수학 영역(가형)

1. 계산 능력 – 평면벡터 정답 ①

$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ -4)+(-1,\ 5)=(2,\ 1)$

이므로 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$2+1=3$

2. 계산 능력 – 삼각함수 정답 ③

$\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

3. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=(-1)\times 1=-1$$

4. 이해 능력 – 확률 정답 ③

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$2\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{14}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{7}{15}$

5. 이해 능력 – 확률 정답 ③

a가 짝수이고 b, c 중 적어도 하나는 짝수이므로

구하는 확률은 $\frac{3}{6}\times\left(1-\frac{3\times 3}{6^2}\right)=\frac{3}{8}$

6. 수학 내적 문제 해결 능력 – 순열과 조합 정답 ①

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식에서 일반항은

${}_{2n}\mathrm{C}_r\,x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{2n}\mathrm{C}_r\times x^{2n-2r}$

x^2의 계수는 $2n-2r=2$일 때, 즉 $r=n-1$이므로

$a_n={}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{4}a_n=\sum_{n=1}^{4}{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}={}_2\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_3=1+4+15+56=76$$

7. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

$$y=\log_2 2(x-2)+3=\log_2 2+\log_2(x-2)+3=\log_2(x-2)+4$$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

그런데 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 점근선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동된다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

8. 이해 능력 – 평면 곡선 정답 ①

$x=t-\frac{1}{t}=0$에서 $\frac{t^2-1}{t}=0$, $t=-1$ 또는 $t=1$

$y=t+\frac{1}{t}=2$이므로 $t=1$

$x=t-\frac{1}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

$y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

따라서 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0$

따라서 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

9. 이해 능력 – 미분법 정답 ⑤

$(g\circ f)(x)=\sin\pi x$, 즉 $g(f(x))=\sin\pi x$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=\pi\cos\pi x$ …… ㉠

이때 $f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=\pi\cos\pi=-\pi$ …… ㉡

이때 $f'(x)=-e^{-x}$에서

$f'(1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$이므로

㉡에서 $g'\left(\frac{1}{e}\right)\times\left(-\frac{1}{e}\right)=-\pi$

따라서 $g'\left(\frac{1}{e}\right)=e\pi$

10. 이해 능력 – 적분법 정답 ④

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=f'(-x)=\ln|x|$$

이므로 $f'(x)=\ln|-x|=\ln|x|$

양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)=\int\ln|x|\,dx=x\ln|x|-\int\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx=x\ln|x|-x+C\text{(단, }C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$f(1)=1\ln 1-1+C=-1+C=e-1$에서 $C=e$

따라서 $f(x)=x\ln|x|-x+e$이므로

$f(e)=e\ln e-e+e=e$

11. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ②

두 삼각형 ACE, BDE는 닮음이고

$S_1:S_2=4:9$이므로 닮음비는

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:3$, $3\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BD}}$

$\overline{\mathrm{AC}}=-\log_5 a$, $\overline{\mathrm{BD}}=\log_5 b$이므로

$-3\log_5 a=2\log_5 b$

$3\log_5 a+2\log_5 b=\log_5 a^3b^2=0$

$a^3b^2=1$에서 $b^2=\frac{1}{a^3}=a^{-3}$이므로

$b=a^{-\frac{3}{2}}$

따라서 $\log_a b=\log_a a^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$

12. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ④

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{AOC}=2\theta$이다.

$\mathrm{B}(4,\ 3)$이므로

$\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$

이때

$$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

이므로 점 C의 x좌표는

$\overline{\mathrm{OC}}\times\cos 2\theta=5\times\frac{7}{25}=\frac{7}{5}$

13. 수학 내적 문제 해결 능력 – 평면벡터 정답 ②

선분 AB가 지름이므로 $\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$

원의 중심을 O라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\times\cos(\pi-\angle\mathrm{CAB})+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=2\times 3\times\left(-\frac{2}{6}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=-2+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 방향이 같을 때 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$의 최댓값은

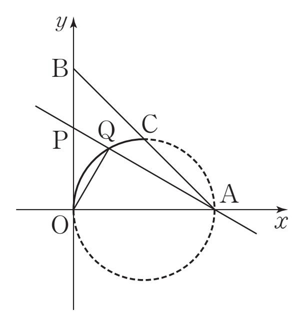
$-2+2\times 3=4$

14. 이해 능력 – 평면벡터 정답 ②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 서로 수직이고 점 Q가 직선 AP 위의 점이므로 점 Q는 원점 O에서 직선 AP에 내린 수선의 발이다.



선분 OA를 지름으로 하는 원과 선분 AB의 교점 중에서 점 A가 아닌 점을 C라 하면 점 Q가 나타내는 도형은 선분 OA를 지름으로 하는 원의 일부인 호 OC이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$

15. 수학 내적 문제 해결 능력 – 평면 곡선 정답 ⑤

세 점 A, B, C의 좌표를 $\mathrm{A}(3a,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(2a,\ 0)$이라 하자.

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}+\frac{y^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=1$에서

$\frac{x^2}{9a^2}+\frac{y^2}{5a^2}=1$

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2}-\frac{y^2}{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{OB}}^2}=1$에서

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$

따라서 점 D의 좌표는 $(0,\ \sqrt{5}a)$이고, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}x$이다.

$\sqrt{5}a=\sqrt{3}x$에서 $x=\frac{\sqrt{15}}{3}a$이므로

$\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}a,\ \sqrt{5}a\right)$이다.

삼각형 DOE의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로

$$\triangle\mathrm{DOE}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}a\times\frac{\sqrt{15}}{3}a=\frac{5\sqrt{3}}{6}a^2=5\sqrt{3}$$

즉, $a^2=6$

따라서 $a=\sqrt{6}$이므로 타원의 장축의 길이는 $6a=6\sqrt{6}$이다.

16. 수학 외적 문제 해결 능력 – 확률 정답 ③

꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수의 합이 3의 배수인 사건을 X라 하고, 꺼낸 공에 적힌 세 수가 모두 다른 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

(ⅰ) 1이 적힌 공을 3번 꺼낼 확률

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(ⅱ) 1, 2, 3이 적힌 공을 각각 1번씩 꺼낼 확률

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\times 3!=\frac{1}{6}$

(ⅲ) 2가 적힌 공을 3번 꺼낼 확률

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

(ⅳ) 3이 적힌 공을 3번 꺼낼 확률

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

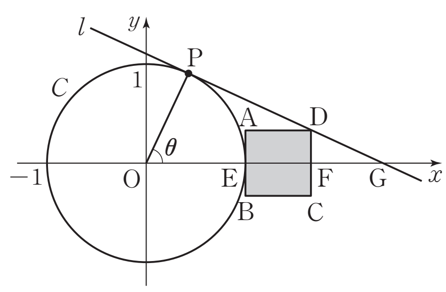
따라서

$$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{27}+\frac{1}{216}$$
$$=\frac{27+36+8+1}{216}=\frac{1}{3}$$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{6}$

이므로 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 - 삼각함수 정답 ③



그림과 같이 정사각형과 x축이 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F, 직선 l과 x축이 만나는 점을 G라 하자.

직각삼각형 POG에서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OG}}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OG}}=\frac{1}{\cos\theta}$

정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면,

$\overline{\mathrm{DF}}=\frac{a}{2}$이므로 점 D의 좌표는 $\left(1+a,\ \frac{a}{2}\right)$

이고, $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{OG}}-\overline{\mathrm{OF}}=\frac{1}{\cos\theta}-(1+a)$이다.

직각삼각형 DFG에서 $\angle\mathrm{FDG}=\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{FG}}}{\overline{\mathrm{DF}}}=\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1-a}{\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{2-2\cos\theta-2a\cos\theta}{a\cos\theta}$$

$a\sin\theta=2-2\cos\theta-2a\cos\theta$

$a=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta+2\cos\theta}$

따라서 $S(\theta)=a^2=\frac{4(1-\cos\theta)^2}{(\sin\theta+2\cos\theta)^2}$

이때

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{4}{(\sin\theta+2\cos\theta)^2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{4}{(0+2)^2}=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

직선 l의 방정식은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$

정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 점 D의 좌표는 $\left(1+a,\ \frac{a}{2}\right)$이고, 점 D는 직선 l 위의 점이므로

$(1+a)\cos\theta+\frac{a}{2}\sin\theta=1$

따라서 $a=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta+2\cos\theta}$

18. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 ④

두 점 P, Q가 원점을 출발한 지 t초 후의 x좌표는 각각 t, $2t$이므로 t초 후의 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S(t)=\int_t^{2t}(e^x-e^{-x})dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_t^{2t}$$
$$=(e^{2t}+e^{-2t})-(e^t+e^{-t}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$S'(t)=2(e^{2t}-e^{-2t})-(e^t-e^{-t}) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $e^t+e^{-t}=X$라 하면

$X=e^t+e^{-t}\ge2\sqrt{e^t\times e^{-t}}=2$이고,

$e^{2t}+e^{-2t}=(e^t+e^{-t})^2-2=X^2-2$

이므로 $S(t)=4$이면 ㉠에서

$X^2-2-X=4$, $X^2-X-6=0$

$(X+2)(X-3)=0$

$X=-2$ 또는 $X=3$

$X\ge2$이므로 $X=3$

이때 $(e^t-e^{-t})^2=(e^t+e^{-t})^2-4=3^2-4=5$

$e^t-e^{-t}>0$이므로 $e^t-e^{-t}=\sqrt{5}$이고,

$e^{2t}-e^{-2t}=(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})=3\sqrt{5}$

따라서 $S(a)=4$일 때

$e^a-e^{-a}=\sqrt{5}$, $e^{2a}-e^{-2a}=3\sqrt{5}$

이므로 ㉡에서

$S'(a)=2\times3\sqrt{5}-\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

19. 연역적 추론 능력(증명) - 순열과 조합 정답 ④

(ⅰ) ★ 모양의 스티커 $(n-2)$장을 ♥, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_{n-2}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}=n-1$

♥ 모양의 스티커 $(n-1)$장을 ★, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_{n-1}=n$

♣ 모양의 스티커 n장을 ★, ♥가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_n={}_{n+1}\mathrm{C}_n=n+1$

따라서 ★ 모양의 스티커 $(n-2)$장, ♥ 모양의 스티커 $(n-1)$장, ♣ 모양의 스티커 n장을 ★, ♥, ♣가 표시된 세 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수는

$(n-1)\times n\times(n+1)=\boxed{n^3-n}$이다.

(ⅱ) ★가 표시된 종이에 한 장의 스티커도 붙어 있지 않은 경우의 수는 ★ 모양의 스티커를 ♥, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{H}_{n-2}$

같은 방법으로 생각하면 세 종이 중 어느 한 종이에 한 장의 스티커도 붙어 있지 않은 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_{n-2}+{}_2\mathrm{H}_{n-1}+{}_2\mathrm{H}_n$

$={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n+1}\mathrm{C}_n$

$=n-1+n+n+1=3n$

(ⅲ) ★가 표시된 종이에 한 장의 스티커만 붙어 있는 경우의 수는 ♥, ♣ 모양의 스티커 중 하나를 ★가 표시된 종이에 붙이고 ★ 모양의 스티커를 ♥, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수와 같으므로 $2\times{}_2\mathrm{H}_{n-2}=2(n-1)$

같은 방법으로 생각하면 세 종이 중 어느 한 종이에 한 장의 스티커만 붙어 있는 경우의 수는

$2\times{}_2\mathrm{H}_{n-2}+2\times{}_2\mathrm{H}_{n-1}+2\times{}_2\mathrm{H}_n$

$=2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}+2\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}+2\times{}_{n+1}\mathrm{C}_n$

$=2(n-1)+2n+2(n+1)$

$=\boxed{6n}$

따라서 구하는 경우의 수는

$n^3-n-3n-6n=\boxed{n^3-10n}$

이다.

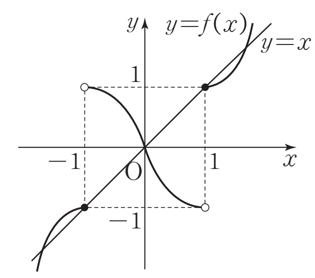
이상에서 $f(n)=n(n^2-1)$, $g(n)=6n$, $h(n)=n(n^2-10)$이므로

$$\frac{g(8)h(10)}{f(5)}=\frac{(6\times8)\times(10\times90)}{5\times24}=360$$

20. 연역적 추론 능력(증명) - 미분법 정답 ③

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 항상 원점을 지나고 원점에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에서 함수 $f(x)$는 $x\ne\pm1$인 모든 실수 x에서 연속이고 미분가능하다.

ㄱ. (참) $f(1)=1$이면 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 항상 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$에서 만난다.



따라서 방정식 $f(x)=x$는 적어도 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. (참) $f(1)=-1$이면 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해 $f'(a)=\frac{f(1)-0}{1-0}=-1$인 실수 a가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f'(-a)=-1$인 실수 $-a$가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f'(x)=-1$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

ㄷ. (거짓) (반례) $|x|<1$에서 $f(x)=-x$이고, $x\ge1$에서 $f(x)=2x-1$, $x\le-1$에서 $f(x)=2x+1$이면 주어진 조건을 만족시키지만 $f'(x)=1$인 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 ⑤

$x_k=\frac{k}{n}(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$은 닫힌 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하는 점의 x좌표이다.

$f'(x)=2e^{2x}-e^x+e=e^x(2e^x-1)+e$

$0\le x\le1$에서 $1\le e^x\le e$이므로 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가하고 $f(0)=0$이므로 $f(x)\ge0$

따라서 $\frac{f(x_k)}{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=f'(x_k)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\{f(x_k)\}^4}{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^3f'(x_k)$$
$$=\int_0^1\{f(x)\}^3f'(x)dx$$

$t=f(x)$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=f(0)=0$, $x=1$일 때 $t=f(1)=e^2$이고 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\{f(x_k)\}^4}{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=\int_0^{e^2}t^3dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{e^2}=\frac{1}{4}e^8$$

22. 계산 능력 - 순열과 조합 정답 91

${}_7P_2+{}_7\Pi_2=7\times6+7^2=91$

23. 이해 능력 - 삼각함수 정답 12

$-1\le\sin2x\le1$이므로

$-2\times1+10\le-2\sin2x+10$

$\le-2\times(-1)+10$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 12이다.

24. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 30

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+3=0$ ……㉠

에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$(\log_3 x)^2=t^2$, $\log_3 x^4=4\log_3 x=4t$

이므로 ㉠은

$t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

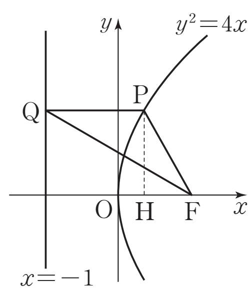
$t=1$ 또는 $t=3$

$\log_3 x=1$에서 $x=3^1=3$, $\log_3 x=3$에서

$x=3^3=27$이므로 구하는 모든 실근의 합은

$3+27=30$

25. 이해 능력 - 평면 곡선 정답 13



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

F(1, 0)이고

$\cos(\angle\mathrm{PFO})=\dfrac{3}{5}$

이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=5k$,

$\overline{\mathrm{HF}}=3k$($k$는 상수)로

놓으면

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{HF}}=5k+3k=8k$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{HF}}=2$이므로

$k=\dfrac{1}{4}$

직각삼각형 PHF에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k=1$이므로

$\triangle\mathrm{PQF}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PH}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}\times1=\dfrac{5}{8}$

따라서 $p+q=8+5=13$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 순열과 조합 정답 42

함수 f의 치역은 B가 아니면서 함수 $g\circ f$의 치역은 C이려면 함수 f의 치역은 원소의 개수가 2이어야 한다. 집합 B의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합의 개수는 ${}_3C_2=3$

집합 A의 네 원소를 3개, 1개 또는 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_1C_1+{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=4+3=7$

두 조를 치역의 두 원소에 대응하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $3\times7\times2=42$

27. 수학 내적 문제 해결 능력 - 평면 곡선 정답 3

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하자.

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$에서 $\dfrac{x}{2}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$,

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{4y}\,(y\ne0)$

$xy=k$에서 $y+x\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\,(x\ne0)$

점 P에서의 접선이 일치하므로 $-\dfrac{x_1}{4y_1}=-\dfrac{y_1}{x_1}$에서

${x_1}^2=4{y_1}^2$ ……㉠

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x_1=\sqrt{2}$, $y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 곡선 $xy=k$

위의 점이므로 $k=x_1y_1=1$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{2})$

즉, $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}$이므로

x절편은 $2\sqrt{2}$, y절편은 $\sqrt{2}$이다.

따라서 $S=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$이므로

$S+k=2+1=3$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률 정답 36

(ⅰ) 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 네 수를 뽑아 $f(1)<f(3)<f(5)<f(7)$이 되도록 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$에 대응시키는 경우의 수는 ${}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 세 수를 뽑아 $f(2)>f(4)>f(6)$이 되도록 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$에 대응시키는 경우의 수는

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

이므로 $35\times35=1225$

(ⅱ) 조건 (가), (나)를 만족시키는 일대일함수 f의 개수를 구하면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 네 수를 뽑아 $f(1)<f(3)<f(5)<f(7)$이 되도록 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$에 대응시키는 경우의 수는 ${}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

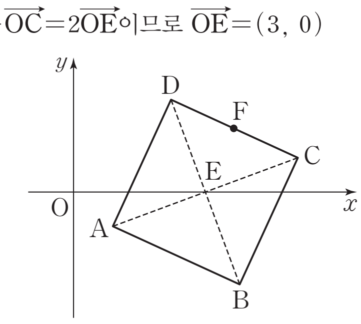
나머지 세 수를 $f(2)>f(4)>f(6)$이 되도록 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$에 대응시키는 경우의 수는 1이므로 $35\times1=35$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{35\times1}{35\times35}=\dfrac{1}{35}$

따라서 $p=35$, $q=1$이므로 $p+q=36$

29. 이해 능력 - 평면벡터 정답 80

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OE}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(3,\ 0)$



선분 CD의 중점을 $\mathrm{F}(a,\ b)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-4,\ 2)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EF}}$이므로 $(-4,\ 2)\cdot(a-3,\ b)=0$,

$-4(a-3)+2b=0$

$b=2a-6$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|=\sqrt{5}$

$(a-3)^2+b^2=5$, $(a-3)^2+(2a-6)^2=5$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$a=2$ 또는 $a=4$

점 A의 y좌표가 점 D의 y좌표보다 작고 직선 AB의 기울기가 음수이므로 점 F의 x좌표는 점 E의 x좌표보다 크다.

따라서 점 E의 x좌표가 3이므로 점 F의 x좌표는 4이다.

F(4, 2)이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=2\times\sqrt{16+4}=4\sqrt{5}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=80$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 미분법 정답 13

$f(x)=x^3-4x^2$이므로

$f'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

$f''(x)=6x-8$

함수 $y=f(\ln x)\,(x>0)$에 대하여

$y'=f'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$

이므로 $y'=0$에서 $f'(\ln x)=0$이어야 한다.

따라서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=\dfrac{8}{3}$이어야 하므로

$x=1$ 또는 $x=e^{\frac{8}{3}}$

이고, 이 x값의 좌우에서 $y'=f'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$의

부호가 바뀌므로 $a=1$, $b=e^{\frac{8}{3}}$

한편, $g(x)=f(\ln x)\,(a\le x\le b)$에서

$g'(x)=f'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$이므로

$g''(x)=f''(\ln x)\times\dfrac{1}{x^2}+f'(\ln x)\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\dfrac{1}{x^2}\{f''(\ln x)-f'(\ln x)\}$

$\ln x=t$라 하면 $g''(x)=0$에서

$f''(\ln x)-f'(\ln x)=f''(t)-f'(t)$

$=6t-8-(3t^2-8t)$

$=-3t^2+14t-8$

$=-(3t-2)(t-4)=0$

$0\le t\le\dfrac{8}{3}$이므로 $t=\dfrac{2}{3}$

따라서 $\ln x=\dfrac{2}{3}$에서 $x=e^{\frac{2}{3}}$

이때 $x=e^{\frac{2}{3}}$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 변하므로 곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 좌표는

$\left(e^{\frac{2}{3}},\ g\left(e^{\frac{2}{3}}\right)\right)$이다.

그런데 함수 $g(x)=f(\ln x)\,(a\le x\le b)$의 역함수 $h(x)$의 그래프는 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 좌표는 점 $\left(e^{\frac{2}{3}},\ g\left(e^{\frac{2}{3}}\right)\right)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점, 즉 점 $\left(g\left(e^{\frac{2}{3}}\right),\ e^{\frac{2}{3}}\right)$이다.

따라서 $m=g\left(e^{\frac{2}{3}}\right)$, $n=e^{\frac{2}{3}}$이므로

$h(m)=n=e^{\frac{2}{3}}$

따라서 역함수의 미분법에 의해

$h'(m)=\dfrac{1}{g'(h(m))}=\dfrac{1}{g'\left(e^{\frac{2}{3}}\right)}$

그런데 $g'(x)=f'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$이므로

$g'\left(e^{\frac{2}{3}}\right)=f'\left(\ln e^{\frac{2}{3}}\right)\times\dfrac{1}{e^{\frac{2}{3}}}=f'\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$

이때 $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\left(3\times\dfrac{2}{3}-8\right)=-4$이므로

$h'(m)=\dfrac{1}{g'\left(e^{\frac{2}{3}}\right)}=\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{-4}=-\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{4}$

따라서 $a\times b\times h'(m)=1\times e^{\frac{8}{3}}\times\left(-\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{4}\right)$

$=-\dfrac{e^{\frac{10}{3}}}{4}$

이므로 $p+q=3+10=13$

수학 영역(나형)

1. 계산 능력 – 지수와 로그 정답 ④

$3^{-2}\times 9^{\frac{5}{2}}=3^{-2}\times(3^2)^{\frac{5}{2}}$
$=3^{-2}\times 3^5$
$=3^3$
$=27$

2. 이해 능력 – 집합과 명제 정답 ③

$A\cap B=\{3,\ 5\}$이므로
$n(A\cap B)=2$

3. 계산 능력 – 수열의 극한 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

4. 가형 4번과 동일 정답 ③

5. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ③

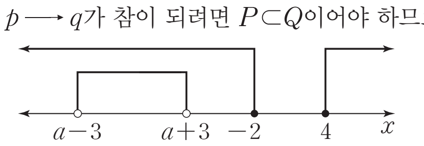
$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+1=2$

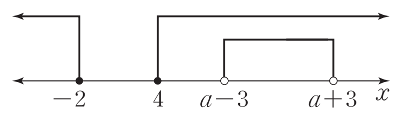
6. 이해 능력 – 함수 정답 ②

$g(2)=\frac{2+1}{2-1}=3,\ f(3)=3^2-1=8$
이므로
$(f\circ g)(2)=f(g(2))$
$=f(3)$
$=8$

7. 이해 능력 – 집합과 명제 정답 ④

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$|x-a|<3$에서 $a-3<x<a+3$
$P=\{x|a-3<x<a+3\}$
$x^2-2x-8\geq0$에서
$(x-4)(x+2)\geq0$
$Q=\{x|x\leq-2$ 또는 $x\geq4\}$
명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로





$a+3\leq-2$ 또는 $a-3\geq4$
즉 $a\leq-5$ 또는 $a\geq7$이어야 한다.
따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

8. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 ④

$x=t^3-t^2$에서 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t$
따라서 $t=2$일 때 점 P의 속도는
$v=3\times2^2-2\times2=8$

9. 이해 능력 – 함수 정답 ①

$f(1)=2$에서 $f^{-1}(2)=1$이다.
함수 f는 일대일 대응이므로
$f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$
(ⅰ) $f(3)=1$일 때
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2\neq3$
즉 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $f(3)=3$일 때
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(3)=3$이므로
$f(2)=1$이다.
따라서 $f(2)+f^{-1}(2)=1+1=2$

10. 이해 능력 – 수열 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2=ar>0$ …… ㉠
$a_1a_7=9$에서 $a\times ar^6=(ar^3)^2=9$
$ar^3=3$ 또는 $ar^3=-3$
이때 ㉠에 의하여 $ar^3>0$이므로
$ar^3=3$
따라서
$a_4+a_2a_6=ar^3+a^2r^6$
$=ar^3+(ar^3)^2$
$=3+3^2$
$=12$

11. 이해 능력 – 확률 정답 ⑤

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수의 최댓값이 6 이상인 사건을 A라 하면 사건 A^C은 최댓값이 5 이하인 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$
따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{11}{12}$

12. 이해 능력 – 수열 정답 ②

$a_2=p-2$
$a_3=(p-2)-4=p-6$
$a_4=(p-6)-6=p-12$
$a_5=(p-12)-8=p-20$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은
$p+(p-2)+(p-6)+(p-12)+(p-20)$
$=5p-40$
$5p-40=10$에서
$p=10$

13. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 ⑤

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$에서
$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)$
$+(x-1)(x-2)$
$f'(a)=(a-1)(a-2)$
$f'(1)=(1-2)(1-a)=a-1$
$f'(2)=(2-1)(2-a)=-a+2$
$f'(a)=f'(1)+f'(2)$이므로 $a^2-3a+2=1$에서
$a^2-3a+1=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠은 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

14. 수학 내적 문제 해결 능력 – 집합과 명제 정답 ⑤

명제 '어떤 실수 x에 대하여
$x^2+(k-3)x+2k-\frac{15}{4}<0$'이 거짓이려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2+(k-3)x+2k-\frac{15}{4}\geq0$이어야 한다.
따라서 이차방정식
$x^2+(k-3)x+2k-\frac{15}{4}=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 하므로
$D=(k-3)^2-4\left(2k-\frac{15}{4}\right)=k^2-14k+24\leq0$
$(k-2)(k-12)\leq0$
따라서 $2\leq k\leq12$이므로 구하는 정수 k의 개수는
2, 3, 4, …, 12의 11이다.

15. 수학 외적 문제 해결 능력 – 순열과 조합 정답 ①

남학생 4명 중 마주보고 앉는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$
이 두 명이 마주보고 앉는 경우의 수는 1
남은 남학생 중 한 명이 나머지 4개의 의자 중 하나에 앉는 경우의 수는 4
마지막에 남은 남학생이 남은 3개의 의자 중에 남학생끼리 마주보지 않도록 의자에 앉는 경우의 수는 2
나머지 2개의 의자에 여학생 2명이 앉는 경우의 수는 2!
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times1\times4\times2\times2!=96$

16. 이해 능력 – 수열 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
만약 $d=0$이라면 모든 자연수 n에 대하여
$a_n=1$이 되어 주어진 등식이 성립하지 않으므로
$d\neq 0$이다.
등차수열의 정의에 의하여 $a_{k+1}-a_k=d$이므로

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$a_1=1$, $a_{21}=1+20d$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{20}}-\frac{1}{a_{21}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{21}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{1+20d}\right)=\frac{20d}{d(1+20d)}$$
$$=\frac{20}{1+20d}$$

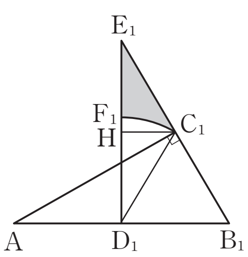
$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=5$에서

$\frac{20}{1+20d}=5$, $100d=15$

$d=\frac{3}{20}$이므로 $a_{11}=1+10\times\frac{3}{20}=\frac{5}{2}$

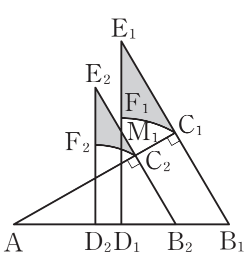
17. 가형 16번과 동일 정답 ③

18. 발견적 추론 능력(추측) – 수열의 극한 정답 ②



점 C_1에서 선분 E_1D_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{C_1D_1}=1$,
$\angle HD_1C_1=30^\circ$이므로
$\overline{HC_1}=\frac{1}{2}$
따라서
$S_1=$(삼각형 $E_1D_1C_1$의 넓이)
$-$(부채꼴 $F_1D_1C_1$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-\pi\times1^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}$$



선분 E_1D_1의 중점을 M_1이라 하자.
$\overline{M_1D_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\angle M_1B_2D_1=60^\circ$이므로
$\overline{D_1B_2}=\frac{1}{2}$
따라서 $\overline{AB_2}=\frac{3}{2}$이므로

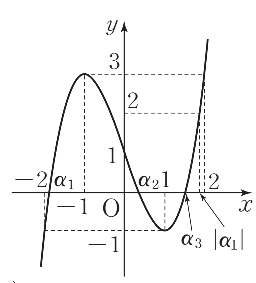
$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=2:\frac{3}{2}=4:3$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 두 삼각형
AB_nC_n, $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $4:3$이다.
즉, 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이는
그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의
$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{21}$$

19. 가형 19번과 동일 정답 ④

20. 연역적 추론 능력(증명) – 다항함수의 미분법 정답 ③

$f(x)=x^3-3x+1$에서
$f'(x)=3x^2-3$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$
또는 $x=1$
따라서 함수
$y=f(x)$의 그래프는
그림과 같다.



ㄱ. (참) $f(|\alpha_1|)=f(-\alpha_1)$
$=-\alpha_1^3+3\alpha_1+1$
$=2-(\alpha_1^3-3\alpha_1+1)$
$=2-f(\alpha_1)=2$
따라서 $\alpha_3<|\alpha_1|$이 성립한다.

ㄴ. (참) $f(g(\alpha))=\{g(\alpha)\}^3-3g(\alpha)+1$
$=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$
$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$
$=(\alpha^3-3\alpha)^2-1$
$=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$
$=f(\alpha)(\alpha^3-3\alpha-1)=0$

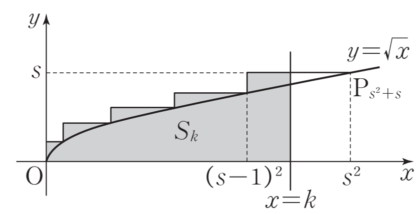
ㄷ. (거짓) ㄴ에서 α가 방정식 $f(x)=0$의 근이면
$g(\alpha)$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
따라서 $g(\alpha_1)$, $g(\alpha_2)$, $g(\alpha_3)$은 방정식
$f(x)=0$의 서로 다른 세 실근이다.
ㄱ에서 $0<\alpha_2<\alpha_3<|\alpha_1|$이고, $x>0$일 때,
함수 $g(x)=x^2-2$는 증가함수이므로
$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(|\alpha_1|)=g(\alpha_1)$
따라서 $g(\alpha_2)=\alpha_1$, $g(\alpha_3)=\alpha_2$,
$g(\alpha_1)=\alpha_3$이므로

$$\frac{g(\alpha_1)}{\alpha_3}+\frac{g(\alpha_2)}{\alpha_1}+\frac{g(\alpha_3)}{\alpha_2}$$
$$=1+1+1=3$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. 발견적 추론 능력(추측) – 수열 정답 ②

문제의 조건에 의하여 점 P_n의 좌표가 $(a,\ b)$이면
$n=a+b$이다.
$b_1>\sqrt{a_1}$이므로 P_2의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
$b_2\leq\sqrt{a_2}$이므로 P_3의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.
$b_3>\sqrt{a_3}$이므로 P_4의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.
$b_4>\sqrt{a_4}$이므로 P_5의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.
$b_5>\sqrt{a_5}$이므로 P_6의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.
$b_6\leq\sqrt{a_6}$이므로 P_7의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.
⋮
즉 자연수 s에 대하여 점 P_{s^2+s}의 좌표는
$(s^2,\ s)$이므로 $P_{12}(9,\ 3)$, $P_{20}(16,\ 4)$,
$P_{30}(25,\ 5)$, $P_{42}(36,\ 6)$, $\cdots$이다.



자연수 $s(1\leq s\leq 9)$에 대하여 직선 $x=s^2$과 x축
및 100개의 선분 OP_1, P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$, $P_{99}P_{100}$
으로 이루어진 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이
S_{s^2}은

$$S_{s^2}=s^2\times s-\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(s-1)^2\}$$
$$=s^3-\frac{(s-1)s(2s-1)}{6}=\frac{s(4s-1)(s+1)}{6}$$

$S_{25}=\frac{5\times6\times19}{6}=95$이므로
$S_{24}=95-5=90$, $S_{23}=95-5\times2=85$
이고, 11 이하의 자연수 m에 대하여
$S_{25+m}=S_{25}+6m=6m+95$
가 성립한다.
$6m+95\leq150$에서 $6m\leq55$, $m\leq\frac{55}{6}=9.\times\times\times$
이므로 부등식 $90\leq S_k\leq150$을 만족시키는 자연수
k의 개수는 24, 25, 26, $\cdots$, 34의 11이다.

22. 가형 22번과 동일 정답 91

23. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 49

$f(x)=x^4+3x^2+5x$에서
$f'(x)=4x^3+6x+5$
따라서
$f'(2)=4\times2^3+6\times2+5$
$=32+12+5$
$=49$

24. 이해 능력 - 지수와 로그 정답 10

$\log x\sqrt{x}=\log x^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log x=0.3$

이므로

$\log x=\frac{2}{3}\times 0.3=0.2$

따라서

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{x}} 2+\log_x 25&=\log_{x^{\frac{1}{2}}} 2+\log_x 5^2\\&=2\log_x 2+\log_x 5^2\\&=\log_x(2^2\times 5^2)\\&=2\log_x 10\\&=\frac{2}{\log x}\\&=\frac{2}{0.2}\\&=10\end{aligned}$$

25. 이해 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 990

$f(1)=0,\ f(-1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x+1)(ax+b)$

($a\neq 0$, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

(가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(ax+b)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}(ax+b)=a+b=1 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)(ax+b)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to -1}(ax+b)\\&=-a+b=-1 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=0$

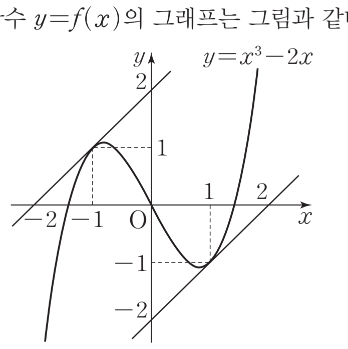
따라서 $f(x)=x(x^2-1)$이므로 $f(10)=990$

26. 발견적 추론 능력(추측) - 다항함수의 미분법 정답 4

$f'(x)=3x^2-2$에서 $f'(-1)=1$

$f'(x)=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(1,\ -1)$이 점 $(-1,\ 1)$의 위치에 오도록 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 $y=f(x)\,(x\geq 1)$의 그래프가 평행이동하면 된다.

즉, $x\geq -1$일 때 $g(x)=f(x+2)+2$이다.

따라서 $p=2,\ q=2$이므로 $p+q=4$

27. 수학 외적 문제 해결 능력 - 집합과 명제 정답 15

50명의 학생 전체의 집합을 U, 여자 아이스하키 경기를 관람한 학생 전체의 집합을 A, 컬링 경기를 관람한 학생 전체의 집합을 B라 하자.

$n(U)=50,\ n(A)=35,\ n(B)=29$이므로

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=35+29-n(A\cap B)\end{aligned}$$

이고

$n(A\cup B)\leq n(U)=50$이므로

$64-n(A\cap B)\leq 50$

$n(A\cap B)\geq 64-50=14 \quad\cdots\cdots ㉠$

또, $n(A\cap B)\leq n(A)=35$,

$n(A\cap B)\leq n(B)=29$이므로

$n(A\cap B)\leq 29 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$14\leq n(A\cap B)\leq 29$

따라서 $M=29,\ m=14$이므로

$M-m=29-14=15$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률 정답 59

상자에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_{29}C_2$

$\log_a b$가 자연수인 경우의 수는

(i) $\log_a b=2$일 때,
$b=a^2$에서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2^2),\ (3,\ 3^2),\ (4,\ 4^2),\ (5,\ 5^2)$의 4개

(ii) $\log_a b=3$일 때,
$b=a^3$에서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2^3),\ (3,\ 3^3)$의 2개

(iii) $\log_a b=4$일 때,
$b=a^4$에서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2^4)$의 1개

(iv) $\log_a b\geq 5$일 때,
순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$\frac{4+2+1}{{}_{29}C_2}=\frac{7}{\frac{29\times 28}{2\times 1}}=\frac{1}{58}$$

따라서 $p=58,\ q=1$이므로 $p+q=59$

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 순열과 조합 정답 28

조건 (가)에 의하여

$1\leq f(5)\leq f(3)\leq f(1)\leq 6$

조건 (나)에 의하여

$1\leq f(2)<f(4)<f(6)\leq 6$

조건 (다)에 의하여

$f(1)<f(2)$

이므로

$1\leq f(5)\leq f(3)\leq f(1)<f(2)<f(4)<f(6)\leq 6$

이 성립하고 $f(1)\leq 3$이다.

(i) $f(1)=1$일 때,
$f(5)=f(3)=f(1)=1$
이고, $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$이므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $1\times 10=10$

(ii) $f(1)=2$일 때,
$f(3),\ f(5)$의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2=3$이고, $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$이므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $3\times 4=12$

(iii) $f(1)=3$일 때,
$f(3),\ f(5)$의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이고, $f(2),\ f(4),\ f(6)$의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$이므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $6\times 1=6$

위의 (i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $10+12+6=28$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 341

$2<x\leq 4$일 때,

$$f(x)=-\frac{1}{2\times 3}(x-2)(x-4)+\frac{1}{1\times 2}$$

$4<x\leq 6$일 때,

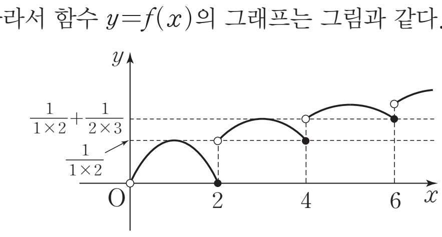
$$f(x)=-\frac{1}{3\times 4}(x-4)(x-6)+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}$$

$6<x\leq 8$일 때,

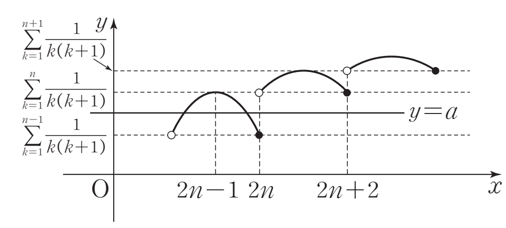
$$f(x)=-\frac{1}{4\times 5}(x-6)(x-8)+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}$$

⋮

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0<x<100$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 실수 x의 개수는 49이다. 함수 $|f(x)-a|$가 불연속인 실수 x의 개수가 48이려면 실수 a는 그림과 같이 어떤 자연수 n에 대하여 $2a=f(2n)+\lim_{x\to 2n+}f(x)$를 만족시킨다.



이때 방정식 $f(x)-a=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\frac{\alpha+\beta}{2}=2n-1$이 성립한다.

$2(2n-1)=34$에서 $n=9$이므로

$$\begin{aligned}2a&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{161}{90}\end{aligned}$$

$a=\frac{161}{180}$

따라서 $p=180,\ q=161$이므로

$p+q=341$