2. 급수	출제자	최 주 연 조 시 현 김 아 영	학번	이름

1. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=\frac{k}{n}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})=6$일 때, 상수 k의 값은?

ⓘ a_n-a_{n+2}
ⓘⓘ $S_n=(a_1-a_3)+(a_2-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n+2})$
$=a_1+a_2-a_{n+1}-a_{n+2}=k(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$
ⓘⓘⓘ $\lim S_n=\frac{3}{2}k=6.$ $\therefore k=4$

2. 수열 $\{a_n\}$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{15}$ 일 때, a_1의 값은? (단, $a_n\neq 0$)

ⓘ $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$
ⓘⓘ $S_n=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\cdots+(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$
ⓘⓘⓘ $\lim S_n=\lim(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

$\frac{15}{a_1}-5=1$

$\frac{15}{a_1}=6 \rightarrow a_1=\frac{5}{2}$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n=\frac{4n-3}{2n-1}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$의 값은?

ⓘ a_n+a_{n+1}
ⓘⓘ $S_n=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_{n+1})$
$=S_n+S_{n+1}-a_1$
ⓘⓘⓘ $\lim S_n=2+2-1=3$
$(\because \lim S_n=\lim S_{n+1},\ a_1=S_1)$

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-5n}{2n+1}=1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n}{n+2a_n}$의 값은?(단, $n+2a_n\neq 0$)

$\lim\frac{a_n-5n}{2n+1}=0$

$\lim(a_n-5n)=0$

$\lim\frac{(a_n-5n)+2n}{2(a_n-5n)+11n}=\frac{2}{11}$

5. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^na_n-5)$이 수렴할 때, $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}}\lim\frac{a_n-3^{-n}}{4a_n+4^{-n}}$의 값은?

⇓

$\lim(3^na_n-5)=0$

$\lim 3^na_n=5$

$\lim\frac{3^na_n-1}{4\cdot 3^na_n+(\frac{3}{4})^n}=\frac{5-1}{4\cdot 5+0}$

$=\frac{1}{5}$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n-5)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n-1)$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)$의 값은?

$\lim(2a_n+b_n-5)=0$

$\lim(a_n-b_n-1)=0$

$\Rightarrow \lim a_n=2.\ \lim b_n=1.$

$\therefore 5$

7. 첫째항이 4이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}a_{n+1}$의 값은?

$a_n=4(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$a_{n-1}a_{n+1}=16\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$

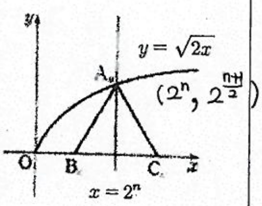
등비급수 첫항 ⓝ=2 4 공비 $\frac{1}{4}$

$\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}-4^{n+1}}{6^n}$의 값은?

$\sum\{5\cdot(\frac{5}{6})^n-4(\frac{4}{6})^n\}=\frac{\frac{25}{6}}{1-\frac{5}{6}}-\frac{\frac{16}{6}}{1-\frac{4}{6}}=25-8=17$

9. 자연수 n에 대하여 직선 $x=2^n$ 이 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점을 A_n이라 하고, 삼각형 $A_nB_nC_n$이 정삼각형이 되도록 x축 위의 두 점 삼각형 B_n, C_n을 정한다. $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은?



삼각형높이 $2^{\frac{n+1}{2}}$

한변 $\frac{2}{\sqrt{3}}2^{\frac{n+1}{2}}$

$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{4}{3}2^{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{3}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 첫째항이 7인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$의 값은?

ⓘ a_n-a_{n+1}
ⓘⓘ $S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$
$=a_1-a_{n+1}$
ⓘⓘⓘ $\lim S_n=\lim(a_1-a_{n+1})=7-2=5$

11. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{3n-1}{n+2}\right)=7$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+8}{2n-5}$의 값은?

⇓

$\lim(a_n+\frac{3n-1}{n+2})=0.$

$\lim a_n=-3.$

$=\lim\frac{a_n+\frac{8}{n}}{2-\frac{5}{n}}$

$=-\frac{3}{2}$

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2S_n + 3a_n}{S_n - 1}$의 값을 구하시오.

$\lim S_n = \sum a_n = 3$

$\lim a_n = 0$

$\rightarrow \frac{6+0}{3-1} = 3$

13. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)(x-2)^n}{3^n}$이 수렴하도록 하는 실수 x값의 범위를 구하시오.

$a=0$ or $-1<r<1$

$\frac{(x+1)(x-2)}{3}=0$ or $-1<\frac{x-2}{3}<1$

$x=-1$ or 2 or $-1<x<5$

$\therefore -1 \le x < 5$

14. 첫째항이 6인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-1}$ 의 값은?

$a_n = 6\, r^{n-1}$ $(-1<r<1)$

$\sum^{\infty} a_n = \frac{6}{1-r} = 9 \rightarrow r = \frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot r^{3n-2} = \frac{2}{1-\frac{1}{27}} = \frac{27}{13}$

공비 $r^3 = \frac{1}{27}$. 첫항 $6r = 2$.

15. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{n(n+2)}$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ ∞로 발산한다 ⑤ 진동한다.

① $a_n + a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

② $S_{2n} = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n}) = (1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}) = 1-\frac{1}{2n+1}$.

$S_{2n+1} = a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2n}+a_{2n+1}) = 1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}) = \frac{3}{2}-\frac{1}{2n+2}$

③ $\lim S_{2n}=1$, $\lim S_{2n+1}=\frac{3}{2}$ 이므로 진동

16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2 + 9b_n^2)$의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 3b_n) = 5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $2n^2+1 < n^2 a_n b_n < 2n^2 + 5n$ 이다.

(가) $\lim(a_n - 3b_n) = 0$ (나) $\lim a_n b_n = 2$

$(a_n^2 + 9b_n^2) = (a_n - 3b_n)^2 + 6a_n b_n$ 이므로 12.

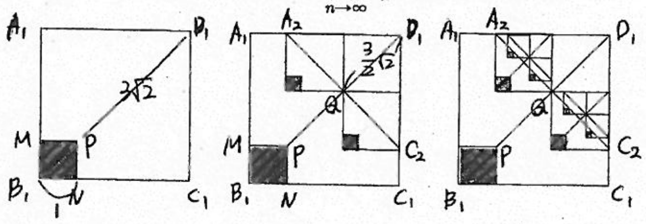
17. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2+(3^n-4^n)x+5^n=0$의 서로 다른 두 실근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$의 값은?

$\alpha_n+\beta_n = -3^n+4^n$. $\alpha_n\beta_n = 5^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{\beta_n\alpha_n}\right) = \sum\left(\frac{-3^n+4^n}{5^n}\right) = \sum -\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$= -\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{2}+4 = \frac{5}{2}$

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 변 A_1B_1, C_1B_1을 3:1로 내분하는 점을 M, N이라 하고, 정사각형 PMB_1N의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 선분 D_1P의 중점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 선분 D_1P에 수직인 직선이 두 선분 A_1D_1, C_1D_1과 만나는 점을 각각 A_2, C_2라 하자. 두 선분 A_2Q, QC_2를 각각 대각선으로 하는 두 정사각형을 그리고 새로 그려진 2개의 정사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.



R_1 R_2 R_3

$a = 1^2$

닮음비 $\Rightarrow$ $\overline{B_1D_1} : \overline{QD_1} = 4\sqrt{2} : \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$= 1 : \frac{3}{8}$

넓이 $\Rightarrow 1 : \frac{9}{64}$

공비 $r = \frac{9}{32}$

$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{9}{32}} = \frac{32}{23}$

※ 수고많았습니다 ※