

5개의 물건을 3개의 상자에 담는 경우

- 물건이 구분 가능하면 물건○, 가능하지 않으면 물건×
- 상자가 구분 가능하면 상자○, 가능하지 않다면 상자×
- 빈 상자를 허용하면 빈○, 허용하지 않으면 빈×

① 물건×, 상자×, 빈○ ⇒ 분할

(5, 0, 0), (4, 1, 0), (3, 2, 0), (3, 1, 1), (2, 2, 1) : 5가지

② 물건×, 상자×, 빈×

①에서 (3, 1, 1), (2, 2, 1) : 2가지

③ 물건×, 상자○, 빈○ ⇒ 중복 조합

3개의 상자에 5개의 물건을 넣는 것

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

④ 물건×, 상자○, 빈× ⇒ 조건있는 중복 조합

물건×이므로, 물건을 상자에 각각 1개씩을 넣고 나머지를 중복조합

$$\text{즉 } {}_3H_{5-3} = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

⑤ 물건○, 상자×, 빈○ ⇒ 분할

동일한 상자에 물건을 나누어 넣는 경우이므로,

$$(5, 0, 0)\text{인 경우} : {}_5C_5 = 1$$

$$(4, 1, 0)\text{인 경우} : {}_5C_4 \times {}_1C_1 = 5$$

$$(3, 2, 0)\text{인 경우} : {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 10$$

$$(3, 1, 1)\text{인 경우} : {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

※ 2!로 나누는 것은 1개씩 들어가는 상자가 구분이 안되어 중복되기 때문임

$$(2, 2, 1)\text{인 경우} : {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

$$\text{따라서 } 1 + 5 + 10 + 10 + 15 = 41$$

⑥ 물건○, 상자×, 빈○

⑤에서 (3, 1, 1), (2, 2, 1)인 경우에 해당하므로, $10 + 15 = 25$

⑦ 물건○, 상자○, 빈○ ⇒ 중복 순열

$$3\text{개의 상자에 5개를 중복해서 넣는 것} \Rightarrow {}_3H_5 = 3^5 = 243$$

⑧ 물건○, 상자○, 빈× ⇒ 분할 후 분배

⑤에서처럼 분할한 후에 상자를 구분함

즉, 상자를 a, b, c라면, abc, acb, bac, bca, cab, cba가 모두 다름 ($3! = 6$)

$$(3, 1, 1)\text{인 경우} : {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 60$$

$$(2, 2, 1)\text{인 경우} : {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$$

$$\text{따라서 } 60 + 90 = 150$$

※ $\{a, b, c, d, e\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 인 함수가 공역과 치역이 같은 함수의 개수 문제가 이 경우