

4. 함수의 연속

출
제
자

최 주 연
조 시 현
김 아 영

학 번

이 름

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+a}-1}{x+2} & (x \neq -2) \\ b & (x = -2) \end{cases}$ 가 $x = -2$ 에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+a}-1}{x+2} = b$$

$\frac{0}{0}$ 꼴 이므로 $\sqrt{-2+a}-1=0 \rightarrow$ 유리화후 계산하면
 $a=3, b=\frac{1}{2}$

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x+2} & (x \neq -2) \\ a & (x = -2) \end{cases}$ 가 $x = -2$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+3)}{x+2} = a$$

$$a=3$$

3. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-3} & (x \neq 3) \\ 5 & (x = 3) \end{cases}$ 가 $x = 3$ 에서 연속일 때, $f(1)$ 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 5$$

$\rightarrow \frac{0}{0}$ 꼴 이므로 $9+3a+b=0$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-\frac{b}{3})}{x-3} = 3 - \frac{b}{3} = 5 \rightarrow b = -6, a = -1$$

4. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3-x & (x \neq 2) \\ 4 & (x = 2) \end{cases}, g(x) = ax+1$ 에 대하여 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

\rightarrow $x=2$ 에서 보아야 함 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$

$$6 \cdot (2a+1) = 4(2a+1)$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

5. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b 의 값을 구하시오.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > 1, x < -1 \\ \frac{x+ax+b}{2}, & x = 1, -1 \\ ax+b, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1+a+b}{2} = a+b$$

$$x=-1 \Rightarrow \frac{-1-a+b}{2} = -a+b$$

$$\therefore a=1, b=0$$

6. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}+ax+b}{x^n+1}$ 가 $x = 1$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b 의 값을 구하시오.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 1, x < -1 \\ \frac{a+3}{2}, & x = 1, -1 \\ ax+2, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{a+3}{2} = a+2$$

$$\therefore a = -1$$

7. 방정식 $2x^3-x^2-x-1=0$ 이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간은?

① $(-1, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \ominus & \ominus \end{matrix}$$

$$\downarrow \\ \oplus$$

(사이값 정리.)

연속함수이므로

$$f(a)f(b) < 0 \rightarrow$$

8. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3-2x^2 & (x \neq 2) \\ ax-6 & (x = 2) \end{cases}$ 가 $x = 2$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$8-8 = 2a-6$$

$$a = 3$$

9. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$ 이 구간 $[-8, \infty)$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = a = \frac{1}{6}$$

$x=1$ 에서 연속
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

10. 이차함수 $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ 에 대하여 함수 $\frac{f(x)}{f(x)+k}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 k 의 최솟값은?

연속함수 \rightarrow (분모=0에서 분자=0)
 $\Rightarrow f(x)+k=0$ 의 근이 없어야 함.

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 1 + k = 0 \text{의 근 } x$$

$$D < 0$$

$$D/4 = 9 - 2(1+k) < 0$$

11. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여
 $f(-2) = -2, f(-1) = 2, f(0) = 1, \frac{7}{2} < k$
 $f(1) = 0, f(2) = 3, f(3) = -3 \therefore 4$
 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(-2, 3)$ 에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하시오.

$$(-2, -1), (2, 3) \text{ 구간에서,}$$

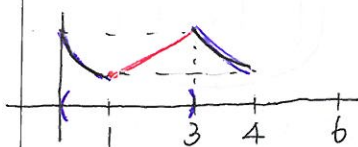
$$x=1$$

$$\rightarrow 3개$$

12. 함수 $f(x)$ 가 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(3)$ 을 만족시키고

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & (0 \leq x < 1) \\ ax + b & (1 \leq x < 3) \end{cases}$$

이다, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 값을 구하시오.



$$x=1 \text{에서 연속}$$

$$1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = a + b$$

$$1 = a + b$$

$$x=3 \text{에서 연속}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$3a + b = 2$$

13. 이차함의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{3x-1}{f(x)}$ 가 $x=1, x=-2$ 에서 불연속일 때, $f(3)$ 의 값은?

$f(x)$: 연속함수이므로 불연속항수가 되기 때문

$$f(1) = f(-2) = 0$$

$$f(x) = (x-1)(x+2)$$

14. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-5} & (x \neq 5) \\ 3 & (x = 5) \end{cases}, g(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여

$f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$ 의 값은?

$$x=5$$

$x=5$ 에서 연속
 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)g(x) = f(5)g(5)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+1}{x-5} (x^2 + ax + b) = 3(25 + 5a + b)$$

$$\hookrightarrow \text{음의 극한이므로 } 25 + 5a + b = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+1}{x-5} (x-5)(x-\frac{b}{5}) = 0 \rightarrow g(x) = (x-5)^2$$

15. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 6x + t - 2 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 함수 $(t-a)f(t)$ 가 모든 실수 t 에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

$$f(t) = \begin{cases} 2, & (D > 0 \rightarrow D/4 = 9 - t + 2 > 0, t < 11) \\ 1, & t = 11 \\ 0, & t > 11 \end{cases}$$

$(t-a)f(t)$ 는 $x=11$ 에서 연속
 $x=11$

$$\therefore a = 11$$

18. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$ 의 그래프를 그리시오.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1, x < -1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1, -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

