교점이 존재하지 않으므로 $a=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\alpha\beta}{a} = \dfrac{2\times 8}{\dfrac{1}{2}} = 32$

28. [출제의도] 등비수열의 극한값을 구하고 이를 활용할 수 있다.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2}+ax-b}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+1}$$

$$= \begin{cases} ax-b & 0\le x<2 \\ \dfrac{2a-b+1}{2} & x=2 \\ \dfrac{x^2}{4} & x>2 \end{cases}$$

$f(1)=a-b=-2 \quad \cdots ㉠$

한편 $f(x)$는 연속함수이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}(ax-b) = \lim_{x\to 2+}\frac{x^2}{4} = \frac{2a-b+1}{2}$

따라서 $2a-b=1 \quad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡에 의해 $a=3, b=5$이므로

$$\int_{2a-b}^{b} f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)dx$$

$$= \int_1^2(3x-5)dx + \int_2^5\frac{x^2}{4}dx = \frac{37}{4}$$

29. [출제의도] 조합을 이용하여 일반항을 구하고 일반항의 극한값을 구할 수 있다.

$S_n=\{x \mid x$는 $3n$이하의 자연수$\}$의 원소 1부터 $3n$까지 자연수를 3으로 나눈 나머지 $0,1,2$가 되도록 S_n을 3개의 부분집합으로 나누어 각각 A, B, C라 하면

$A=\{1,4,7,\cdots,(3n-2)\}$

$B=\{2,5,8,\cdots,(3n-1)\}$

$C=\{3,6,9,\cdots,3n\}$

집합 S_n의 부분집합 중 원소의 개수가 3개이고, 세 원소의 합이 3의 배수가 되기 위해서는 세 원소를 세

집합 A, B, C 중 하나의 집합에서 3개의 원소를 선택하거나 세 집합 A, B, C 에서 각각 하나의 원소를 구하면 충분하다.

(ⅰ) 세 집합 A, B, C 중 하나의 집합에서 3개의 원소를 선택하는 경우

$3 \times {}_nC_3 = 3 \times \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

(ⅱ) 세 집합 A, B, C 에서 각각 하나의 원소를 선택하는 경우

${}_nC_1 \times {}_nC_1 \times {}_nC_1 = n^3$

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해

$a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} + n^3 = \dfrac{3n^3 - 3n^2 + 2n}{2}$

$\therefore\ 50\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3+n+1} = 50\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-3n^2+2n}{2n^3+2n+2} = 75$

30. [출제의도] 수열의 극한에 대한 활용 문제를 해결할 수 있다.

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = k$라 두면 삼각형의 결정조건에 의해 $n < k < 3n$을 만족하고, 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{k}{\sin A} = 2 \times R$이므로 $\sin A = \dfrac{k}{2 \times R}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \sin A = \dfrac{1}{2} \times n \times 2n \times \dfrac{k}{2 \times R}$

$= \dfrac{n^2 k}{2R}$ …①

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 두면, 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times r + \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times r + \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CA}} \times r$

$= \dfrac{1}{2} \times r \times (n+k+2n)$ …②

①=②에서 $\dfrac{n^2k}{2R} = \dfrac{r \times (3n+k)}{2}$, $R \times r = \dfrac{n^2 k}{3n+k}$

함수 $f(k) = \dfrac{n^2 k}{(3n+k)}$라 두면

$f(k) = \dfrac{n^2k}{3n+k} = \dfrac{-3n^3}{3n+k} + n^2$ 이므로

$n < k < 3n$에서 $\dfrac{1}{4}n^2 < f(k) < \dfrac{1}{2}n^2$을 만족시킨다.

따라서 $a_n = \dfrac{1}{4}n^2$, $b_n = \dfrac{1}{2}n^2$이다.

한편, 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times n \times 2n \times \sin\theta$

이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값 $c_n = n^2$이다.

(단, θ는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$가 이루는 각)

$\therefore\ 100\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n - a_n}{c_{n+1}} = 100\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}n^2}{(n+1)^2} = 25$

'기하' 정답

23	①	24	④	25	①	26	③
27	⑤	28	②	29	18	30	14

해 설

23. [출제의도] 포물선의 준선의 방정식을 구할 수 있다.

$y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$이므로 준선의 방정식은

$x = -2 = a$이다.

또한 점 $(b, 4)$를 지나므로 $4^2 = 8b$에서 $b = 2$

따라서 $ab = -4$

24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

점 $(4, a)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$위의 점이므로

$4 - \dfrac{a^2}{b^2} = 1$ …… ①

접선의 방정식은 $x - \dfrac{ay}{b^2} = 1$이다. 이 접선의 y절편이 -3이므로 $3a = b^2$ …… ②

①, ②를 연립하면 $a = 9$, $b^2 = 27$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 108$

25. [출제의도] 이차곡선의 정의를 이해하고 이를 활용할 수 있다.

점 P에서 직선 $y = -1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}} = 6$이므로 점 P의 y좌표는 5이다. 초점이 $(1, 5)$이고 준선의 방정식이 $y = -1$인 포물선의 방정식이

$(x-1)^2 = 12(y-2)$이고, 점 P가 제1사분면에 있으므로 점 P의 좌표는 $(7, 5)$이다. 점 P와 $(1, -1)$까지의 거리는 $6\sqrt{2}$이고 장축의 길이는 $6 + 6\sqrt{2}$이다.

따라서 $a + b = 12$

26. [출제의도] 포물선의 성질을 활용할 수 있다.

점 $\mathrm{F}\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$

주어진 조건에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{HF}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{HF}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = \dfrac{1}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}} = 3k$, $\overline{\mathrm{HF}} = k$ (k는 상수)로 두면

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{HF}} = 3k + k = \dfrac{4}{3}$이므로 $k = \dfrac{1}{3}$

직각삼각형 PHF에서

$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{(3k)^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\triangle\mathrm{PQF} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{PH}}$

$= \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ pq = 2 \times 3 = 6$

27. [출제의도] 타원의 정의를 이해하고 이를 활용할 수 있다.

$\overline{\mathrm{FF'}} = 8$, $\overline{\mathrm{PF}} = 6$이므로 직각삼각형 PF′F에서

$\overline{\mathrm{PF'}} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 10 + 6 = 16$이므로 $a = 16$이다.

이때 두 점 $\mathrm{F'}(-6, 1)$, $\mathrm{F}(2, 1)$에 대하여

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = a$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 C는 타원이고 이 타원의 방정식을

$\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{k^2} = 1$ $(k > 0)$으로 놓으면

$4^2 = 8^2 - k^2$을 만족하고 $k^2 = 48$

따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{48} = 1$

이 타원은 $(b, -1)$를 지나므로

$\dfrac{(b+2)^2}{64} + \dfrac{(-1-1)^2}{48} = 1$

$\dfrac{(b+2)^2}{64} + \dfrac{1}{12} = 1$, $\dfrac{(b+2)^2}{64} = \dfrac{11}{12}$

$(b+2)^2 = \dfrac{11}{3} \times 16$, $b + 2 = \pm\sqrt{\dfrac{11}{3}} \times 4$

$\therefore\ b = -2 + \dfrac{4\sqrt{33}}{3}$ $(b > 0)$

따라서 $a + b = 14 + \dfrac{4\sqrt{33}}{3}$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

타원 C의 장축의 길이는 $2 \times \sqrt{36} = 12$이다.

$\overline{\mathrm{BF}} = t$라 하면 타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{BF'}} = 12 - t$ …… ①

이때 $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AF'}} = 6$이고 삼각형 ABF가 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{FB}}$이다.

즉, $18 - t = t$ …… ②

①, ②에서 $\overline{\mathrm{BF}} = 9$, $\overline{\mathrm{BF'}} = 3$

점 B에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면, 점 H는 선분 AF의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AH}} = 3$이다.

$\cos(\angle\mathrm{BAF}) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{BAF}) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 ABF의 넓이는

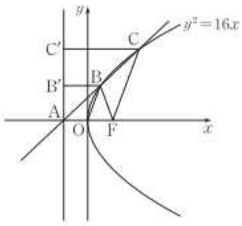
$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AF}} \times \sin(\angle\mathrm{BAF}) = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 18\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{BF'}} = \dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼각형 BFF′의 넓이는

$18\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3} = 6\sqrt{2}$

29. [출제의도] 포물선의 성질을 활용할 수 있다.

포물선 $y^2 = 16x$의 초점을 $\mathrm{F}(4, 0)$이라 하고, 두 교점 B, C에서 준선 $x = -4$에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′이라 하자.



삼각형 ACC′에서 점 B는 선분 AC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CC'}} = 2 \times \overline{\mathrm{BB'}}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{CF}} = 2 \times \overline{\mathrm{BF}}$ …… ①

삼각형 AFC에서 원점 O는 선분 AF의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CF}} = 2 \times \overline{\mathrm{BO}}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{BO}}$이므로 점 B의 x좌표는 2이고 이를 포물선의 방정식에 대입하면 y좌표는

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ a = 2$, $b = 4\sqrt{2}$

점 A와 B를 지나는 직선의 방정식은

$y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}(x+2)$이고 포물선 $y^2 = 16x$과의 교점을 구하기 위해 연립하여 풀면 점 C의 x좌표는 8, y좌표는 $8\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ c = 8$, $d = 8\sqrt{2}$

따라서 $a + 2b + 2c - d = 2 + 8\sqrt{2} + 16 - 8\sqrt{2} = 18$

30. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하고 활용할 수 있다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$의 초점 F의 x좌표는

$c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

점근선의 방정식은 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 또는 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H의 x좌표를 k $(k > 0)$이라 하면 직각삼각형 QF′H에서

$\overline{\mathrm{F'H}} = \overline{\mathrm{F'O}} + \overline{\mathrm{OH}} = 2 + k$ …… ①

$\overline{\mathrm{HQ}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}k$ …… ②

한편, $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{QF'}} = 2\sqrt{3}$ …… ③

따라서 ①, ②, ③과 $\overline{\mathrm{QF'}}^2 = \overline{\mathrm{F'H}}^2 + \overline{\mathrm{HQ}}^2$에서

$(2\sqrt{3})^2 = (k+2)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}k\right)^2$, $k^2 + 3k - 6 = 0$

이때 $k > 0$이므로 $k = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2} = -\sqrt{3} + \sqrt{11}$

따라서 $p = 3$, $q = 11$이므로 $p + q = 14$