30. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 $t \leq x \leq t+3$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4tx+10t$의 최댓값과 최솟값의 합을 $g(t)$라 하자. t에 대한 방정식 $g(t)=-4t+a$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $p<a<q$이다. $4p+7q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 상수이다.) [4점]

범위 $\alpha \leq x \leq \beta$에서 함수 $f(x)$의 최대 최소 극값과 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에 있음 ※ 극값 : 2차 함수의 꼭지점처럼 감소→증가 또는 증가→감소될 때의 값

$f(x)=x^2-4tx+10t=(x-2t)^2-4t^2+10t$

$\Rightarrow$ 극값 $x=2t$일 때, $-4t^2+10t$

$f(t)=(t-2t)^2-4t^2+10t=-3t^2+10t$

$f(t+3)=(t+3-2t)^2-4t^2+10t=-3t^2+4t+9$

$t \geq 0$이므로 $2t \geq t$

I. $t \leq 2t \leq t+3$일 때 $\Rightarrow$ $0 \leq t \leq 3$

범위 내에 극값이 존재

최소=극값이므로 최소값은 $-4t^2+10t$

$f(t)-f(t+3)=6t-9$

$\Rightarrow$ $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$일 때는 $f(t+3) \geq f(t)$이고,

$\frac{3}{2} \leq t \leq 3$일 때 $f(t) \geq f(t+3)$임

즉, 최대는 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$일 때는 $-3t^2+4t+9$이고,

$\frac{3}{2} \leq t \leq 3$일 때는 $-3t^2+10t$임

정리하면, $g(t)=\begin{cases} -7t^2+14t+9 & \left[0 \leq t \leq \frac{3}{2}\right] \\ -7t^2+20t & \left[\frac{3}{2} \leq t \leq 3\right] \end{cases}$

II. $2t \geq t+3$일 때 $\Rightarrow$ $t \geq 3$

꼭지점이 $t+3$보다 크므로, $t \leq x \leq t+3$에서 $f(x)$는 감소

최소 $f(t+3)=-3t^2+4t+9$, 최대 $f(t)=-3t^2+10t$

$\Rightarrow$ $g(t)=-6t^2+14t+9$

정리하면, $g(t)=\begin{cases} -7t^2+14t+9 & \left[0 \leq t \leq \frac{3}{2}\right] \\ -7t^2+20t & \left[\frac{3}{2} \leq t \leq 3\right] \\ -6t^2+14t+9 & [t \geq 3] \end{cases}$

$g(t)=-4t+a$가 4개의 근

$\Rightarrow$ $y=g(t)$와 $y=-4t+a$의 그래프의 교점이 4개

$y=g(t)$의 그래프를 그리기 위해,

$g(0)=9$, $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{57}{4}$, $g(3)=-3$

$0 \leq t \leq \frac{3}{2}$에서 꼭지점

$-7t^2+14t+9=-7(t-1)^2+16$ $\Rightarrow$ $(1,\ 16)$

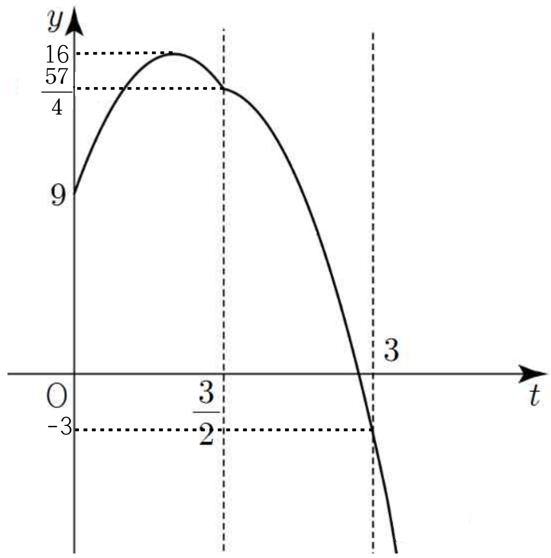
$\frac{3}{2} \leq t \leq 3$에서 꼭지점

$-7t^2+20t=-7\left(t-\frac{10}{7}\right)^2+\frac{100}{7}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{10}{7},\ \frac{100}{7}\right)$

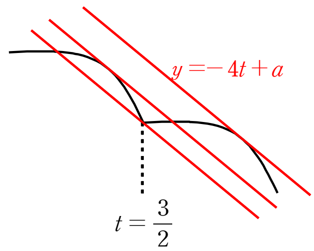
$t \geq 3$에서 꼭지점

$-6t^2+14t+9=-6\left(t-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{103}{6}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{7}{6},\ \frac{103}{6}\right)$

그래프를 그리면,



그래프와 $y=-4t+a$의 교점이 4개가 있으려면, 직선이 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{57}{4}\right)$을 지나는 직선보다 위에 있어야 하고, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$와 $\frac{3}{2} \leq t \leq 3$에서 $y=g(t)$의 두 접선 중 y절편이 작은 것보다 아래 있어야 함. 또한 $t \geq 3$에서 2차함수가 1차함수보다 더 빠르게 감소하므로, 교점이 4개일 때 $t \geq 3$에서는 만나지 않음



직선이 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{57}{4}\right)$을 지날 때,

$\frac{57}{4}=-4\times\frac{3}{2}+a$ $\Rightarrow$ $a=\frac{81}{4}$, 즉 $p=\frac{81}{4}$

$g(t)=-4t+a$에서, $g(t)+4a-a=0$

$0 \leq t \leq \frac{3}{2}$에서 $-7t^2+18t+(9-a)=0$

접하는 지점 $D_1=9^2-7(9-a)=0$ $\Rightarrow$ $a=\frac{144}{7}$

$\frac{3}{2} \leq t \leq 3$에서 $-7t^2+24t-a=0$

접하는 지점 $D_2=12^2-7a=0$ $\Rightarrow$ $a=\frac{144}{7}$

D_1과 D_2에서 a는 같음. 즉 $q=\frac{144}{7}$

$\therefore$ $4p+7q=81+144=225$