

8. 지수

출
제
자

최 주 연
조 시 현
김 아 영

학 번

이 름

1. $x = \sqrt[3]{2\sqrt{12}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}}$ 일 때, x^3 의 값은?

$$x = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 12^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$x^3 = 12^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6.$$

2. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{27} + \frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3}}$ 의 값은?

$$3^{\frac{1}{3} + \frac{3}{3}} + 3^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 3^1 + 3^1 = 6.$$

3. $\left(\sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 의 값은?

$$= 2 + 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4. $(3^{10} + 3^{-9})^2 - (3^{10} - 3^{-9})^2$ 의 값은?

$$= (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$= 4 \cdot 3^{10} \cdot 3^{-9} = 4 \cdot 3 = 12$$

5. $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$ 의 값은?

$$= \left(\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{6}$$

6. $\left(\frac{1}{48}\right)^{-1} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^{-2}$ 의 값은?

$$= 48 \cdot \frac{25}{12} = 100$$

7. $\sqrt[5]{27} \div \sqrt[3]{3} \times \sqrt[15]{3} = 3^x$ 일 때, x 의 값은?

$$3^{\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15}} = 3^x$$

$$x = \frac{9-5+1}{15} = \frac{1}{3}$$

8. $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[10]{3}}{\sqrt[5]{3}}}$ 의 값은?

$$3^{\frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{10}} = 3^0 = 1$$

9. $100^x = 25$, $4^y = 5$ 일 때, $\frac{2}{x} - \frac{1}{y}$ 의 값은?

$$100 = 5^{\frac{2}{x}} \quad 4 = 5^{\frac{1}{y}}$$

$$5^{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}} = 100 \div 4 = 5^2 \quad \therefore 2$$

10. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{4}{a} + \frac{6}{b} = \frac{12}{c}$ 일 때,

$64^a = 81^b = k^c$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은?

$$= 7.$$

$$2^{\frac{4}{a}} = 64^{\frac{1}{b}} = 2^{\frac{24}{b}}$$

$$2^{\frac{6}{b}} = 81^{\frac{1}{c}} = 3^{\frac{24}{c}}$$

$$2^{\frac{4}{a} + \frac{6}{b}} = 2^{\frac{12}{c}}$$

$$2^{\frac{24}{b}} \cdot 3^{\frac{24}{c}} = (k^c)^{\frac{12}{c}}$$

$$6^{24} = k^{12}$$

$$\therefore k = 36$$

11. $\left(2^{-\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$ 의 값은?

$$= 2^1 \left\{ (3^3)^{\frac{1}{3}} \right\}^{(-2)}$$

$$= 2 \cdot 3^{-2} = \frac{2}{9}$$

12. $8^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \div (\sqrt{2})^m$ 이 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m 의 개수는?

$$2^{15} \cdot 2^{-4} \div 2^{\frac{m}{2}}$$

$$= 2^{11-\frac{m}{2}} \text{ 이 자연수.}$$

→ $11-\frac{m}{2}$ 은 음이아닐 정수

$$m = 2, 4, \dots, 22 \quad \therefore 11개$$

13. $(\sqrt{10}-2\sqrt{2})^4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}\right)^{-4}$ 의 값은?

$$(\sqrt{10}-2\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt{10}+2\sqrt{2})^4$$

$$= [(\sqrt{10}-2\sqrt{2})(\sqrt{10}+2\sqrt{2})]^4$$

$$= 2^4 = 16$$

14. 네 수 $a = \sqrt[5]{5}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt[3]{3}$, $d = \sqrt[4]{7}$ 의 대소관계를 (예)와 같이 부등호를 사용하여 나열하시오.
(예) $a < b < c < d$

$$a = 5^{\frac{1}{5}} \quad b = 2^{\frac{1}{2}} \quad c = 3^{\frac{1}{3}} \quad d = 7^{\frac{1}{4}}$$

$$a^{12} = 5^3 = 125$$

$$b^{12} = 2^6 = 64$$

$$c^{12} = 3^4 = 81$$

$$d^{12} = 7^3 = 343$$

$$\therefore d < b < c < a$$

15. $x = 3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}}$ 일 때, $x^4 + 4x^2$ 의 값은?

$$x^2 = 3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4)$$

$$= \left[\left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}} - 2 \right) \right] \left[\left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \right]$$

$$= 3 + 3^{-1} + 2 - 4 = 3 + \frac{1}{3} + 2 - 4$$

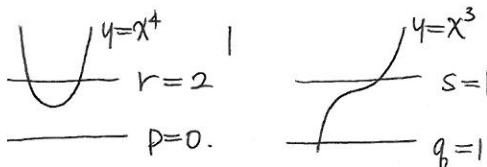
$$= \frac{4}{3}$$

16. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 a 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수와 $\sqrt[3]{a}$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 다음과 같이 구하였다.

(가) $a < 0$ 일 때, a 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 p 이고, $\sqrt[3]{a}$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 q 이다.

(나) $a > 0$ 일 때, a 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 r 이고, $\sqrt[3]{a}$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 s 이다.

상수 p, q, r, s 에 대하여 $p+q-r-s$ 의 값을 구하시오.



$$\therefore -2$$

17. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = (a-b)x + 4a - 3b$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$3^{-g(a)} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{g(b)} \div \{3^{g(a)}\}^{g(b)} \text{의 값은?}$$

$$= 3^{-g(a)-g(b)-g(a)g(b)} = 3^{3+4-12} = 3^{-5} = \frac{1}{243}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{i} g(a) &= k \Leftrightarrow f(k) = a \\ (a-b)k + 4a - 3b &= a \\ k &= -3. \end{aligned}$$

$$\textcircled{ii} g(b) = t. \quad f(t) = b$$

$$(a-b)t + 4a - 3b = b$$

$$t = -4.$$

18. 함수 $f(x) = \sqrt{3x}$ 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(1) = 3^x$ 일 때, 실수 x 의 값을 구하시오.

$$f(x) = 3^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(1) = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$f(f(1)) = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$$f(f(f(1))) = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

19. $2^x + 2^{y-1} = \frac{7}{2}$, $2^{2x} - 2^y = 1$ 을 만족시키는 두 실수 x, y 에

대하여 $4^x \times 4^y$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} 2^x &= a \\ 2^y &= b \end{aligned} \text{로 두면,}$$

$$2^x + 2^{y-1} = \frac{7}{2} \quad (2^x)^2 - 2^y = 1$$

$$a + \frac{b}{2} = \frac{7}{2} \quad a^2 - b = 1$$

$$b = 7 - 2a \text{ 대입.}$$

$$a = 2 \text{ 또는 } -4$$

* 수고 많았습니다 *

$$(2^x > 0 \text{ 이므로 } a = 2)$$

$$b = 3$$

$$4^x \cdot 4^y = a^2 \cdot b^2 = 4 \cdot 9 = 36$$