통 계

김 정 현

-개념정리-

확률변수와 확률분포

Ⅰ. 확률변수

어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수가 대응되는 함수

확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 P(X=x) 와 같이 나타낸다.

Ⅱ. 이산확률변수

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X

이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이고, X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 일 때, 이들 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라 한다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

Ⅲ. 확률질량함수

이산확률변수 X의 확률분포를 나타내는 함수

$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$

① $0 \le p_i \le 1$

② $p_1+p_2+p_3+\cdots p_n=1$

③ $P(x_i \le X \le x_j)=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$ (단, $j=1,2,3,\cdots,n$ 이고 $i \le j$)

[예제1] 확률질량함수의 성질

확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x)=\frac{x}{k}$ $(x=1,2,3,4,5)$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

확률변수 X의 확률분포

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	$\frac{5}{k}$	1

확률의 총합은 1 이므로

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$$

$$\frac{15}{k}=1$$

$$\boxed{\therefore k=15}$$

[예제2] 확률분포와 확률

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임으로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1)X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내시오.

(2)흰 공이 1개 이상 나올 확률을 구하시오.

(1)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{21}$	1

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}$ $P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}$ $P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}$

(2) $P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{12}{21}+\frac{3}{21}=\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{21}_{7}}=\frac{5}{7}$

이산확률변수의 기댓값과 표준편차

Ⅰ. 이산확률변수 X의 평균

이산확률변수 X의 확률분포가
오른쪽 표와 같을 때

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

E(X) 기댓값, 평균

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n$

Ⅱ. 이산확률 변수 X의 분산과 표준편차

*분산: $(X-m)^2$의 기댓값 $V(X)=E((X-m)^2)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

*표준편차: 분산 V(X)의 양의 제곱근 $\sqrt{V(X)}=\sigma(X)$

[예제3] 확률변수의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X의 확률분포가
오른쪽 표와 같을 때,
X의 평균, 분산, 표준편차를 구하시오.

X	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{10}+0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{2}{10}+2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$

$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{10}+0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{2}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}-\{E(X)\}^2$

$=\frac{250}{100}-\frac{81}{100}=\frac{169}{100}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{13}{10}$

끝맺음

[문제1] 이산확률변수 X에 대하여 $\{E(X)\}^2=a$, $E(X^2)=20$, $\sigma(X)=4$ 일 때, 상수 a의 값은? $(a>0)$

[문제2] 1학년 3명과 2학년 4명으로 구성된 바둑반에서 임으로 2명을 선발하여 바둑대회에 출전시키려고 한다. 선발되는 1학년 학생 수를 확률변수 X라 할 때, $E(14x+5)$ 의 값은? (수능특강 79쪽 7번)

$\rightarrow 14E(X)+5$

[문제3] 이산확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i$ ($i= 1,2,\cdots,n$) 이 다음 조건을 만족시킬 때, $E(X^2)$의 값을 구하시오. (단 $m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$) (수능특강 80쪽 3번)

(가) $\sum_{i=1}^{n} (10x_i+10)p_i = 50$

(나) $\sum_{i=1}^{n} (2x_i-m)^2 p_i = 100$

-답 지-

[문제 1]

$\sigma(X)=4 \qquad V(X)=16$

$V(X)= E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$16 = 20-a^2$

$a^2=4 \quad (a>0)$

$\therefore \boxed{a=2}$

[문제 2]

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{21}$	1
	$=\frac{2}{7}$	$=\frac{4}{7}$	$=\frac{1}{7}$	

$P(X=x)=\dfrac{{}_3C_x \times {}_4C_{2-x}}{{}_7C_2} \quad (x=0,1,2)$

$E(X)= 0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

$14E(X)+5= \cancel{14}^{2}\times\frac{6}{\cancel{7}}+5=\boxed{17}$

[문제 3]

$\sum_{i=1}^{n}(10x_i+10)p_i = \sum_{i=1}^{n}10x_ip_i+\sum_{i=1}^{n}10p_i$

$50 = 10E(X)+10$

$40 = 10E(X)$

$E(X)=4$

$\sum_{i=1}^{n}(2x_i-m)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(4x_i^2-4mx_i+m^2)p_i$

$=4\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-4m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$

$=4E(X^2)-4E(X)\cdot E(X)+m^2$

$=4E(X^2)-4\{E(X)\}^2+\{E(X)\}^2$

$100 \quad =4E(X^2)-3\{E(X)\}^2$

$=4E(X^2)-3\cdot16$

$\frac{\cancel{148}^{37}}{\cancel{4}} = E(X^2)$

$\therefore \boxed{E(X^2)=37}$