단원 학습 정리 3. 수학적 귀납법

2. 수학적 귀납법

교과서 p.157 ~ 159

(1) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

❶ $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

㉮ 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해 보자.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots①$$

❶ $n=1$일 때, (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이므로

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.