1. 수열의 극한	출제자	최 주 연 조 시 현 김 아 영	학 번	이 름

1. 다음 보기와 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 중에서 수렴하는 수열만을 있는 대로 고르면?

ㄱ. $\begin{cases} a_1 = 200 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \ (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$ → $-\infty$ 발산

ㄴ. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_{n+1} = 2a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$ $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$

$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \to 0$ 수렴

ㄷ. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \ (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

$a_n=\begin{cases} 2, & n이\ 홀수 \\ \frac{1}{2}, & n이\ 짝수 \end{cases}$

→ 진동발산

② ㄴ

2. 다음 보기의 수열 중에서 수렴하는 수열만을 있는 대로 고르면?

ㄱ. $\{3-n^2\}$ ㄴ. $\left\{\frac{3n^3-1}{n^3}\right\}$ ㄷ. $\left\{\frac{1-(-2)^n}{3^n}\right\}$

⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\{3-n^2\}=-\infty$ → 발산

ㄴ. $\lim\left\{\frac{3n^3-1}{n^3}\right\}=\lim\left(3-\frac{1}{n^3}\right)=3$

ㄷ. $\lim\frac{1-(-2)^n}{3^n}=\lim\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$: 수렴

3. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=8$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=7$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-b_n}{a_n+b_n}$ 의 값은? (단, $a_n+b_n \neq 0$)

9

$\lim(a_n-b_n)+\lim(2a_n+b_n)$

$=3\lim a_n=15 \Rightarrow \lim a_n=5, \ \lim b_n=-3.$

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{a_n+2}=1$ 일 때, 실수 α의 값은?(단, $\alpha\neq 0$, $a_n+1\neq 0$)

2

• $\lim a_n=(\alpha+1)$

• $\lim\frac{2a_n-1}{a_n+2}=\frac{2(\alpha+1)-1}{(\alpha+1)+2}=\frac{2\alpha+1}{\alpha+3}=1.$

$2\alpha+1=\alpha+3$

$\alpha=2.$

5. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n-1<a_n<3n+2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-1}}{2n}$ 의 값은?

$\frac{9}{2}$

↓(3n-1) 대입

$3(3n-1)-1<a_{3n-1}<3(3n-1)+2$

$\frac{9n-4}{2n}<\frac{a_{3n-1}}{2n}<\frac{9n-1}{2n}$

→ 샌드위치정리

6. 두 상수 a, b가

↗ $\infty-\infty$꼴 ↗ $\frac{\infty}{\infty}$꼴

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}=a$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(an-1)}{n^2+1}=b$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

8

• $\lim\frac{1}{(n-\sqrt{n^2-n})}\cdot\frac{(n+\sqrt{n^2-n})}{(n+\sqrt{n^2-n})}=\lim\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n^2-(n^2-n)}=2=a.$

• $\lim\frac{3an^2+(a-3)n-1}{n^2+1}=3a=6=b.$

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{3n}}$ 의 값은?

2

→ $\frac{\infty}{\infty}$꼴 (유리화 할 필요X)

$\lim\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}}=2.$

8. $\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+8+\cdots+(3n-1)}{1+6+11+\cdots+(5n-4)}$ 의 값은?

$\frac{3}{5}$

$2+5+\cdots+(3n-1)=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=\frac{3n^2+n}{2}$

$1+6+\cdots+(5n-4)=\sum_{k=1}^{n}(5k-4)=\frac{5n^2-3n}{2}$

$\Rightarrow \lim\frac{\frac{3n^2+n}{2}}{\frac{5n^2-3n}{2}}$

9. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{S_n}$ 의 값은? (단, $a_1\neq 0$)

$a_n=a2^{n-1}$

$S_n=\frac{a(2^n-1)}{2-1}$

$\lim\frac{a2^{n-1}+a2^{n+1}}{a(2^n-1)}=\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{5}{2}$

10. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-3^{n-2}}{3^{-n+1}-4^{n+1}}$ 의 값은?

$-\frac{1}{4}$

$=\lim\frac{4^n-\frac{1}{9}3^n}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n-4\cdot4^n}=\lim\frac{1-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3\left(\frac{1}{12}\right)^n-4}$

$=-\frac{1}{4}$

11. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_2}{a_{2n+1}+2}=\frac{1}{4}$ 일 때, a_4의 값을 구하시오.?

$\frac{1}{8}$

$a_n=r^{n-1}$

범위나눠 ↓

$\lim\frac{r}{r^{2n}+2}=\begin{cases}\frac{r}{2}, & r^2<1 \\ \frac{r}{3}, & r^2=1 \\ 0, & r^2>1\end{cases}$

ⓘ $\frac{r}{2}=\frac{1}{4}$ ⓘⓘ $\frac{r}{3}=\frac{1}{4}$

$r=\frac{1}{2}\ (\because r^2<1)$ $r=\frac{3}{4}\ (\because r^2=1)$ X

$a_4=ar^3=\frac{1}{8}$

→ ∞−∞꼴

12. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$ 의 값은?

1

$$\lim\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2}{2}$$

13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)$ 의 값은?

$\frac{1}{3}$

$$=\lim\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

14. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=1, \lim_{n\to\infty}(b_n-3)=0$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-1}{(a_n+1)b_n}$ 의 값은?

1

$\lim a_n=-2. \to \lim a_{n+1}=-2.$

$\lim b_n=3$

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|na_n-3n|<2$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값은?

3

$-2<na_n-3n<2$

$3n-2<na_n<3n+2$

$\frac{3n-2}{n}<a_n<\frac{3n+2}{n}$

샌드위치 정리

16. 첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 공비가 각각 $-2, 3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+3b_n}{a_{2n}+b_{n+1}}$ 의 값은?

$-\frac{1}{2}$

$a_n=(-2)^{n-1}$

$b_n=3^{n-1}$

$$\lim\frac{(-2)^{2n-2}+3^n}{(-2)^{2n-1}+3^n}=\lim\frac{(-2)^{2n}\cdot(-2)^{-2}+3^n}{(-2)^{2n}(-2)^{-1}+3^n}$$

$(-2)^2>3$

$$=\lim\frac{\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

17. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3, \quad \lim_{n\to\infty}(2n^3+n)b_n=8$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(3n^2-n)}{na_n}$ 의 값은? (단, $a_n\neq 0$)

4

$$\lim\frac{(2n^3+n)b_n}{2n^3+n}\cdot(3n^2-n)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+1}{(n^2+1)a_n}=4$$

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+bn}+an-b}=2$ 를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 a, b의 값은?

∞−∞꼴의 부정형이어야 하므로 $a<0$

$a=b=-1$

$$\lim\frac{1}{(\sqrt{\ }+an-b)}\frac{(\sqrt{\ }-(an-b))}{(\sqrt{\ }-(an-b))}=\lim\frac{\sqrt{n^2+bn}-an+b}{n^2+bn-(an-b)^2}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{n^2+bn}-an+b}{(1-a^2)n^2+(b+2ab)n-b^2}=\frac{2}{-b}=2.$$

$1-a^2=0 \to a=-1.$ $b=-1.$

19. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_2+9=a_5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{2n}}{S_n}$ 의 값은?

12

$(a+d)+9=a+4d$

$d=3.$

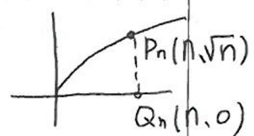
$a_n=a+(n-1)3$

$S_n=\frac{n\{2a+3n-3\}}{2}$

$$\lim\frac{[a+3n-3][a+6n-3]}{\frac{2an+3n^2-3n}{2}}$$

20. 무리함수 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $P_n(n, \sqrt{n})$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{OP_n}-\overline{OQ_n})$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이고 n은 자연수)

$\frac{1}{2}$



$\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+n}$

$\overline{OQ_n}=n$

$$\lim(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}$$

21. 수열 $\left\{\cancel{\frac{(x^2-2x)^n}{3^n}}\right\}$ $\left\{\frac{(x+2)(x^2-2x)^n}{3^n}\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 ~~범위는~~?

~~$-3\le x<1$~~

$a=\frac{(x+2)(x^2-2x)}{3}=0 \to x=-2, 0, 2$

or

$-1<r=\frac{x^2-2x}{3}\le 1$

$-3<x^2-2x\le 3$ ②

① $x^2-2x+3>0$

ㄴ절대부등식

연립

② $x^2-2x-3\le 0$

$-1\le x\le 3.$

※수고많았습니다※

$\therefore x=-2, -1, 0, 1, 2, 3$