석사학위논문

사 원 수 군 과 그 응 용

Quaternion group and Application

2006년 12월

韓南大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

禹 成 植

사 원 수 균 과　그　응 용

지도교수 최 은 미

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함.

2006년 12월

韓南大學校 敎育大學院

數 學 敎 育　專 攻

禹　成　植

禹 成 植의 석사학위논문을 인준함.

심사위원장 인

심사위원 인

심사위원 인

2006년 12월

韓南大學校 敎育大學院

국 문 요 약

사 원 수 군 과 그 응 용

우 성 식

한남대학교 교육대학원 수학교육 전공
(지도교수 최 은 미)

본 교육대학원 석사 논문에서는 해밀턴이 고안한 사원수와 그로 인해 만들어지는 사원수 군을 연구하였다.

사원수는 현대에 와서 사원수의 발생단계에서 전혀 예측되지 않은 부분에 응용되어 물리학에서부터 3차원 컴퓨터 게임의 캐릭터 동작제어, 인공위성 자세 제어 등, 자세의 회전을 효율적으로 표현하는데 큰 역할을 하고 있다. 이러한 부분을 연구하여 중・고등학교 현장에서 학생들에게 수학의 응용면을 강조하고, 학생들에게 흥미와 재미를 주는 지도 자료를 만드는 것이 목적이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다.

2장에서는 복소수의 발생 배경과 복소수로부터 사원수로의 수의 확장이 어떻게 이루어졌는지 살펴보고, 사원수의 발생배경을 알아본다.

3장에서는 중・고등학교 과정에서 나오는 복소수와 벡터를 살펴보고, 사원수의 정의와 성질들을 연구하였다. 그리고 사원수가 군의 성질을 갖고 이와 같은 구조를 갖는 동형이 되는 군과 환을 찾아보았다.

4장에서는 사원수의 응용이 필요한 이유가 되는 회전 변환에 대한 여러가지 변환과 사원수 변환과 그에 따른 응용의 장점에 대해 연구했다.

5장에서는 사원수를 통한 고등학교 과정에서의 복소수와 벡터의 지도방안과 연구 결과 및 적용방안에 대하여 연구하였다.

목　　　　차

제1장 서론

(1) 연구의 필요성

1545년 이탈리아 수학자 카르다노(Cardano, Girolamo, 1501～1576, 이탈리아)와 1700년 중반 스위스의 수학자 레온하르트 오일러(Euler, Leonhard, 1707～1783, 스위스)를 거쳐 1800년 초 독일의 가우스(Gauss, Karl Friedrich, 1777～1855, 독일)에, 수학의 새로운 대상물인 복소수는 그 이름을 얻게 되며 많은 연구가 이루어졌다. 복소수를 통해 수학의 새로운 장이 열렸으나, 그 개념을 한 단계 더 발전시켜 윌리엄 해밀턴(Hamilton, Sir William Rowan, 1805～1865, 영국)은 1843년 사원수(Quaternion)를 고안해 낸다. 복소수계를 포함하는 통상적인 대수계는 사칙연산에 의해 교환, 결합, 분배법칙 등이 성립되어, 1843년 이전까지는 앞서 말한 법칙들이 적용되지 않는 다른 어떤 대수체계도 상상할 수 없다고 믿었다. 그러나 해밀턴은 복소수가 2차원 평면에 대응된다는 것에 착안하여 3차원 공간에 대응되는 복소수와 유사한 수가 존재할 수 있으리라고 추측했다.

본 교육대학원 석사 논문에서는 해밀턴이 고안한 사원수와 그로 인해 만들어지는 사원수 군을 연구하여, 그 성질과 역사적 배경을 알아보았다. 현대에 와서는, 사원수의 발생단계에서는 전혀 예측되지 않은 부분에 응용이 되어, 물리학에서부터 3차원 컴퓨터 게임의 캐릭터 동작제어, 인공위성 자세 제어 등, 자세의 회전을 효율적으로 표현하는데 큰 역할을 하고 있는데, 이러한 부분을 연구하여 중·고등학교 현장에서 학생들에게 수학의 응용 면을 강조하는데 이러한 사실들을 연구하여 학생들을 지도할 때 보다 흥미롭고 유용한 내용을 제시할 수 있으리라 기대한다. 또한 지루하고 따분하고 어렵기만 한 수학을 왜 배우는지 모르는 학생들과 수학을 배워서 어느 분야에서

또는 어떻게 응용되고 있는지 정확히 모르는 학생들에게 좀 더 구체적이고 현실적인 방향을 제시할 수 있으리라 기대한다.

(2) 연구 내용 및 방법

본 논문의 연구는 1843년 해밀턴에 의해 발견된 새로운 체의 형태의 사원수를 통해 수학의 응용 방향과 수학의 중요성을 밝힘으로서 지루하고 따분한 수학을 학생들이 왜 배우고 또한 어떤 분야에서 응용되고 활용되는지를 알게 함으로서 좀 더 수학이란 학문에 관심과 흥미를 갖게 하는 목적이 있다.

구체적인 연구 내용 및 방법은 다음과 같다.

첫째, 해밀턴의 생애와 사원수의 발생 배경을 알아봄으로서 역사적으로 사원수가 어떤 의미를 갖고 있는지 연구했다.

둘째, 사원수의 정의와 정리들을 통해 사원수의 응용에 필요한 내용을 알아보았다.

셋째, 사원수를 통한 응용 분야와 응용에 활용되는 구체적인 예를 제시했다.

넷째, 사원수를 응용함으로서 얻는 장점에 대해 직접 프로그램을 통해 알아보았다.

(3) 연구의 제한점

이 논문의 주요 사항인 사원수는 내용이 좋은 것임에도 불구하고 고등학교 학생들에게 적용시키는 점은 다소 어려움이 많다. 즉, 학생들은 아직 사원수의 개념을 이해하기에는 충분한 기초 지식을 배우지 못하였고, 교과 과정상에서 나오지 않는 부분이므로 학생들이 이해하기는 쉽지 않다. 그리고 복소평면의 삼차원 공간으로의 확장인 사원수는 $a+bi+cj$(단, 1, i, j는 서로 수직) 형태의 세 원소와 수직이 되는 새로운 "상징적 기호" k가 필요한데 이것은 아직 수의 확장

체계를 자세히 알지 못하는 학생들에게는 다소 어려운 부분이다. 그러므로 이 논문은 다음과 같은 제한 내에서 진행했다.

다시 말해 사원수의 수학적 혹은 그 응용적인 내용을 고등학교 학생들에게 교수하는 방안을 마련하는 것 보다는, 고등학교 과정에서 복소수 부분을 강의하는 교사들이 복소수의 연장선에서 사원수의 내용을 미리 숙지하는 것이 바람직하며, 이를 통해 학생들에게 사원수의 개념과 그의 응용을 간단히 소개할 수 있는 방안을 마련하였다.

(4) 기대되는 효과

이 논문을 통해 기대되는 효과는 사원수라는 새로운 수의 체계를 학생들에게 소개함으로서 이전까지 배웠던 수학의 수 체계의 확장이 벡터에서 복소수로 복소수에서 사원수로 어떻게 확장되었는지 알 수 있을 것이다. 이를 통해 사원수의 응용과 구체적인 활용사례를 통해 지루하고 따분하고 어렵기만 한 수학을 왜 배우는지 학생들에게 좀 더 구체적이고 현실적인 방향을 제시할 수 있을 것이다. 또한 다른 학문에 응용되는 수학으로서의 중요성과 학생들의 관심이 점점 커지고 있는 게임이라는 분야에서 수학이 얼마나 많은 부분에서 중요하게 응용되고 활용되는지 알게 함으로서 앞으로 학생들의 장래 직업에 대한 방안을 제시 할 수 있을 것이다. 그리고 마지막으로 고등학교 현직 교사들에게 복소수의 연장선에서 이 논문에 대한 내용을 소개함으로서 학생들에게 벡터와 복소수에 대한 지도 방안을 제시 할 수 있으며 수업에 대한 기대와 흥미를 유도 할 수 있는 좋은 자료가 될 것이다.

따라서 학생들에게는 수학교육의 필요성과 흥미 그리고 장래에 대한 좋은 길잡이가 될 수 있고 현직 교사에게는 학생들의 수업에 좋은 자료로 사용함으로서 학생들에게 수학교육의 필요성을 일깨울 수 있을 것으로 기대한다.

제2장 사원수의 역사적 발생

사원수의 기원은 우리가 고등학교 10-가 공통수학에서 배우는 복소수로부터 비롯되며, 2차원 평면으로 표현되는 복소수를 3차원 공간에서 표현되는 대상물로 확장시켜보려는 시도로부터 발생하였다. 따라서 이장에서는 사원수의 발생 배경이 되는 복소수의 개념과 복소수의 기초 배경이 된 벡터의 역사적 배경을 살펴봄으로써 복소수에서 사원수로의 개념이 어떻게 생겨나게 되었는지 알아본다.

(1) 복소수의 발생과 체계화 과정

§ 1. 벡터의 역사적 배경

벡터의 개념은 르네상스 시대에 천체의 운동과 관련해서 생긴 것으로 추정된다. 16세기에 들어와서 항해술이 발달하고, 대양에서 배의 위치나 기항지의 밀물과 썰물이 이는 시각을 정확히 알기 위해서는 그 시각에 있어서의 달이나 행성의 위치를 알 필요가 있었다. 또한 그들의 운동을 알기 위해서는 곡선의 방향, 다시 말하면 접선을 그을 필요가 생기가 되었다.

2개의 운동을 2개의 선분의 길이와 그 방향으로 표시하면 이 2개를 합성한 운동은 그 2개의 선분을 두 변으로 하는 평행사변형의 대각선의 방향으로 진행하게 된다는 벡터의 합성에 관한 법칙은 스테빈(Simon Stevin, 1548～1620, 네덜란드)과 갈릴레이(Galileo Galilei, 1564～1642, 이탈리아)등에 의해 발견되었다고 전해지고 있다. 그러나 힘의 합성의 법칙을 명확히 한 것은 뉴턴(Isaac Newton, 1642～1727, 영국)에 의해서다.

이후 곡선의 운동을 2갱의 방향으로 분해하고 그 접선의 방향을 정한 사람은 갈릴레이의 제자인 토리첼리(Torricelli, Evangelista,

1608～1647, 이탈리아)와 로버발(Roberval, 1602～1675, 프랑스) 두 사람이다.

그러나 방향과 크기를 가진 양으로서의 벡터의 발견은 18세기말 노르웨이의 측량기사 베셀(Caspar Wessel, 1745～1818, 노르웨이)에 의해서이다. 그는 1799년 처음으로 복소수를 방향을 가진 양으로서 인정하였다. 그리하여 이 생각은 그 후 반세기를 지나 해밀턴에 의해 3차원으로부터 고차원까지 확장되었다.

Vecter라는 단어는 carrior라는 뜻을 가진 라틴어의 vectum에서 유래된 것으로 해밀턴에 의해 처음 사용되었다. 물론 그 이전에도 앞에서 언급한 것처럼 많은 수학자들이 크기와 방향을 가진 양에 대한 개념을 사용해 왔지만 처음 벡터란 용어를 정의한 것은 해밀턴이다.

결국 벡에 대한 폭넓은 사용은 복소수의 탄생과 그 가시화를 위한 시도에서 나타났다. 1813년 프랑스의 수학자 아르강(Argand, Jean Robert, 1768～1822, 프랑스)과 그 후 수학자이자 물리학자인 가우스에 의해 복소수의 기하학적 표현으로 복소수를 평면에 유향선분[1]으로 표시하게 되었고, 2차원 벡터와 벡터대수가 소개되었다. 또한 역으로 벡터의 가감 계산을 복소수를 사용하여 행할 수도 있게 되었다. 실수로부터 확장되어온 복소수의 2차원적 설명은 해밀턴에게 다차원양 사원수에 대한 생각을 일깨워주었다. 사원수에 대한 발견은 곱셈에 대한 교환법칙을 만족하지 않는 새로운 수학이 가능함을 보여줌으로써 수학의 발전에 지대한 영향을 끼치게 되었다. 이처럼 사원수의 근간이 되는 벡터의 기초는 앞에서 언급한 것처럼 이루어졌으며 계속해서 물리학에 응용되고 깁스(J. W. Gibbs, 1839～1903, 미국)와 해비사이드(Heaviside, 1850～1925, 영국)등 물리학자들에 의해 완성되었다.

1) 유향선분 : 길이만이 아니라 방향도 가지고 있는 선분

§ 2. 복소수의 발생

16세기의 유럽 수학자들, 특히 이탈리아의 봄벨리(Rafael Bombelli, 1526∼1572, 이탈리아)는 대수문제의 풀이에서 음수가 제곱근을 가진다는 가정이 종종 유용하다는 사실을 인식하기 시작했다. 이렇게 대수문제의 풀이에 음수가 제곱근을 가진다는 가정의 인식에서 출발하여 복소수가 처음 발견되고 그 이후 450여 년이 흘렀다. 이미 알고 있는 것처럼, 복소수라는 용어는 $a+bi$꼴의 수를 뜻한다. 여기서 a,b는 실수이고, i는 보통 실수와는 달리 $i^2=-1$의 성질을 갖는 수이다.

복소수의 발견은 궁극적으로 수학 전반에 커다란 충격을 가져다주었다. 그 이전에는 전혀 다른 학문이라 생각되었던 것들을 통합하고, 설명할 수 없다고 생각되었던 것들을 설명할 수 있게 되었다. 이러한 결과—현재까지도 일어나고 있다—들에도 불고하고, 복소수에 대한 발견의 초기에는 발전 속도가 매우 느렸다. 사실, 19세기의 복소수의 발전에 비하며, 처음 250년 동안은 거의 아무것도 이루어지지 않았다.

수학사에서 천재들이라 불리는 가우스와 데카르트, 페르마, 라이프니츠가 이 세상에 왔다 가는 긴 세월동안 복소수는 받아들여지지 않았고 받아들여지기는커녕 처음부터 의심을 받고, 기존의 정리에 혼돈을 가져옴은 물론 심지어 복소수에 대한 적개심까지 야기했기 때문이다.

처음으로 복소수를 인정한 논문으로는 카르다노의 위대한 계산법 ‘Ars Magna (1545)’이라는 논문에 관습적으로 인정한다. 그러나 그 논문에서 카르다노조차도 복소수를 “필요 없는 것만큼 이상한 수(subtle as they are useless)”라고 간단히 소개하였다. 앞으로 다루겠지만, 복소수에 대한 첫 번째 실제적인 계산은 봄벨리가 그의 논문 L′Algebre(1572)에서 한 것이다. 그러나 여기에서도 복소수의 혁신

자 봄벨리는 '모든 문제는 진실보다 궤변에 의존하는 것 같다'고 말하면서 그의 발견을 자신의 것으로 주장하지 않았다. 1702년 라이프니츠(Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 1646~1716, 독일)는 i를 "존재와 비존재 사이의 양서류"라고 묘사하였다. 그러한 감정들이 그 시대의 용어법에 반영이 되었다. 당시에 복소수는 '불가능한 것' 또는 '허상인 것(imaginary)'이라고 불릴 정도였다. 후자의 경우가 현재까지 이어지고 있는 것이다. 1770년에도 여전히 복소수는 매우 당황스러운 존재여서 심지어는 위대한 수학자 오일러조차도 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ 이라고 주장 할 정도였다. (실제로는 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$ 이다.)

이러한 모든 문제점들의 근본적인 원인은 심리학적인 또는 철학적인 장애로 보인다. '복소수란 무엇인가?'에 대한 답을 모르고 있었으므로, 누구도 열정과 확신을 가지고 그러한 문제를 연구 할 수가 없었다.

18세기 막바지에 와서야 이 문제에 대한 만족할 만한 답이 나왔다. 서로 독립적으로, 연달아, 베셀, 아르강, 가우스 모두 복소수는 평면위의 점(또는 벡터)으로서 기하학적으로 단순하고 구체적으로 나타낼 수 있다는 것을 알아냈다. 신비한 복소수 $a+bi$는 좌표 (a,b) 를 갖는 XY좌표평면 위의 전, 또는 원점과 그 점을 잇는 벡터로서 단순하게 보아야 한다는 것이다. 이러한 방식으로 생각하며, 논의되는 평면은 C로 나타내어지고, 복소평면(the complex plane)이라 불린다.

베셀과 아르강이 각각 복소수에 대한 기하학적 해석을 발표했을 당시엔 거의 눈길을 끌지 못했으나, 지금까지도 유명한 가우스의 명성에 의해 복소수가 평면 위의 점으로서 널리 보급되고 받아들여지게 되었다. 적어도 초기에는 복소수가 의미를 갖게 하는 몇 가지 방법이 존재한다는 사실은 아마도 복소수를 새로이 해석하는 것보다는 덜 중요해 보였을 것이다. 어쨌든, 복소수에 대한 새로운 발명의 출구는

열리기 직전이었다.

복소수라는 용어로 되기까지는 처음 복소수를 인식하고 250여 년이 걸렸지만, 복소수로써 미적분학을 하는 법에 대한 새로운 이론(복소 해석학)의 발달은 놀라울 정도로 빨랐다. 대부분의 기본적인 결과들은 1814년에서 1851년 사이에 코시(Cauchy, Baron Augustin Louis, 1789~1857, 프랑스), 리만(Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 1826~1866, 독일)과 다른 수학자들이 찾아냈다. 이는 40년도 안 되는 짧은 기간 동안 엄청난 발달이다.

§ 3. 복소수의 체계화 과정

복소수는 체를 형성한다. 그래서 이런 복소수의 개념이 아무리 이상하게 느껴지더라도, '정상적인' 산술을 제공한다는 사실이 밝혀진다. 사실, 복소수는 다른 어떠한 수 체계에서도 얻을 수 없는 엄청난 선물을 제공한다. 바로 복소수체에서 '모든' 다항 방정식의 근을 구할 수 있다. 즉 복소수 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 에 대해 다음 방정식의 근인 복소수 x가 존재한다.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

물론 방정식 $x^2 + 1 = 0$ 이 입증하듯이, 실수에서는 이런 성질이 성립하지 않는다.

위에서 언급한 결과를 '대수학의 기본 정리'라고 한다. 이 정리는 1629년 지라르(Girad, A. 1595~1632, 프랑스)가 처음으로 언급했으며, 1746년 달랑베르 (Jean Le Rond d'Alembert, 1717~1783, 프랑스)와 1749년 오일러가 각각 불완전하게 증명했다. 최초의 완벽한 증명은 1799년 가우스가 박사 학위 논문에서 제시했다. 가우스는 이결과에 대단히 감명 받았기 때문에, 그 뒤 이에 대한 또 다른 증명을 세 가지 더 찾아냈다.

대수학의 기본 정리는 복소수 체계가 매우 '훌륭한' 체계임을 보여주는 여러 가지 이유 중 하나에 불과하다. 다른 중요한 이유는, 복소수체가 강력한 미분학의 전개를 보조하고, 이에 따라 복소변수 함수론이라는 풍부한 이론을 낳게 한다는 사실이다.

그런데 복소수가 체를 형성하고 매우 유용하며 모든 수 체계가 순수하게 추상적이고 '상상의' 개념이라는 사실에도 불구하고, 많은 사람들은 여전히 복소수에 대해 어색하게 생각한다. 이것은 주로 친밀도의 문제이다. 예를 들면, 실수는 해석학자의 '현미경' 아래에서는 극도로 복잡한 수학적 대상으로 밝혀질 수 있다. 그러나 0 을 중심으로 '양방향으로 무한한' 직선인 '실직선' 에 의존한 알기 쉽고 간단한 그림이 있다.(그림1)

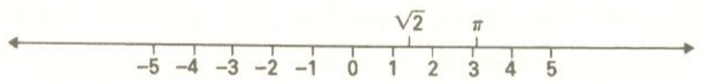


그림 1 실직선. 실수의 공리들은 이 직선이 한 개의 '구멍' 도 없이 연속이고, 단 한 점이 차지할 수 있는 한없이 작은 구멍마저도 갖지 않음을 보장한다(이런 점에서 '유리수 선' 은 $\sqrt{2}$ 에 '구멍' 이 있다).

앞에서도 언급했듯이 복소수에 대해서도 마찬가지로 알기 쉬운 그림이 있다는 사실은 희소식이다. 실수를 실직선 위의 점으로 생각할 수 있듯이, 이와 마찬가지로 복소수를 이차원 평면 위의 점과 동일시할 수 있다.(그림2)

이런 복소수의 가시화는 베셀이 처음으로 제안했는데, 그는 독학으로 공부한 노르웨이의 측량 기사로 1797년 이런 생각을 강의했다. 아르강과 가우스도 이와 같은 생각을 재발견했다. 아르강은 스위스의

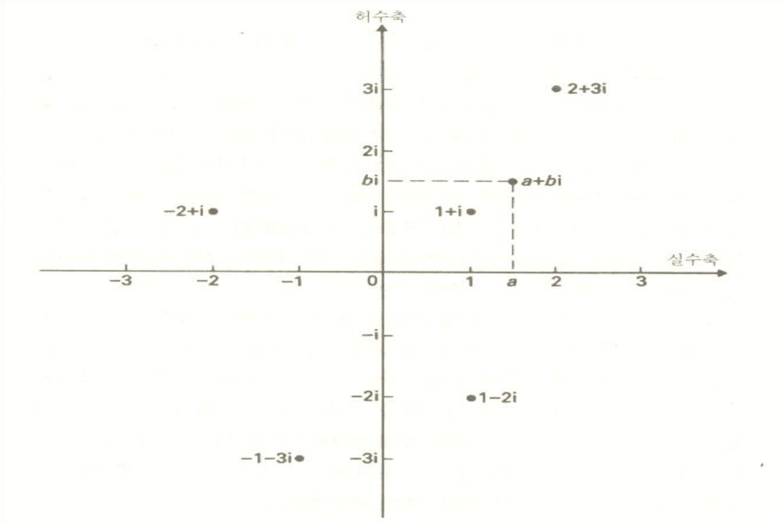


그림 2 복소 평면. 복소수 $a + bi$ 는 좌표 (a, b)를 가진 점과 동일시된다. 실수는 수평축, 순허수는 수직축을 따라 놓인다.

부기 계원이였는데, 1806년 이 주제에 관한 책을 출판했다. 아르강의 책은 초기에 가장 큰 영향을 끼쳤으며, 복소수를 표현하는 데 사용되는 이차원 평면으로서의 '복소 평면'을 종종 '아르강 표시'(Argang diagram)이라고 아직도 부르고 있다.

(2) 사원수의 창시자 해밀턴(W.R.Hamilton 1805~1865)

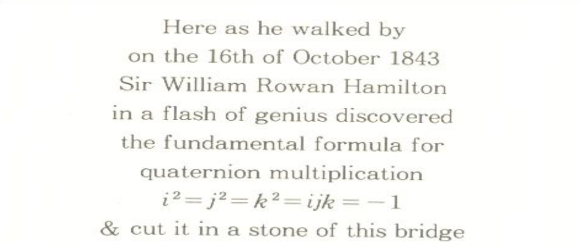
해밀턴은 아일랜드에서 지난 200년 이래 가장 칭송하는 수학자 중 한사람이다. 그것은 사원수의 발견 때문이었다. 대학 교수시절 해밀턴의 가장 큰 관심사는 복소수상의 대수학과 기하학 사이의 서로 어떤 가까운 관계가 있을까 하는 것에 있었다. 그것은 19 세기 시작해서 로버트, 아르강과 같은 많은 다른 수학자들에 의하여 연구되었다.

모든 물리학자들이 알고 있는 것처럼, 복소수 $z = x + yi$,(여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이다). 이것은 데카르트 평면에 점 (x,y)로 나타내어질 수 있었다. 또한, 평면에서의 어떠한 점은 복소수에 의해 표현이 가능했다. 이때 어떤 이동에 따른 결합이나, 로테이션 그리고 평면의 확대들이 $(az+b)$로 어떤 복소수 z를 보내는 표현이 가능했다. (이때 z복소수

이고, a와 b는 독립 상수들이다.)

복소수와 평면기하학 사이에 연결에 의하여 착안되었기 때문에, 해밀턴과 다른 사람들은 3차원 기하학과 같은 기능을 담당하는 것을 복소수상의 대수학에서 연구하려고 하였다. 그것은 그러한 대수학의 원소 형태가 (x,y,z)의 세 좌표축의 형태로 표현되는 것을 알았기에 자연스러운 것처럼 보였다. 13년 이상 해밀턴은 3차원 기하학에 관련해 복소수상의 대수학에서 만족스러운 세 좌표축을 만들려고 시도하였으나 실패했다. 하지만 그의 연구는 1843년 10월 16일에 Royal 아일랜드 아카데미의 회의에 참석하러 가는 길인 Dublin 근처의 Royal Canal 강변의 길을 따라 그의 아내 헬렌과 걷는 동안에 예기치 않은 상황에서 이루어졌다.

한 순간, 해밀턴은 세 좌표축의 대수학이 아니라 이른바 사원수들의 4차원 대수학이 적합한 대수학 이였음을 깨달았다. 그는 즉시 사원수의 확장에 관한 기본공식을 수첩에 적고 발견의 흥분에 Canal 강변의 다리중 하나에 기본 공식을 세기여 놓았다. 이장소를 기념하는 기념 돌은 오늘날까지 볼 수 있다.



브룸교 다리위에 세겨놓은 써 놓은 사원수의 정의

사원수는 $q=a+\vec{v}=a+bi+cj+dk$,의 형태를 갖는 4차원 복소수이다. 여기서 i,j 그리고 k는 모든 다른 -1의 제곱근들이다. 사원수는 실수로 된 스칼라 부분 a와 벡터 부분 $bi+cj+dk$로 구성되어 있음을 알 수 있다. 게다가, 벡터 부분은 3차원 공간에 2점들의 결합을 직선의 방향과 크기를 가지고 표현할 수 있다. 오늘날 사용하고 있는 많은

수학용어(스칼라와 벡터를 포함하여)는 해밀턴에 의해 사원수의 정리를 발견함으로서 소개되었다.

평가 관점에서, 사원수 대수학은 연속되는 로테이션의 병행효과를 계산하기 위해서도 행렬 대수보다는 더 능률적인 알고리즘을 생기게 한다. 때문에 결과적으로 사원수는 컴퓨터 게임이나 우주선 항해와 같은 분야에 보다 많이 적용되며 다양하게 적용되고 있다.

(3) 복소수에서 사원수의 개념으로

아일랜드의 수학자 해밀턴은 복소수를 평면 위의 점으로 표현하는 발상에 고무되어 실수의 순서쌍을 이용한 복소수의 대수적 해석을 전개했다. 그는 계속해서 복소평면과 유사한 3차원 공간의 가능성을 조사했다. 해밀턴이 발견한대로 이것이 불가능함이 밝혀졌지만, 4차원으로 진행하면 이른바 '초복소수'(hypercomplex number)라는 체계의 전개가 가능하다. 해밀턴이 자신의 새로운 수에 이름 붙인 '사원수'는 쉽게 발견되지 않았는데, 결정적인 돌파구를 찾기 위해서는 오랫동안의 고찰이 필요했다.

처음에 당시 수학자들은 복소수를 $a+bi$ 꼴로 이상하게 합성된 수로 간주했었다. 여기서 a,b 는 실수이고 i 는 $i^2=-1$ 을 만족시키는 실수가 아닌 어떤 종류의 것이다. 복소수들의 덧셈과 곱셈은 $a+bi$를 i에 관한 일차 다항식으로 다루고 i^2은 그것이 나타날 때마다 -1로 대치함으로써 이루어졌었다. 이 방법에 의해서, 덧셈은

정의 : $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

와 같고, 곱셈은 다음과 같이 시행한다.

정의 : $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

이 결과를 두 복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 정의로 택하면, 덧셈과 곱셈은 교환적이고 결합적이며, 덧셈에 관한 곱셈의 배분 법칙이 성립한다는 사실을 밝히기는 어렵지 않다.

그런데 복소수 $a+bi$는 두 실수 a와 b에 의해서 완전히 결정되기 때문에, 복소수를 실수의 순서쌍 (a,b)로 표현할 수 있다고 해밀턴은 생각하게 되었다. 그는 그와 같은 두 순서쌍 (a,b)와 (c,d)가 같기 위한 필요충분조건은 $a=c$와 $b=d$라고 정의했다. 해밀턴은 이와 같은 순서쌍에 대한 덧셈과 곱셈을 각각 다음과 같이 정의 했다.

정의 : $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$

$(a,b)(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

이 정의들과 함께 실수들이 통상적인 덧셈과 곱셈에 관한 교환 법칙과 결합 법칙을 만족시키고 덧셈에 관한 곱셈의 배분 법칙을 만족시킨다고 가정한다면, 실수의 순서쌍들에 대해서도 그와 같은 법칙이 성립한다는 사실을 보이는 것은 쉽다. 사실, 통상적인 덧셈과 곱셈에 관한 실수들이 체의 모든 공준을 만족시킨다고 가정하면, 해밀턴의 순서쌍들도 또한 그것의 덧셈과 곱셈에 관해서 체의 모든 공준을 만족시킨다는 사실을 보일 수 있다.

실수체계는 복소수체계에 '묻힘(embedding)'에 유의해야 한다. 이 말은 각 실수 r를 그에 대응하는 순서쌍 $(r,0)$과 동일시하면, 이 대응은 복소수의 덧셈과 곱셈에 관해서 보존된다는 것을 뜻한다. 왜냐하면 다음이 성립하기 때문이다.

$$(a,0)+(b,0)=(a+b\ ,\ 0)$$

$$(a.0)(b,0)=(ab\ ,\ 0)$$

실제로 $(r,0)$꼴의 복소수는 이에 대응하는 실수 r로 대치시킬 수

있다. 해밀턴형태의 복소수로부터 옛 형태를 얻기 위해서, 임의의 복소수 (a,b)는

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

와 같이 쓸 수 있음을 상기하면 된다. 여기서 $(0,1)$은 기호 i로 표현되고 $(a,0)$과 $(b,0)$은 각각 실수 a와 b와 동일시된다. 마지막으로, 다음을 알 수 있다.

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

위의 결과로 복소수에 대한 그 이전의 신비적인 느낌은 제거된다. 왜냐하면, 실수의 순서쌍에 대해서는 우리가 많이 사용하였음으로 어떠한 신비로움도 없기 때문이다. 이것이 해밀턴이 이룬 위대한 업적 중 일부라 할 수 있다.

복소수체계는 평면에서 벡터와 회전에 대한 연구를 하는 데 매우 편리한 수체계임은 앞에서 언급했었다. 해밀턴은 3차원 공간에서 벡터와 회전의 연구에 필요한 그와 유사한 수 체계를 고안하려고 시도했었다. 이와 같은 고찰에 의해서 실수가 묻히는 실수의 순서쌍 (a,b)가 아니라, 그는 실수와 복소수가 묻히는 실수의 사순서수 (a,b,c,d)를 고려하게 되었다. 다시 말하면, 이와 간은 사순서수 (a,b,c,d)와 $(e,f,g,h,)$가 서로 같기 위한 필요충분조건은 $a=e, b=f, c=g, d=h$가 성립하는 것이라고 정의함으로써, 해밀턴은 실수의 사순서수의 덧셈과 곱셈은, 다른 제한 중에서도 특히 다음과 같이 정의되어야만 한다는 사실을 발견했다.

정의 : $(a,0,0,0)+(e,0,0,0)=(a+e,0,0,0)$

$$(a,0,0,0)(e,0,0,0)=(ae,0,0,0)$$

$$(a,b,0,0)+(e,f,0,0)=(a+e,b+f,0,0)$$

$$(a,b,0,0)(e,f,0,0)=(ae-bf,\ af+be,\ 0,\ 0)$$

이와 같은 실수의 사순서수를 '사원수' 라고 부른 해밀턴은 사원수

의 덧셈과 곱셈은 다음과 같이 정의될 수밖에 없다는 사실을 발견했다.

정의 : $(a,b,c,d,)+(e,f,g,h,)=(a+e,b+f,c+g,d+h)$ $(a,b,c,d,)(e,f,g,h,)$ $=(ae-bf-cg-df,af+be+ch-dg,ag+ce+df-bh,ah+bg+de-cf)$

이와 같은 정의에 의해서, 실수와 복소수는 사원수에 묻힘을 보일 수 있다. 그리고 만약 사원수 $(m,0,0,0)$을 실수 m과 동일시한다면,

$$m(a,b,c,d)=(a,b,c,d,)m=(ma,mb,mc,md)$$

가 성립함도 보일 수 있다. 또, 사원수의 덧셈은 교환법칙과 결합법칙을 만족시키며, 사원수의 곱셈은 결합법칙과 덧셈에 관한 배분법칙을 만족시킨다는 사실도 밝힐 수 있다. 그러나 곱셈에 관한 교환법칙은 성립되지 않는다. 이것을 알아보기 위해서, 특별히 두 사원수 $(0,1,0,0)$과 $(0,0,1,0)$을 고려해 보자.두 사원수의 곱은

$$(0,1,0,0)(0,0,1,0)=+(0,0,0,1)$$

인 반면에

$$(0,0,1,0)(0,1,0,0)=-(0,0,0,1)$$

이 성립된다. 즉 곱셈에 관한 교환법칙이 성립되지 않는다. 실제로, '사원수의 단위원'(quaternion unit)

$$(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$$

를 각각 기호 $1,i,j,k$ 로 표시할 수 있다.

이와 같은 해밀턴의 연구는 이후에 그라스만(Hermann Gunther Grassmann, 1809~1877, 독일)에 의해 해밀턴의 사원수 대수학보다 훨씬 일반적인 대수학들의 모임을 전개했다. 순서가 있는 네 실수의 집합만을 고려하는 대신에, 그레이스만은 순서 있는 n개의 실수의 집

합을 고려했다. 그에 따라 8원수대수(Octonions)와 쌍 4원수 대수(Biquaternions)와 같은 대수학들의 모임을 전개했다.

위에서 말한 새로운 수 체계는 통상적인 대수학에서 성립되는 법칙들과 다른 법칙들을 만족시키는 대수학을 전개함으로써, 그들은 무수히 많은 대수학적인 구조에 대한 연구의 길을 열었다. 즉 통상적인 대수학에 대한 공준들을 다양한 방법으로 약화시키거나 삭제함으로써, 또는 그 공준들 중 일부를 다른 공준으로 대체시킴으로서, 나머지 공준들과는 모순되지 않게 유지하면서도 방대한 종류의 체계를 연구할 수 있게 된다.

제3장 사원수의 수학적 성질

앞장에서 다루었듯이 사원수는 복소수를 확장하려는 시도로부터 발생하였으므로, 사원수의 성질을 보기위해 우선 복소수의 근간이 되는 복소수의 기본 성질과 벡터의 기본 성질을 간단히 소개하려고 한다. 그리고 사원수의 일반적인 정의와 정리들과 사원수군과 사원수환의 구조와 동형적으로 갖은 다른 형태의 군과 환을 찾아봄으로서 사원수가 응용 될 수 있도록 기초 지식을 소개한다. 그로 인해 고등학교 교육과정에서의 벡터와 복소수의 지도 방안을 제시 할 것이다.

(1) 복소수의 기본 성질

고등학교 과정 수학 10-가의 「단원Ⅰ. 수와 연산」 복소수부분에서 다루어지는 복소수의 정의를 살펴보고, 정리는 증명 없이 제시할 것이다.

1. 허수단위 i와 복소수

① $x^2=-1$을 만족하는 하나의 해 $\sqrt{-1}$을 i로 나타내고, 이를 허수단위라 한다.

즉, $i^2=-1$ 이다.

② $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$ (단, n은 자연수)

③ 복소수의 집합을 $C=\ \{a+bi \mid a, b$는실수, $i^2=-1\}$,

ⅰ) $b=0$ 이면, C는 실수의 집합

ⅱ) $a=0,\ b\neq 0$ 이면, C는 순허수의 집합

($a>0$ 일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$이다.)

④ $a+bi$의 켤레 복소수를 $\overline{a+bi}=a-bi$라 정의한다.

2. 복소수가 서로 같은 조건

① $a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

②두 복소수 $C_1 = a+bi$, $C_2 = c+di$ 라 할 때,

$C_1 = C_2 \quad \Leftrightarrow \quad a=c, \quad b=d$ 를 의미하고,

이때 두 복소수는 서로 같다(상등)고 말한다.

3. 복소수의 연산

두 복소수 $C_1 = a+bi$, $C_2 = c+di$ 라 하자.

① $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ (복소수의 합)

② $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ (복소수의 곱)

③ $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

④ $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ (복소수의 나눗셈)

4. 켤레복소수의 성질

$z_1 = a+bi$ 이고 $z_2 = c+di$라 하자. 이때 $z_1 = a+bi$의 켤레복소수를 $\overline{z_1}=a-bi$라 정의하자.

① $\overline{\overline{z_1}}=z_1$ (켤레 복소수의 성질1)

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (켤레 복소수의 성질2)

③ $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (켤레 복소수의 성질3)

④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2 \neq 0$) (켤레 복소수의 성질4)

⑤ z_1가 실수이면 $\overline{z_1}=z_1$, z_1가 순허수이면 $\overline{z_1}=-z_1$

⑥ $z_1 \cdot \overline{z_1} \geq 0$

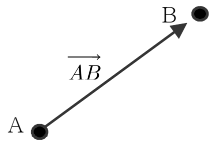
(2) 벡터의 기본 성질

고등학교 과정 수학Ⅱ의 「단원Ⅶ. 벡터」 벡터부분에서 다루어지는 벡터의 정의를 살펴보고, 정리는 증명 없이 제시할 것이다.

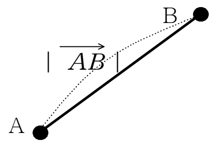
1. 벡터의 뜻

(1) 벡터의 정의 : 크기와 방향을 갖는 양

A를 시점, B를 종점으로 하는 벡터를 $\overrightarrow{AB}$로 나타낸다.



(2) 벡터의 크기 : 벡터$\overrightarrow{AB}$의 크기 ⇒ 기호: $|\overrightarrow{AB}|$



(3) 단위벡터 : 크기가 1인 벡터

(4) 벡터의 상등

두 벡터$\vec{a}, \vec{b}$가 '크기'와 '방향'이 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 한다.

기호: $\vec{a} = \vec{b}$

(5) 역벡터

벡터$\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 벡터$\vec{a}$의 역벡터라 한다.

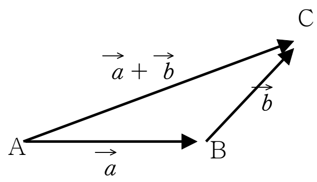
기호: $-\vec{a}$

2. 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈

두 벡터$\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$로 나타낼 때, $\overrightarrow{AC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 합이라 한다.

기호: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



(2) 벡터의 덧셈에 대한 성질

① 교환법칙 : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

② 결합법칙 : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

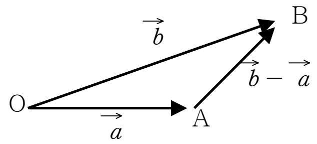
③ 항등원 : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

④ 역원 : $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

3. 벡터의 뺄셈

벡터 $\vec{a},\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$를 만족시키는 $\vec{x}$를 $\vec{b}$에서 $\vec{a}$를 뺀 차라고 한다.

기호: $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$



4. 벡터의 실수배

(1) 실수배의 의미 : $k\vec{a}$

① $k>0$: $\vec{a}$와 같은 방향이고, 크기는 k배

② $k<0$: $\vec{a}$와 반대 방향이고, 크기는 $|k|$배

③ $k=0$: $k\vec{a}=\vec{0}$

(2) 벡터의 실수배에 대한 기본 성질

① 결합법칙 : $k(l\vec{a})=l(k\vec{a})=(kl)\vec{a}$

② 분배법칙 : $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

5. 두 벡터의 평행

(1) $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$인 두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$가 방향이 같거나 또는 정반대일 때, $\vec{a},\vec{b}$는 서로 평행하다고 함 ⇒ 기호: $\vec{a}//\vec{b}$

(2) 두 벡터의 평행 조건

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$일 때 $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ $(k\neq 0)$

(3) 세 점 A,B,C가 한 직선 위에 있기 위한 조건

① $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

② $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$ (단, $k+l=1$)

(4) 영벡터가 아니고 평행이 아닌 두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$에 대하여

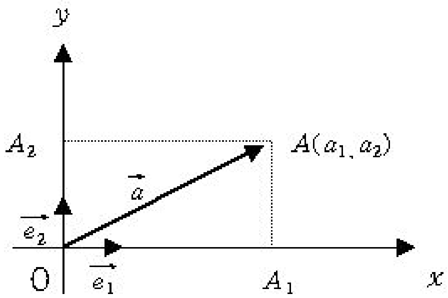
$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow m=0,\ n=0$

$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \Leftrightarrow m=m',\ n=n'$

6. 벡터의 성분과 내적

§ 1. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분표시



$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$

여기서 $\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$ 이므로 $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

이 때, a_1, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1을 x성분, a_2를 y성분이라고 한다. 벡터 $\vec{a}$를 성분을 사용하여 $\vec{a}=(a_1, a_2)$으로 나타낸다.

(2) 평면벡터의 성분과 연산

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때,

① $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2$

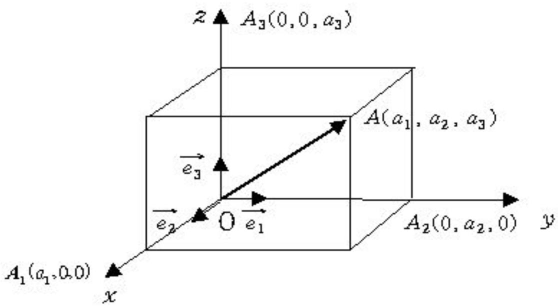
② $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$

③ $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$ (단, k 는 실수)

④ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

§ 2. 공간벡터의 성분

(1) 공간벡터의 성분표시



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

여기서 $\overrightarrow{OA_1} = a_1\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{OA_3} = a_3\overrightarrow{e_3}$ 이므로

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

이 때, a_1 , a_2 , a_3를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1을 x성분, a_2를 y성분, a_3을 z 성분이라고 한다. 벡터 $\vec{a}$를 성분을 사용하여 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$으로 나타낸다.

(2) 평면벡터의 성분과 연산

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때,

① $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

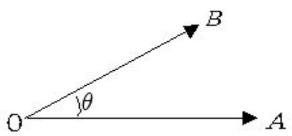
② $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$

③ $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k 는 실수)

④ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}$

§ 3. 벡터의 내적

(1) 내적의 뜻



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(2) 벡터의 내적과 성분

① 평면의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

② 공간의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(3) 내적의 연산법칙

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

③ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

④ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

⑤ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(4) 두 벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

① $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 이면 $\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

② $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 이면

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

(5) 벡터의 평행과 수직

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

② $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

(3) 사원수의 정의와 기본 정리

그러면 고등학교 과정에서 습득한 복소수와 벡터의 기본 지식을 바탕으로 이제 해밀턴이 발견한 사원수의 기본 성질을 살펴볼 수 있다.

§ 1. 사원수의 정의

(정의 1) 사원수의 정의

사원수는 $q=a+\vec{v}=a+bi+cj+dk$ 에 의해 주어진다. (여기서 a,b,c는 실수). i,j,k는 다음과 같이 정의한다.

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k, jk=-kj=i, \text{그리고} ki=-ik=j.$$

이때 $Q_8=\{1,i,j,k,-1,-i,-j,-k\}$.은 곱셈(operator)에 관하여 군을 이루고 이를 **사원수 군**이라 한다.

계수가 0인 항은 제거하는 것으로 한다. 예를 들어 $2+3j=2+0i+3j+0k$이고, $1+7i=1+7i+0j+0k$이다. 따라서 $j,\ k$의 계수가 0인 경우에는 사원수가 복소수가 되고, 특히 $i,\ j,\ k$의 계수가 0인 경우에는 실수가 된다. 따라서 사원수의 실수부분만 나타낼 때가 있는데 그런 경우에 특별히 **선택 함수** (the selection function)를 사용하여 나타낸다. 선택 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$W(q)=W(a+bi+cj+dk)=a$$

또한 $W(q)=\dfrac{(q+\bar{q})}{2}$ 을 만족하는 함수이기도 하다.

(정의 2) 사원수의 상등

두 사원수를 다음과 같이 정의 하자

$q_0 = a_0 + \vec{v} = a_0 + b_0 i + c_0 j + d_0 k$, $q_1 = a_1 + \vec{u} = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$.

이때 $q_0 = q_1 \leftrightarrow a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$, $c_0 = c_1$, $d_0 = d_1$ 이고

두 사원수는 서로 같다(상등)이다.

(정의 3) 사원수의 합과 곱

사원수의 합과 곱은 다음과 같이 정의된다.

$$q_0 + q_1 = a_0 + a_1 + \vec{v} + \vec{u} = (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)i + (c_0 + c_1)j + (d_0 + d_1)k \qquad \text{--(1)}$$

이때 덧셈에 관한 교환법칙과 결합법칙은 성립한다.

$$q_0 q_1 = a_0 a_1 - \vec{v}\vec{u} + a_0 \vec{u} + a_1 \vec{v} \qquad \text{--(2)}$$

이때 $\vec{v}\vec{u} = o$ 이 되면 $q_0 q_1 = q_1 q_0$이 되어 가환하지만 이 된다.

일반적으로

$$q_0 q_1 = (a_0 a_1 - b_0 b_1 - c_0 c_1 - d_0 d_1) + (b_0 a_1 + a_0 b_1 + c_0 d_1 - d_0 c_1)i$$
$$+ (c_0 a_1 + a_0 c_1 + d_0 b_1 - b_0 d_1)j + (d_0 a_1 + a_0 d_1 + b_0 c_1 - b_1 c_0)k \qquad \text{--(3)}$$

이때 곱셈에 관한 결합법칙은 성립하나 교환법칙은 성립하지 않는다.

즉 비 가환(non-commutative) 이다.

(정의 4) 사원수의 켤레와 트레이스(trace)

사원수의 켤레(conjugate of a quaternion)는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{q} = \overline{(a + bi + cj + dk)} = a - bi - cj - dk \qquad \text{--(4)}$$

또한 $T(q) = 2a$ 라고 정의하고 $T(q)$ 를 q 의 트레이스라고 한다.

따라서 $T(q) = q + \bar{q} = 2W(q)$

(정의 5) 사원수의 크기

사원수의 크기 (norm of a quaternion)는 다음과 같이 정의한다.

$N(q)=N(a+bi+cj+dk)= \ q\bar{q} \ =a^2+b^2+c^2+d^2$ --(5)

사원수의 크기는 실함수 값이다. 예를 들어 $q=1+2i+3j+4k$ 일 때, 사원수의 크기 즉 $N(q)=1^2+2^2+3^2+4^2=30$으로 실수 값이다.

또한 $N(\bar{q})=N(q)$이고 $N(pq)=N(p)N(q)$을 만족하는 성질을 가지고 있다.

(정의 6) 사원수의 역원

곱셈에 관한 사원수의 역원(multiplicative inverse of a quaternion q)은 q^{-1} 라 표기하며 $qq^{-1}=q^{-1}q=1$ 되는 성질을 만족하는 원소를 사원수의 역원 q^{-1}이라 한다.

이때 $q^{-1}=\dfrac{\bar{q}}{N(q)}$ 의 구조를 가진다. --(6)

역원의 연산자는 $(q^{-1})^{-1}=q$와 $(pq)^{-1}=p^{-1}q^{-1}$같은 성질을 만족한다.

〔정리 1〕 $i\,j=-j\,i=k,\ j\,k=-k\,j=i,\ k\,i=-i\,k=j$이다

(증명) $i\,j\,k=-1$이므로, $(i\,j\,k)k=-k$ $\quad i\,j\,k^2=-k$ $\quad -i\,j=-k$ 에서 $i\,j=k.$ 또한 $i\,j=k$에서

$(i\,j)(j\,i)=k(j\,i)$ 따라서 $1=k\,j\,i$ $\quad k=k^2ji$ 그리고 $k=-j\,i.$ 마찬가지 방법으로 나머지 식도 증명된다.

〔정리 2〕 한 사원수와 그 켤레사원수와의 합과 곱은 실수가 된다.

(증명) 임의의 한 사원수를 $q=a+bi+cj+dk$ 라고 하면,

$\bar{q}=a-bi-cj-dk$ 이므로 $q+\bar{q}=2a,$

$$q\bullet\bar{q}=(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)+(-ab+ba-cd+dc)i$$

$$+(-ac+bd-ca+db)j+(-ad-bc+cb+da)$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

〔정리 3〕 $\bar{\bar{q}}=q$, q 가 실수이면 $q=\bar{q}$ 이다.

(증명) 켤레복소수의 정의에 의해 자명히 성립된다.

〔정리 4〕 임의의 두 사원수 $q=a+bi+cj+dk$ 와 $p=t+xi+yj+zk$ 라 할 때, 다음이 성립한다.

(1) $\overline{p\pm q}=\bar{p}\pm\bar{q}$ (2) $\overline{pq}=\bar{p}\ \bar{q}$ (3) $\overline{\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{\bar{p}}{\bar{q}}$

(증명) (정의 3) 사원수의 합과 곱에 의하여 자명히 성립됨을 쉽게 보일 수 있다.

§ 2. 사원수의 연산(quaternion operations)

앞에서 보았던 사원수의 합과 곱 연산을 제외한 다른 연산을 알아보자.

두 사원수를 $p=a+\vec{v}=a+bi+cj+dk$, $q=t+\vec{u}=t+xi+yj+zk$ 라 하자.

Ⅰ. quaternion dot-product : $p \bullet q$

사원수의 내적은 유클리드 내적과 같이 적용된다. 즉 사원수의 내적은 두 사원수의 각각의 원소의 곱의 합으로 표현된다.

표기 방법 : $p \bullet q$

$$p \bullet q = at+\vec{v}\vec{u}=at+bx+cy+dz$$

$$p \bullet q=\frac{\bar{p}q+\bar{q}p}{2}$$

이 연산은 사원수의 원소를 고립하는데 사용한다. 즉 차원을 제한해

줄때 사용한다. 예를 들어 $p=1+2i+3j+4k$ 일 때, $p \bullet i=2$ 와 같이 실수부와 j, k항이 없어져 i항만 남게 되므로 차원을 3차원에서 1차원으로 차원을 제안 할 수 있다. 즉 사원수의 원소를 고립할 수 있게 된다.

Ⅱ. quaternion outer-product : $Outer(p,q)$

이 연산은 많이 사용하지는 않는다. 하지만 가환이 성립하지 않는 형태가 비슷하기 때문에 내적과 함께 같이 언급을 한다.

표기 방법 : $Outer(p,q)$

$$Outer(p,q)=\frac{\bar{p}q-\bar{q}p}{2}$$

$$Outer(p,q)=a\vec{v}-t\vec{u}-\vec{v}\vec{u}$$

$$Outer(p,q)=(ax-bt-cz+dy)i+(ay+bz-ct-dx)j+(az-by+cx-dt)k$$

Ⅲ. quaternion even-product : $Even(p,q)$

이 연산도 잘 사용은 하지 않으나 홀수 연산과 함께 순수하게 대칭 곱만을 연산한다. 그리고 특별히 가환이 성립한다.

표기 방법 : $Even(p,q)$

$$Even(p,q)=\frac{pq+qp}{2}$$

$$Even(p,q)=at+a\vec{v}+t\vec{u}-\vec{v}\vec{u}$$

$$Even(p,q)=(at-bx-cy-dz)+(ax+bt)i+(ay+ct)j+(az+dt)k$$

Ⅳ.quaternion cross-product : $p\times q$

이 연산은 벡터의 외적 연산과 같은 역할을 한다. 즉 벡터 부분의 값 계산할 때 사용한다.

$$p \times q = \frac{pq - qp}{2}$$

$$p \times q = \vec{v} \times \vec{u}$$

$$p \times q = (cz - dy)i + (dx - bz)j + (dy - cx)k$$

즉 이 연산은 벡터부분의 계산만을 필요로 할 때 사용하는 연산으로 실수부분과 벡터부분의 계산을 따로 계산 할 때 이 연산을 내적과 함께 사용하면 편리하다.

예를 들어, $p = 1 + 2i + 3j + 4k$와 $q = 2 + 6i + 2j$일 때.
$p \times q = (-8)i + (24-4)j + (8-18)k = -8i + 20j + 10k$와 같이 벡터 부분만 연산이 가능하다.

Ⅴ.quaternion division-product : $p^{-1}q$

이 연산은 비 가환인 연산이다. 즉 가환이 되지 않기 때문에 $p^{-1}q \neq qp^{-1}$이다. 따라서 $\frac{p}{q}$의 표현은 사용하지 않는다.

Ⅵ.quaternion scalar : $Scalar(p)$

사원수의 스칼라 부분을 의미하고 dot-product를 이용하여 표현하며 다음과 같다. 이 연산은 앞에서 언급한 선택함수와 같은 의미를 갖고 단지 표현의 방법만 다를 뿐 사용함에는 같이 사용해도 상관없다.

$$W(p) = Scalar(p) = 1 \cdot p = \frac{p + \bar{p}}{2} = a$$

예를 들어 $p = 1 + 2i + 3j + 4k$ 일 때, $Scalar(p) = 1$ 이다.

Ⅶ.quaternion vector : $\overrightarrow{tor(P)}$

사원수의 벡터 부분을 의미하고 outer-product를 이용하여 표현이 가능하다.

$$\overrightarrow{tor(P)} = Outer(1,p) = \frac{p-\bar{p}}{2} = \vec{u} = bi + cj + dk$$

예를 들어 $p = 2+3i+j+5k$ 일 때, $\overrightarrow{tor(P)} = 3i+j+5k$ 이다.

Ⅷ.quaternion modulus : $|p|$

사원수의 절대 값으로 원래의 사원수로부터 사원수의 길이를 결정하는 스칼라 값이다.

$$|p| = \sqrt{p \cdot p} = \sqrt{\bar{p}p} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

앞에서 언급한 사원수의 크기와는 조금 다르게 절대 값은 사원수의 길이를 나타내는 것으로 $\sqrt{N(p)}$로 표현도 가능하다.

예로 $p = 1+2i+3j+4k$ 일 때, $|p| = \sqrt{30}$ 와 같이 사원수의 길이를 표현한다.

Ⅸ.quaternion sign : $sgn(p)$

사원수의 방향을 의미하며 복소수의 $sgn = \frac{z}{|z|}$ 과 같이 사원수의 방향 역시 다음과 같다.

$$sgn = \frac{p}{|p|}$$

Ⅹ.quaternion argument : $\arg(p)$

사원수의 각을 의미하며 단위 스칼라 즉, (1)로 부터 4-벡터 사원수의 각을 찾는 것이다.

$$\arg(p) = \arccos\left(\frac{Scalar(p)}{|p|}\right)$$

위의 연산들을 이용하여 예로 계산해 보도록 하자.

$p=1+2i+3j+4k$와 $q=2+i+3j+7k$ 이라 하자.

1) $p \bullet q=2+2+9+28=48$

2) $Out(p,q)=(1-4-21-12)i+(3+14-6-4)j+(7-6=3-8)k$

$=-12i+7j-4k$

3) $Even(p,q)=(2-2-9-28)+(1+4)i+(3+6)j+(+8)k$

$=-37+5i+9j+17k$

§ 3. 사원수의 성질 및 응용

〔정리 5〕 임의의 사원수는 제곱근을 갖는다.

(증명) 임의의 사원수 $q=a+\vec{v}=a+bi+cj+dk$라고 할 때, $h^2=q$ 가 되는 h를 찾으면 된다.

ⅰ) $|q|=0$ 이면, $h=0$이 되어 자명하다.

ⅱ) $|q|=1$ 이면, $|h|=1$로 가정할 수 있다. $h=x+yi+zj+uk$ 로 두면,

$h^2=(x+yi+zj+uk)(x+yi+zj+uk)$

$=(x^2-y^2-z^2-u^2)+2xyi+2xzj+2xuk$ 이고, 이때

$$x^2-y^2-z^2-u^2=a \quad \cdots\cdots ①$$

$$2xy=b \quad \cdots\cdots ②$$

$$2xz=c \quad \cdots\cdots ③$$

$$2xu=d \quad \cdots\cdots ④$$

그런데, $|h|=1$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

이고, ①+⑤에서 $2x^2=a+1$ 여기서 $|q|=1$ 이므로 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ 이고, $a^2 \le 1$. 그리고 $a+1 \ge 0$ 따라서 $2x^2=a+1$ 을 만족하는 x를 찾아서 y, z, u 에 관하여 풀면 제곱근이 얻어진다.

iii) $|q| \neq 1$ 이면,

$\left|\frac{q}{|q|}\right| = 1$ 이므로 ii)에 의하여 $\frac{q}{|q|}$의 제곱근이 존재한다. 그 제곱근을 h' 라고 하면, $\frac{q}{|q|} = h'^2$ 에서 $q = |q|h'^2 = \sqrt{|q|h'^2}$ 이므로, q의 제곱근은 존재한다.

〔정리 6〕 임의의 사원수 x 에 대하여, 이차 방정식 $x^2 - T(x)x + N(x) = 0$이 성립한다.

(증명) 정의 4와 정의 5에 의해 $T(x) = x + \bar{x}$ 이고, $N(x) = x\bar{x}$ 이므로,

$$x^2 - T(x)x + N(x) = x^2 - (x + \bar{x})x + x\bar{x} = x^2 - x^2 - \bar{x}x + x\bar{x} = 0$$

〔정리 6〕에 의하면, x의 이차방정식 $x^2 - 2x = 30 = 0$ 의 근은 실수의 집합에서는 없고, 복소수의 집합에서는 $x = 1 \pm \sqrt{29}\,i$가 되어 두개가 존재한다.

그러나, 사원수의 집합에서는 구하는 근을 $x = a + bi + cj + dk$로 두면 $T(x) = 2a = 2$, $N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30$ 에서, $a = 1$, $b^2 + c^2 + d^2 = 29$가 되어 사원수는 모두 근이 되므로 무한히 많은 근이 존재함을 알 수 있다.

사원수의 절대치의 성질을 four-square theorem 을 증명하는데 이용할 수 있다.

〔정리 7〕four-square theorem

임의의 양의 정수는 네 개의 정수들의 제곱의 합으로 표시될 수 있다.

(증명) Euler가 발견한 아래의 항등식은 양변을 전개함으로써 증명된다.

$$
\begin{aligned}
(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = & (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2 \\
& +(x_1y_3+x_3y_1+x_4y_2+x_2y_4)^2 \\
& +(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4+x_4y_3)^2 \\
& +(x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2)^2
\end{aligned}
$$

위의 항등식에 의하면, X와 Y가 각각 네 개의 정수의 제곱의 합으로 표현될 때에는 곱 XY도 역시 네 개의 정수의 제곱의 합으로 표현됨을 알 수 있다. 그런데 이와 유사한 항등식을 사원수의 절대치의 성질을 이용하여 만들 수 있다.

즉, 두 사원수가 $q=x_1+x_2i+x_3j+x_4k$, $p=y_1+y_2i+y_3j+y_4k$ 일 때, $N(q)N(p)=N(qp)$이므로

$$
\begin{aligned}
(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = & (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2 \\
& +(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4+x_4y_3)^2 \\
& +(x_1y_3+x_3y_1+x_4y_2+x_2y_4)^2 \\
& +(x_1y_4+x_4y_1+x_2y_3+x_3y_2)^2
\end{aligned}
$$

이 된다. $2=1^2+1^2+0^2+0^2$ 이므로, 임의의 기소수가 네 개의 정수의 제곱의 합으로 표현됨을 증명하면 four-square theorem이 증명된다.

(4) 사원수군과 사원수환

해밀턴에 의해 소개된 사원수들은 적당한 연산아래서 대수적 구조를 갖게 된다. 실제로 사원수군(quaternion group)은 다음과 같은 대수적인 성질을 갖는 구조이다.

〔정리 7〕 군 G가 다음 세 조건

1) $a^4=e$(e는 G의 단위원)이고 $1 \leqq m < 4$인 m에 대하여 $a^m \neq e$ 이다.

2) $a^2=b^2$

3) $ba=a^3b$

을 만족하는 두 원소 a,b 에 의하여 생성된다고 하자. 이때 이군을 a,b에 의하여 생성되는 **4원수군**(quaternion group)이라고 한다. 그러면

$$G=<a,b \geqq \{a^s b^t \mid s=0,1,2,3 \quad ; \quad t=0,1\}$$
$$=\{e , a , a^2 , a^3 , b , ab , a^2b , a^3b\}$$

이다. 이때 G는 **비가환군**이 되며 해밀턴의 사원수와 대수적으로 같은 구조를 이룬다.

(증명) 분명히 1)에 의하여 $a \neq e$ 이다. 또한, $b=e$ 라고 하면 2)에 의하여 $a^2=e$ 이므로 1)에 의하여 모순이다.

따라서 $b \neq e$ 이다. 한편 1)과 2)에 의하여

$$b^4=b^2b^2=a^2a^2=a^4=e$$

이다. 즉 $b^4=e$ ----------- 4)

$k \geqq 1$일 때, 3)을 반복 적용하면

$$ba^k=baa^{k-1}=a^3ba^{k-1}=a^3baa^{k-2}=(a^3)^2ba^{k-2}= \cdot \cdot \cdot =(a^3)^k b=a^{3k}b$$

이다. 즉 $ba=a^3b \ (k \geqq 1)$ ----------- 5)

m,n 을 임의의 정수라 하자.

그러면 **나눗셈 정리**(Division Algorithm)에 의해

$$m=4q+r, \ 0 \leqq r < 4 \ ; \ n=4p+l \ , \ o \leqq l < 4$$

을 만족하는 정수 $q, \ r, \ p, \ l$ 이 존재한다. 따라서 1)과 4)에 의하여

$$a^m=a^{4q+r}=(a^4)^q a^r=e^q a^r=ea^r=a^r$$

$$b^n = b^{4p+l} = (b^4)^p b^l = e^p b^l = eb^l = b^l$$

이다. 즉 $a^m = a^r \quad (0 \leqq r < 4),$ ----------- 6)

$b^n = b^l \quad (0 \leqq r < 4).$ ----------- 7)

따라서 2), 5), 6), 7) 에 의하여

$$b^n a^m = b^l a^r = \begin{cases} b^3 a^r = bb^2 a^r = ba^2 a^r = ba^{r+2} = a^{3(r+2)} b = a^i b & (0 \leqq i < 4) \\ b^2 a^r = a^2 a^r = a^{r+2} = a^{r+2} e = a^{r+2} b^0 = a^i b^0 & (0 \leqq i < 4) \\ ba^r = a^{3r} b = a^i b & (0 \leqq i < 4) \\ b^0 a^r = ea^r = a^r e = a^r b^0 & , \end{cases}$$

$$a^m b^n = a^r b^l = \begin{cases} a^r b^3 = a^r b^2 b = a^r a^2 b = a^{r+2} b = a^i b & (0 \leqq i < 4) \\ a^r b^2 = a^r a^2 = a^{r+2} = a^{r+2} e = a^{r+2} b^0 = a^i b & (0 \leqq i < 4) \\ a^r b \\ a^r b^0 & , \end{cases}$$

$$b^n = b^l = \begin{cases} b^3 = b^2 b = a^2 b \\ b^2 = a^2 = a^2 e = a^2 b^0 \\ b = eb = a^0 b \\ b^0 = eb^0 = a^0 b^0 \end{cases}$$ 이다. 즉,

$b^n a^m = a^i b^j \qquad (0 \leqq i < 4 \quad ; \quad j = 0,1\,)$

$b^n a^m = a^i b^j \qquad (0 \leqq i < 4 \quad ; \quad j = 0,1\,)$

$b^n = a^i b^j \qquad (0 \leqq i < 4 \quad ; \quad j = 0,1\,)$ 이다.

따라서 $G = < a,b \geqq \{a^s b^t \mid s = 0,1,2,3 \;;\; t = 0,1\}$

$= \{e\,,\, a\,,\, a^2\,,\, a^3\,,\, b\,,\, ab\,,\, a^2 b\,,\, a^3 b\}$

이제 위의 8개의 원소들이 모두 다르다는 것을 보이자.

㉠ $0 \leqq k < l < 4$ 인 k , l에 대하여 $a^l = a^k$ 라 하면

$0 < l - k < 4$ 이고 $a^{l-k} = e$ 가 되어 1)에 모순이다.

따라서 $e = a^0$, a , a^2, a^3 은 모두 다르다.

㉡ $0 \leqq k < l < 4$ 인 k , l에 대하여 $a^k b = a^l b$ 라 하면

$a^l = a^k$ 이 되어 ㉠에 모순이다.

따라서 $b=a^0b,\ ab,\ a^2b,\ a^3b$ 은 모두 다르다.

㉢ $0\leqq k<l<4$ 인 k 에 대하여 $b=a^k$ 라 하면

3)에 의하여 $a^ka=ba=a^3b=a^3a^k$ 이므로 $a^2=2$가 되어

1)에 모순이다. 따라서 $0\leqq k<l<4$ 인 k 에 대하여 $a^k\neq b$ 이다.

㉣ $0\leqq k$, $l<4$ 인 k , l 에 대하여 $a^k=a^lb$ 라 하면

$b=a^{k-l}$ 이다. 이 때, $0\leqq k-lc$ 이면 $k-l<4$ 이므로

㉢에 모순이다. 한, $k-l<0$ 이면

$b=a^{k-l}=a^{-(l-k)}=(a^{l-k})^{-1}=a^{4-(l-k)}$ 이고

$0<4-(l-k)<4$ 이므로 다시 ㉢에 모순이다.

따라서 $0\leqq k,\ l<4$ 인 k , l 에 대하여 $a^k\neq a^lb$ 이다.

따라서 G의 8개의 원소는 모두 다르다.

더욱이 $ab=ba$ 이면 3)에 의하여 $ab=ba=a^3b$ 가 되어서 ㉡에 모순이 된다. 따라서 G 는 가환군이 아니다. 즉 비가환군이 된다.

위에서 말한 사원수 군은 비가환군이다. 이와 같은 구조를 갖는 형태를 행렬과 대칭군에서 살펴보고 동형이 되는지 알아보았다. 사원수 군을 동형인 행렬로 표현하면 보다 쉽게 우리가 사원수를 응용할 때 사용하기가 쉽게 변형하여 쓸 수 있기 때문에 사원수의 행렬과 동형인 형태는 매우 중요하다.

Ⅰ. 군 $GL_2(C)$ 에서의 사원수 군

$GL_2(C)$의 원소 A , B 에 대하여 생각해 보자.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$라 하자. (단, $i=\sqrt{-1}$)

그러면

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ 이므로 $A\ ,B\ \in GL_2(C)$ 이다.

이제 A , B 에 의하여 생성되는 $GL_2(C)$의 부분군 $\langle A\ ,\ B\rangle$에 대하여 생각하자.

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A^2$, $BA=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}=A^3B$ 이다.

즉

1) $A^4=I_2$ 이고 $1\leqq m<4$ 인 m 에 대하여 $A^m\neq I_2$

2) $A^2=B^2$

3) $BA=A^3B$

이므로 $\langle A\ ,\ B\rangle$는 **4원수군**(quaternion group)과 동형이고

$\langle A\ ,\ B\rangle=\{I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}$ 이다.

이제부터 $a,\ b$ 에 의해 생성되는 $G=\langle a,\ b\rangle$와 행렬 $A,\ B$ 에 생성되는 $G^{\dagger}=\langle A,\ B\rangle$ 와 동형임을 보이자. 그러면 앞의 정리에 의해

$G=\{\ a^sb^t\ \mid s=0,1,2,3\ ;\ t=0,1\ \}=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ab,\ a^2b,\ a^3b\ \}$

$G^{\dagger}=\{\ A^sB^t \mid s=\ 0,1,2,3\ ;\ t=\ 0,1\ \}=\{\ I_2\ ,A,A^2,A^3,B,\ AB,A^2B,A^3B\ \}$

이다. 이제 함수 f 를 정의하자.

$f:\ G\ \rightarrow\ G^{\dagger}$ 을 임의의 $a^sb^t\in G$ $(0\leqq s<4\ ,\ t=0,1\ )$ 에 대하여 $f(a^sb^t)=A^sB^t$ 라 정의 하면, 잘 정의되었다.

이때 임의의 원소 a^sb^t , $a^ub^v\ \in G$ 에 대하여

1) $f(a^sb^t)=f(a^ub^v)$이면 $A^sB^t=A^uB^v$ 이므로 단사함수이다.

2) 임의의 $A^sB^t\in G^{\dagger}$에 대해 $f(a^sb^t)=A^sB^t$ 를 만족하는 $a^sb^t\in G$ 에 존재하므로 전사함수이다. 따라서 f 는 분명히 전단사 함수이다.

다음은 f 가 준 동형함수임을 보이자.

k , l 을 $0 \leqq k,l < 4$ 인 임의의 정수라 하자.

3) 그러면 나눗셈 정리에 의하여

$$k + l = 4q + r \quad , \quad 0 \leqq r < 4$$

을 만족하는 정수 q , r 이 존재하므로, 4원수군의 조건과 앞의 정리에 의해

$$f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^r) = A^r = A^{k+l} = A^k A^l = f(a^k) f(a^l)$$

$$f((a^k b)(a^l b)) = f(a^k (b a^l) b) = f(a^k a^{3l} b^2) = f(a^k a^{3l} a^2) = f(a^{k+3l+2})$$

$$= f(a^i) \quad (k+3l+2 = 4u+i, \quad 0 \leqq i < 4 \quad) = A^i$$

$$= A^{k+3l+2} = A^k A^{3l} A^2 = A^k A^{3l} B^2 = A^k B A^l B$$

$$= f(a^k b) f(a^l b)$$

$$f(a^k (a^l b)) = f(a^{k+l} b) = f(a^r b) = A^r B = A^{k+l} B = A^k A^l B = f(a^k) f(a^l b)$$

$$f((a^k b) a^l) = f(a^k a^{3l} b) = f(a^{k+3l} b) = f(a^j b) \quad (k+3l = 4v+j, \quad 0 \leqq j < 4 \,)$$

$$= A^j B = A^{k+3l} B = A^k A^{3l} B = A^k B A^l = f(a^k b) f(a^l)$$

이다. 따라서 f 는 준동형 함수이다.

위의 1), 2), 3) 에 의하여 f **는 동형함수이고** $G \cong G^{\dagger}$ 이다.

일반적으로 $Mat_2(C)$ 의 부분환 H 의 형태는 다음과 같다.

$$H = \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\alpha} & \overline{\beta} \end{matrix} \;\middle|\; \alpha, \;\; \beta \in C \right\}$$ 이다.

이때 해밀턴의 사원수와 H 는 동형이다.

Ⅱ. 대칭군 S_n 에서의 사원수군

대칭군 S_8의 부분군 중 하나인 H 는 다음과 같다.

$$H = \left\{ \begin{matrix} i \,, (1324)(5768)\,, (1526)(3847)\,, (1728)(3546)\,, (12)(34)(56)(78), \\ (1827)(3645),\; (1625)(3748)\,, (1423)(5867) \end{matrix} \right\}$$

이때 H 의 원소 $(1324)(5768)$, $(1526)(3847)$ 에 대하여 생각하여 보

자. 그러면

$x=(1324)(5768)$, $y=(1526)(3847)$ 이라고 하면

$x^2=(12)(34)(56)(78)$

$x^3=(1423)(5867)$

$x^4= i$ 가 되며

$y^2=(12)(34)(56)(78)=x^2$ 이 된다.

또한 $xy=(1728)(3546)=yx^3$ 이 성립한다. 그러나 $xy \neq yx$ 이므로 비가환이다. 따라서 H 는 원소 $(1324)(5768)$, $(1526)(3847)$ 에 의해 생성되는 군이 된다.

즉, 1) $x^4=i$ 이고 $1 \leqq n < 4$ 인 n 에 대하여 $x^n \neq i$

2) $x^2=y^2$

3) $xy=yx^3$ 이므로

$(1324)(5768)$, $(1526)(3847)$ 에 의해 생성되는

$H=\langle(1324)(5728), (1526)(3847)\rangle$는 사원수 군이 되고 위에서 증명한 것처럼 생성원이 다르더라도 같은 구조를 가지면 H 가 Q_8 과 동형이 된다. 즉 $H \cong Q_8$ 이다.

참고적으로 비가환군 중에서 위수가 8이 되는 것은 D_4 or Q_8 뿐이다. 여기서 D_4 는 **4차 dihedral group** [2]으로 Q_8 과는 다른 대수적 구조를 가진다.

---

2) **dihedral group이란 :** $n \geq 3$ 일 때, 군 G 가 다음 세 조건

1) $a^n=e$ (e는 G의 단위원) 이고 $1 \leqq m < n$ 인 m에 대하여 $a^m \neq e$ 이다.

2) $b^2=2$ $(b \neq 2)$

3) $ba=a^{n-1}b$

를 만족하는 두 원소 a ,b 에 의하여 생성되는 군을 의미한다.

제 4장 회전 변환과 사원수의 응용

이 장에서는 사원수의 응용에 꼭 필요한 회전변환에 대한 내용과 회전변환 중 왜 사원수 변환을 사용하게 되는지 살펴보겠다. 그리고 앞에서 살펴본 사원수의 정의를 통해 알게 된 사실이 어떤 분야에서 응용되어지며 또한 왜 응용되어지는지 살펴보도록 하겠다. 그리고 사원수를 응용함으로서 그에 따른 장점이 무엇인지 살펴본다.

(1) 회전 변환

회전 변환은 각 좌표축에 대한 이동 크기를 더해줌으로써 수행되는 이동변환과는 달리 주어진 각도만큼 회전축을 기준으로 회전하는 변환이다. 따라서 3D 그래픽에서는 무엇보다 중요한 요소이다. 2차 평면에서의 회전변환을 알아보고 2차원에서 3차원으로 확장되는 과정과 3차원 회전변환을 다음에서 알아보자.

§ 1. 2차원 평면 회전

2차원 평면 회전은 회전점 또는 고정점을 기준으로 좌표를 회전하는 것이다. 4개의 모서리 좌표가 모여서 하나의 사각형을 이루므로, 4개의 좌표를 회전 변환하면 사각형의 회전 변환을 수행할 수도 있다.

2차원 평면의 회전 변환은 다음의 공식으로 수행된다.

2차원 평면 회전변환 공식 : $\underset{①}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{②}{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}} \underset{③}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$ ———식①

여기서 ①은 회전변환이후 변환된 좌표이고, ③은 회전 변환 이전의 원 좌표값이다. θ는 반드시 기계 방향을 (+)로 했을 때 회전된 각도

고, ②를 회전 행렬이라고 한다. 여기서 주의해야 할 것은 회전점이 원점 (0,0)이라는 것이다. 원점이 아닌 임의의 점을 기준으로 회전하려면 좌표들을 원점으로 이동 변환한 후에 회전 변환을 수행한 후, 다시 원래의 회전점으로 이동변환을 한번 더 수행해야 한다.

§ 2. 2차원 평면 회전의 3차원 확장

이제 회전 변환을 3차원으로 확장해 보자. 먼저 원점에 고정점을 가진 회전을 살펴 볼 것이다. 3차원 이동 변환을 3차원 이동변환을 3차원으로 정의할 때, x, y, z축 각 방향의 증감분으로 이동변환을 수행한 것처럼, 3차원 회전 변환의 경우에도 x, y, z축 각각을 기준으로 회전하여 회전 변환을 수행 할 수 있다.

앞에서 설명한 식①은 xy평면상에서 z축 방향의 회전축을 지준으로 회전했을 때의 공식이었다. 2차원 평면 회전을 3차원으로 확장하기 위해서는 식①을 3차원으로 확장하고, yz평면상에서 x축을 기준으로 회전했을 때의 공식과 xz평면상에서 y축을 기준으로 회전했을 때의 공식도 필요하다.

다음 식은 식①의 xy평면상에서 z축 기준 회전공식을 3차원으로 확장한 것이다. 3차원에서는 x, y, z의 세 값을 연산하므로, 3×3행렬로 정의된다.

3차원으로 확장한 2차원 평면 회전 공식: $R_z = R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

———식②

아래의 그림은 식②를 도시한 것이다. 그림에서 화살표 두개가 겹쳐진 모양은 회전축을 표현하는 기호이며, 지금부터는 회전축을 화살표 두개로 표시하겠다.

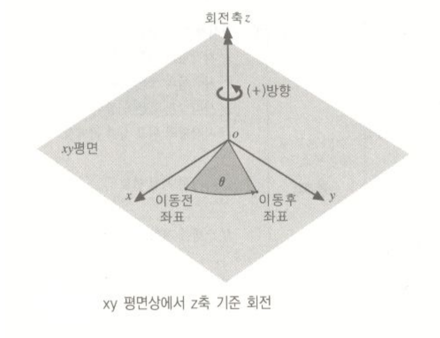


그림 1.
xy평면상에서 z축 기준 회전

다음 식은 xz평면상에서 y축 기준 회전변환을 위한 회전 행렬이다.

3차원으로 확장한 2차원 평면 회전 공식: $R_y = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

———식③

아래 그림은 식③을 그림으로 도시한 것이다.

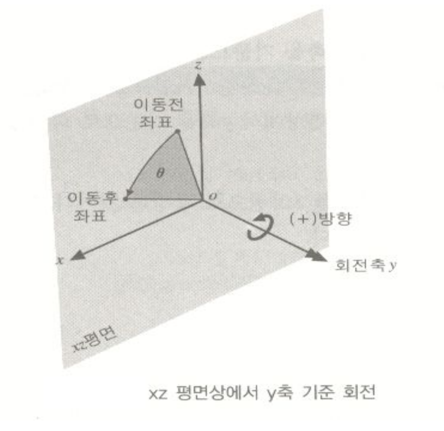


그림 2.
xz평면상에서 y축 기준 회전

다음 식은 yz평면상에서 x축 기준 회전 변환을 위한 회전 행렬이다.

3차원으로 확장한 2차원 평면 회전 공식: $R_y = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

———식④

아래 그림은 식④를 그림으로 도시한 것이다.

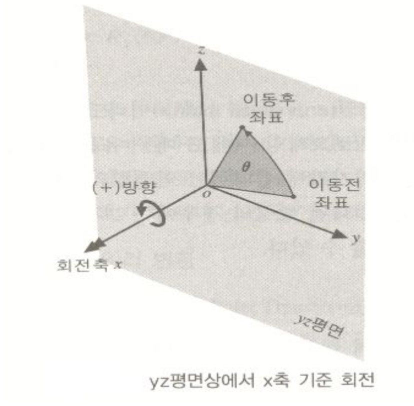


그림 3.
yz평면상에서 x축 기준 회전

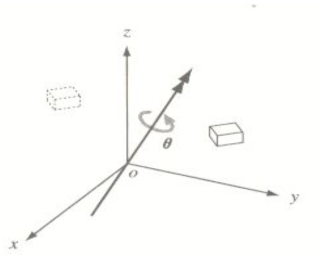
여기서 회전각을 나타내는 θ는 오른손 법칙에 의하여 양의 회전으로 정의된다. 즉 오른손 엄지를 회전축의 양의 방향으로 향하게 했을 때, 나머지 네 손가락의 방향이 회전축을 감아쥐도록 하는 방향이 양의 방향 (+)이 된다. 식②,③,④는 각각 x, y, z 좌표축을 회전축으로 하는 회전 행렬이다.

§ 3. 3차원 공간 회전

지금까지 2차원 평면 회전을 3차원으로 확장하는 문제에 대해서 알아보았다. 이제는 3차원 공간상의 임의의 회전에 대해 알아보자. 3차원 공간 회전 문제에서도 회전축이 원점을 지나가는 직선이다. 아래의 그림 4는 원점을 지나는 임의의 회전축에 대해서 점선으로 구성된 직육면체를 실선으로 표현한 직육면체로 보내는 3차원 공간 회전을 나타낸 것이다.

임의의 회전축에 대한 3차원 공간 회전은 원점으로부터의 벡터로 회전축을 정의하고 회전각을 정해줌으로써 수행 할 수 있다. 그러나 주어진 회전축과 회전각으로 어떻게 회전 변환 행렬을 만들어 주느냐하는 문제는 그렇게 만만치가 않다. 따라서 이동변환을 수행할 때,

x, y, z축 각각의 성분을 가지고 이동량을 정했던 것처럼 3차원 공



임의의 회전축에 대한 3차원 공간 회전

그림 4. 임의의 회전축에 대한 3차원 공간 회전

간 회전 시에도 공간 회전축을 x, y, z회전축으로 분해하여 표현 할 수 있다. 이러한 방법을 몇 가지 살펴보자.

Ⅰ. 변환의 연결

회전 변환 행렬을 서로 곱하면 원하는 회전 변환을 수행 할 수 있다. 예를 들어, 3차원 좌표 ρ를 x축을 기준으로 30˚회전 시킨 후, y축을 기준으로 60˚ 회전시키려면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p' = R_y(60^\circ)R_x(30^\circ)p = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & 0 & \sin 60^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 60^\circ & 0 & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ 0 & \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

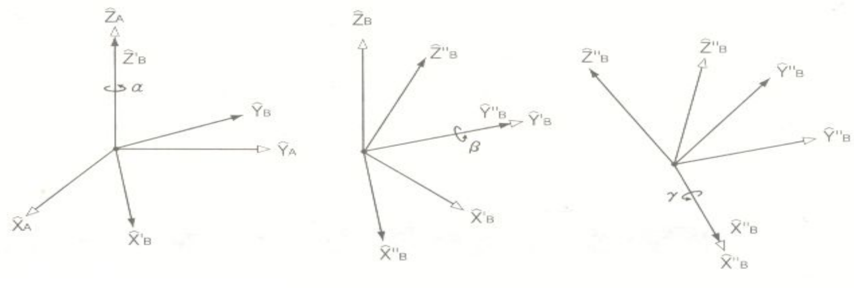
———식⑤

한 가지 주의해야 할 점은 x축으로 30˚를 회전하면 좌표축 전체가 이동하기 때문에 y축의 위치도 바뀐다는 점이다. 따라서 y축 기준으로 60˚ 회전하는 회전축은 x축에 대한 회전변환이 반영된 좌표축을 기준으로 수행된다. 따라서 회전 변환 행렬을 곱하는 순서에 따라 변환된 결과가 다르다는 것을 명심해야 한다.

Ⅱ. 오일러 변환

오일러 변환은 회전 변환 행렬이나 좌표축의 자세를 표현하는 매우 직관적인 방법이다. x, y, z축을 각각 회전축으로 했을 때 각 회전축에 대한 회전각으로 3차원 공간 회전 변환 행렬을 정의한다. 오일러 변환에는 여러 가지 방법이 있지만, 가장 대표적으로 사용하는 $Z-Y-X$오일러 변환에 대해서 설명하겠다.

$Z-Y-X$오일러 변환은 Z축으로 α, Y축으로 β, Z축으로 γ 를 회전시킨 각각의 회전 행렬을 곱함으로써 이루어지기 때문에 붙여진 이름이며, 자세한 것은 아래의 그림을 살펴보면서 설명하겠다.



오일러 회전 변환

그림5. α회전　　　　그림6. β회전,　　　　그림7. γ회전

위의 그림에서 보듯이 오일러 변환은 우선 z축을 기준으로 시작한다.

i) z축을 기준으로 α만큼 회전한 것이 맨 그림5이다. 회전 변환 후에는 초기 좌표축 $\widehat{X_A}$는 $\hat{X}'_B$로 $\widehat{Y_A}$는 $\hat{Y}'_B$로 각각 변환된다.

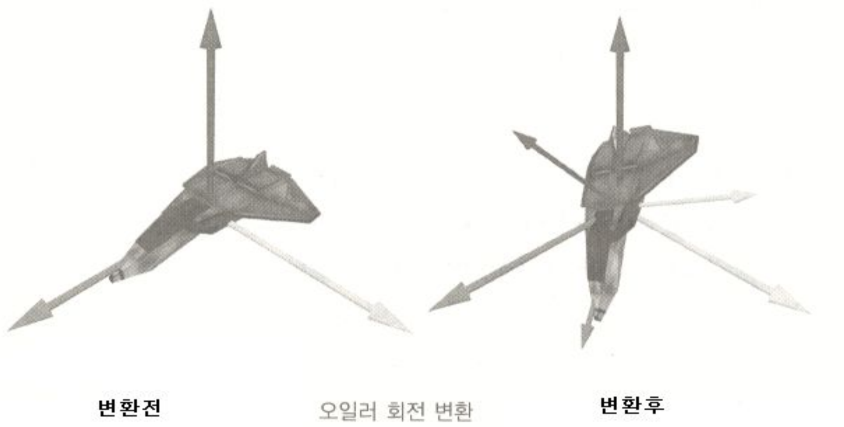
ii) 다음 그림6에는 좌표축상의 $\hat{Y}'_B$축을 기준으로 β만큼 시킨다. 이것이 그림6이며 $\widehat{X_A}$는 $\hat{X}''_B$로, $\hat{Z}_A$는 $\hat{Z}''_B$로 변환된다.

iii) 마지막으로 그림7에서는 $\hat{X}''_B$축을 기준으로 γ만큼 회전시키면 초기의 $\widehat{X_A}$, $\hat{Y}_A$, $\widehat{Z_A}$좌표계를 $\hat{X}''_A$, $\hat{Y}''_A$, $\hat{Z}''_A$ 로 변환하는 공간상의 회전 행렬을 구성하게 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}^A_B R_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

아래의 그림은 $RZ(30^\circ)RY(30^\circ)RX(30^\circ)$ 오일러 변환을 수행한 그림이다. 왼쪽 그림은 변환되기 전이고, 오른쪽 그림은 오일러 변환이

수행된 그림이다.



(2) 사원수 응용

대부분의 사람들은 자연 현상이나 과학, 기술 분야에서 이미 이루어진 최종 단계만을 살피는 경우가 있다. 하지만 모든 현상이나 과학, 기술 분야에는 대부분이 수학이 접목되어 있다. 앞에서 배운 사원수 역시 많은 분야에서 응용이 되고 있다. 특히 사원수의 응용을 통해 3차원컴퓨터 게임의 캐릭터 동작제어, 인공위성 자세 제어, 카메라 회전, 군사 무기의 회전 등, 자세의 회전을 효율적으로 표현하는데 큰 역할을 하고 있다.

§ 1. 사원수 변환

앞에서 언급한 사원수는 컴퓨터 그래픽과 물리 응용에서 회전을 나타내는 강력한 수단이다. 하지만 불행히도 사원수는 수학적 복잡성 때문에 실제 사용자는 이해하기가 어려운 단점이 있다. 하지만 사원수는 게임에 응용되는 대표적이면서도 중요한 이론이다. 즉 사원수는 3차원 공간 회전을 표현하는 여러 가지 방법 중 하나다. 게임에서의 임의의 카메라 조작이나 키 프레임 애니메이션의 보간 등에 매우 유

용하게 사용된다. 우선 사원수는 3차 행렬에 대한 값진 대체물이다. 회전 행렬과 대수학으로부터 사원수를 추출하여 공간과 시간 비용을 줄일 수 있다.

이제 그 복잡한 수식이 게임에서 어떻게 사용되는지 알아보자. 즉 어떻게 게임에 적용되는지 알아보도록 하겠다.

사원수는 공간상의 임의의 회전 변환을 나타내기 위해 유용하게 사용된다. 결론부터 이야기 하자면 사원수의 변환은 다음과 같은 단위 사원수를 통해서 이루어진다.

단위사원수 : $q = a + bi + cj + dk = \cos\frac{\theta}{2} + e\sin\frac{\theta}{2} = S_q + V_q$

여기서 벡터 e는 회전축의 단위 방향 벡터를 나타내며, θ는 회전각이다.

벡터 r을 회전축 단위 방향 벡터 e에 대해서 θ만큼의 회전각으로 공간 회전 시킨 벡터 r'은 다음과 같은 단위 사원수 q 를 통해 얻을 수 있다.

사원수 변환식 : $r' = q\ r\ q^{-1}$

사원수 변환식의 계산은 벡터 $r = r_x i + r_y j + r_k k$로 놓고, 사원수 곱셈을 이용하여 수행한다. 벡터 r을 회전축 단위 방향 벡터 e_1에 대해 θ_1만큼 회전시킨 후, 회전축 단위 방향 벡터 e_2에 대해 θ_2을 수행하면 된다. 즉 다음과 같은 각각의 변환을 표현하는 단위 사원수를 만든다.

변환을 표현하는 단위 사원수 : $q_1 = \cos\frac{\theta_1}{2} + e_1\sin\frac{\theta_1}{2}$, $q_2 = \cos\frac{\theta_2}{2} + e_2\sin\frac{\theta_2}{2}$

그리고 다음과 같이 변환 순서대로 안쪽부터 곱해 나가면 된다.

$r' = q_2\,(q_1\,r\,q_1^{-1})\,q_2^{-1} = (q_2\,q_1)\,r\,(q_1^{-1}\,q_2^{-1})$

이러한 변환을 연결할 때 사원수는 행렬표현 방법에 비해서 장점을 갖는다. 두 사원수의 곱셈에는 16번의 스칼라 곱셈과 덧셈이 수행되지만, 3×3 회전 변환 행렬 두개를 곱할 경우는 총 27번의 연산이 필요하기 때문에 사원수 곱셈을 통한 회전 변환의 표현이 계산속도가 더 빠르다. 또한 회전 변환을 행렬로 표현하는 데 사용되는 오일러 변환은 한 축의 각도가 90°가 되면 자유도를 잃어버리는 짐발락[3](Gimbal-Lock)이라는 현상이 발생하여 회전이 부드럽지 못하게 된다. 이때 사원수 변환을 사용하면 공간상의 임의의 축에 대한 회전이기 때문에 오일러 변환의 문제가 생기지 않는다. 따라서 사원수 변환을 사용하면 4개의 요소로 이루어진 사원수만을 이용하여 임의의 회전축에 대한 회전 변환을 효율적으로 표현할 수 있지만, 우리가 게임 프로그래밍에 사용하는 Direct3D 나 OpenGL 같은 3D 그래픽 API에서는 사원수를 직접적으로 지원하지 않는다. 3D 그래픽 API에서 기본적으로 지원하는 변환은 행렬변환이기 때문에 게임에 사원수 변환을 적용하려면 최종적으로 행렬의 형태로 변환해 줘야한다.

§ 2. 사원수의 행렬변환

하나의 벡터를 임의의 회전축에 대해서 회전시키는 공간 회전을 시작으로 사원수 변환의 행렬표현에 대해 알아보자.

아래 그림은 벡터 r을 회전축 방향 벡터 e에 대하여 θ만큼의 회전각으로 공간 회전시켰을 때 최종적으로 회전 변환된 벡터 r'과의 관계에 대해서 도시한 것이다.

그림의 원판은 회전면을 나타낸 것이고, 벡터 b는 벡터 r의 끝점으로부터 회전축까지를 연결한 벡터이며, 그림에서는 벡터 b의 끝점을

3) 짐발 (Gimbals) : 나침의·크로노미터 따위를 수평으로 유지하는 장치

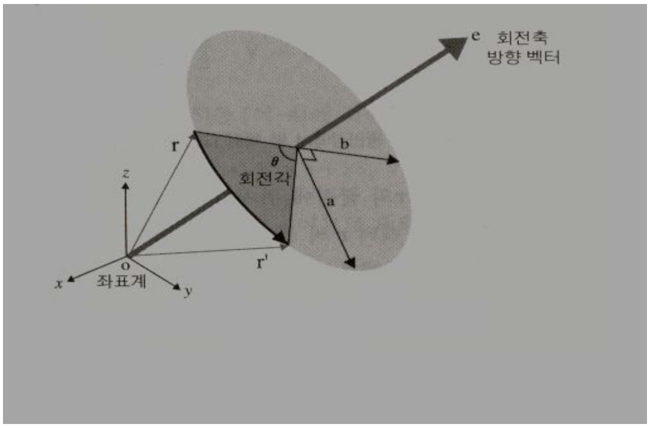


그림 8. 임의의 회전축에 대한 벡터의 공간 회전

회전축의 중심으로 이동시켰다. 여기서 우리가 구하고자 하는 것은 벡터 r을 벡터 $r^{'}$으로 회전 변환하는 변환 행렬 A며, 식으로 표현하면 다음과 같다.

회전 변환식 : $r^{'} = A\,r$

변환 행렬 A를 구하기 위해서는 위의 그림으로부터 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 관계를 우선 파악해야 한다. 다음 그림 9-a는 그림 8에서 밝은 회색으로 표현된 회전 평면을 그 평면에서 수직에서 바라본 것이다. 즉 회전축의 끝에서 평면에 수직으로 바라본 것이므로 회전축은 원의 가운데 굵은 점으로 표현됐다.

그림 9-b를 보면 벡터 b를 원래의 위치인 벡터 r의 끝점에 위치시켰음을 알 수 있다. 이는 실제적으로 그림 9-c에서와 같이 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 끝점을 잇는 벡터를 찾아내기 위함이다. 그림 9-b에서 삼각형의 삼각함수 관계를 이용하여 그림 9-c와 같이 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 끝점을 잇는 벡터 $(1-\cos\theta)b+\sin\theta a$를 찾아낼 수 있다.

이를 다시 3차원 공간에서 표현하면 그림 10과 같으며, 다음과 같

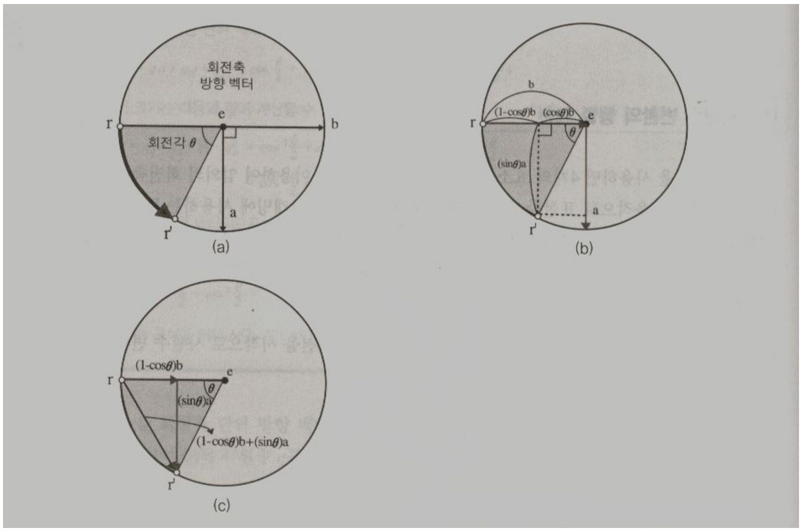


그림 9. 회전 평면상에서 본 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 관계

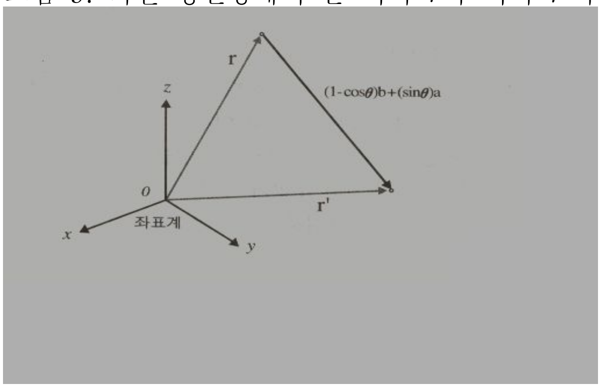


그림 10. 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 관계

은 벡터 r과 벡터 $r^{'}$의 관계를 얻을 수 있다.

$$\boxed{r^{'} = r + (1-\cos\theta)b + \sin\theta a}$$ ----------①

여기서 벡터 $a = e \times r$, 벡터 $b = e(e \times r)$이다. 따라서 ①에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\boxed{r^{'} = r + (1-\cos\theta)e \times (e \times r) + \sin\theta(e \times r)}$$ -----------②

다음과 같은 삼각함수 반각의 공식을 ②에 적용하면 다음 ③이 나

온다.

삼각함수 반각 공식 : $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$, $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

$$r' = r+(2\sin^2\frac{\theta}{2})e\times(e\times r)+(2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2})(e\times r)$$

$$+r+2(\sin\frac{\theta}{2}\ e)\times(\sin\frac{\theta}{2}\ e\times r)+(2\cos\frac{\theta}{2})\sin\frac{\theta}{2}(e\times r) \qquad \text{------③}$$

③의 두 번째 줄은 첫째 줄의 $(2\sin^2\frac{\theta}{2})$ 와 $(2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2})$를 { }안으로 배분하여 표현한 것이다. 여기서 회전을 표현하는 단위 사원수를 다시 한 번 생각해 보자.

$$q=a+bi+cj+dk=\cos\frac{\theta}{2}+e\sin\frac{\theta}{2}= S_q+V_q \qquad \text{---④}$$

$$(S_q=\cos\frac{\theta}{2},\quad V_q=e\sin\frac{\theta}{2})$$

따라서 위의 ④를 ③에 적용하면 다음 ⑤와 같은 벡터 식을 얻을 수 있다.

$$r' = r+2V_q\times V_q\times r+2S_qV_q\times r \qquad \text{----------⑤}$$

여기서 $V_q=[\,b,\ c,\ d\,]$이므로 벡터 V_q의 외적 부분은 다음과 같이 표현될 수 있다. $V_q\times=\begin{bmatrix}0&-d&c\\d&0&-b\\-c&b&0\end{bmatrix}=Q$

또한 ⑤의 $V_q\times$ 를 Q로 대체하고, 벡터 r에 대해서 묶어주면,

$$r'=(I+2QQ+2S_qQ)r \qquad \text{----------⑥}$$

⑥의 괄호 안은 모두 행렬로 표현됐으며, 바로 이 행렬이 벡터 r과 벡터 r'으로 회전 변환하는 공간 회전 변환 행렬 A 이다.

회전 변환 행렬 : $A = I+2QQ+2S_qQ$	----------⑦

여기서 I, Q, S_q 는 다음과 같다.

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0&-d&c\\d&0&-b\\-c&b&0\end{bmatrix},\quad S_q=a$$

이를 ⑦에 대입하여 계산하면 최종적으로 회전 변환 행렬 A 는 다음과 같다.

$$A=\begin{bmatrix}2(a^2+b^2)-1 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac)\\ 2(bc+ad) & 2(a^2+c^2)-1 & 2(cd-ab)\\ 2(bd-ac) & 2(dc+ab) & 2(a^2+d^2)-1\end{bmatrix}$$

§ 3. 사원수 응용의 구체적 예

Ⅰ. 게임에서의 사원수

컴퓨터 그래픽과 물리 응용에서 회전을 나타내는 강력한 수단이 되는 사원수는 사실상 수학적 복잡성에도 불구하고 사원수를 이용하는 이유는 게임 그래픽이나 컴퓨터 그래픽에서 나타내고자 하는 것이 결국은 실제와 얼마나 비슷하게 하는가 하는 이유와 현실적인 시각효과에 대한 게이머들의 욕구 때문이라고 할 수 있다.

만약 우리가 알고 있는 3D 온라인 게임 「리니즈」에 대하여 생각해 보자. 리니즈를 좋아하는 게이머들은 대부분 리니즈의 실감나는 입체감이나 움직임 그리고 전체적으로 매끄럽게 이어지는 흐름 때문에 게이머들이 리니즈에 빠진다. 또한 3D 온라인 자동차 경주 게임 「카트라이더」를 생각해보자. 만약 카트라이더에서 자동차들의 움직임이 컴퓨터 키 프레임보다 늦게 되면 과연 실감나는 자동차 경주가

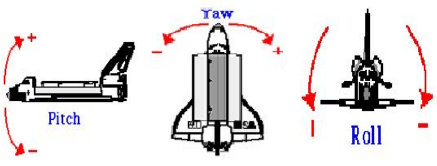
이루어질까? 또한 그래픽의 모양이 깨지거나 흔들린다면 실제로 달리는 느낌을 게이머들이 느낄 수 있을까? 바로 이러한 문제점 부분들에 대한 보완의 방법으로 사원수를 응용하고 있다. 앞에서 언급한 오일러변환을 이용한 또는 행렬 변환을 응용한 게임을 다루다 보면 종종 그래픽의 키 프레임 보간, 그래픽의 충돌로 인한 그래픽 손상, 그리고 실제감(리얼리즘)들이 많이 떨어지는 일들이 종종 발생한다.

그럼 다음 프로그램을 통해 오일러 변환과 사원수 변환의 어떤 차이점이 있는지 알아보도록 하자.

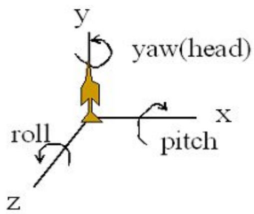
(프로그램 1) 오일러 변환을 이용한 움직임의 표현

오일러 변환을 이용한 움직임의 표현은 흔히 수학에서 사용하는 X, Y, Z 축을 이용하여 움직임을 표현하는 방법이다. 실제로 프로그림을 이용하여 확인해보면 다음과 같은 변화를 일으킴을 눈으로 볼 수 있다.

프로그램을 실행하면 빨간색 사각형은 X축, 파란색 사각형은 Y축, 연두색 사각형은 Z축을 나타낸다. 따라서 Pitch의 변화는 XZ 축의 변화량, 즉 XZ축이 변화하는 각을 나타낸다. 그리고 Yaw의 변화는 XY축의 변화량, 즉 XY축이 변화하는 각을 나타낸다.



각 축에 따른 변화량



x,y,z 축 각각에 대한 각도

주기적으로 Pitch와 Yaw의 각의 변화를 주면 실제로 움직이는 사각형의 움직임을 살펴볼 수 있다. 그리고 다시 회전을 처음 상태로 회전 했을 경우 처음의 모양이 바뀌지 않음을 알 수 있다. 즉 360°회전을 했을 경우는 처음의 위치로 돌아와 움직임이 겹침을 직접 바라볼

수 있다. 이와 같은 오일러 변환의 움직임으로 게임 프로그램을 만들게 되면 움직임의 변화가 나타나야 하는 생동감이 떨어짐은 물론 반복적인 화면의 구성으로 쉽게 지루하고 따분한 화면을 구성하게 된다. 즉 게이머들이 원하는 시각효과를 나타낼 수 없게 되는 것이다.

또한 한 축의 각도가 90˚가 되면 자유도를 잃어버리는 짐발 락(Gimbal-Lock)이라는 현상이 발생하여 회전이 부드럽지 못하게 되는 점을 살펴볼 수 있게 된다. 이것은 게임 그래픽의 깨짐 현상과 화면이 일그러지는 현상을 나타냄으로 게임의 질적인 면을 좌우한다. 또한 회전이 부드럽지 못하게 됨으로서 보간이 생겨 게임의 흐름이 늦어지는 경우도 생기게 된다.

(프로그램 2) 사원수 변환을 이용한 움직임의 표현

사원수 변환을 통한 프로그램의 실행을 하면서 오일러 변환과 어떤 차이점이 생기는지 살펴보자.

처음에 프로그램을 실행하면 오일러 변환과 같이 빨간색 사각형은 X축, 파란색 사각형은 Y축, 연두색 사각형은 Z축을 나타낸다. 하지만 오일러 변환과 달리 사원수 변환은 임의의 X,Y,Z축이 존재하여 그 X,Y,Z축을 기준으로 회전을 한다. 즉 Pitch는 임의의 축에 대한 XZ 축의 변화량, Yaw는 임의의 축에 대한 XY축의 변화량을 나타낸다.

따라서 빨간색 사각형과 파란색 사각형, 연두색 사각형 전체가 임의 회전 변화에 따라 동시에 영향을 받는다. 따라서 회전간의 반복이 사라지게 됨을 느낄 수 있게 된다. 이와 같은 변화로 게임의 생동감이 증대되고 게임의 사실성이 크게 확대된다. 즉 매 회전마다 움직임의 변화를 자유롭게 줄 수 있는 장점이 생긴다.

또한 회전간의 겹침 현상이 없어짐으로 화면상의 게임 그래픽의 충돌 현상을 없애 줄 수 있으므로 게임의 흐름이 매끄럽게 이어지고

전체적인 게임의 속도가 향상될 수 있다.

Ⅱ. 짐발 락(Gimbal-Lock)

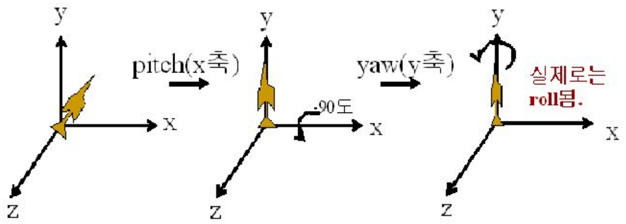
Euler Angles는 3차원 공간에서 물체가 취할 수 있는 방향을 나타내는데 사용되는 세 개의 각도 값의 조합을 말한다. 18세기 수학자 오일러가 착안한 것으로 3차원 공간에서는 3차원 직교 좌표계의 좌표축인 x, y, z 축에 대한 회전을 적당히 조합하면 임의의 방향을 나타낼 수 있다는 사실이다. 2차원 평면에서 물체의 방향을 지정해주려면 단지 하나의 각도 값이면 충분하지만 3차원 공간에서는 최소한 세 개의 각도 값이 있어야 한다. 유의할 점은 오일러 앵글은 특정 회전축의 조합 하나를 말하는 것이 아니라 3차원 공간에서 임의의 방향을 나타낼 수 있는 조합이라면 어떤 조합도 다 오일러 앵글이다.

앞에서 보인 프로그램은 보통의 경우 많이 쓰이는 조합으로 3차원 그래픽의 경우에서 흔히 쓰는 X, Y, Z 축 회전을 차례대로 조합한 것이다.

그런데 문제는 수학적인 견지에서 볼 때 이러한 임의의 세 각도 값이 서로 독립적이지 않다는 것이다. 따라서 오일러 변환은 편하고 유용하게 다양한 조합을 가져다 사용할 수 있는 반면 치명적인 문제점이 있다. 예를 들어 실제 로보트 팔을 제어하거나 할 때 어떤 축의 회전이 하나마나 한 경우가 생기거나, 어떤 그래픽의 실체를 x축이나 y축에 의해 회전의 변화를 줌에 따라 생기는 Roll현상이 일어나는 현상이 있는데 이러한 모순된 현상을 짐발 락(Gimbal Lock)이라고 한다. 아래 그림에서 살펴보면 x, y, z 순서로 회전할 경우 만약 y축 회전이 90°이면 x축 회전과 z축 회전이 동일한 회전이 되어버려서 자유도가 하나 상실하게 되는데 이런 경우를 바로 짐발 락(Gimbal Lock)이라고 한다.

바로 아래 그림과 같은 경우에 한 축의 회전이 잘 회전되는 것처럼 보이지만 실제로는 한축의 회전이 Roll현상이 발생하게 되어서 회

전이 되지 않거나 부드럽지 않게 된다. 또한 그래픽이 깨지거나 프로그램의 속도가 떨어지는 경우가 생긴다.



따라서 오일러 변환에 생기는 짐발 락(Gimbal Lock)현상에 대한 구체적인 해결방안이 사원수의 변환을 이용한 것이다.

§ 4. 사원수의 응용에 따른 장점

이처럼 사원수는 다소 어렵긴 하지만 게임 프로그램의 질적 향상과 시각효과를 높이는데 중요한 역할을 담당한다. 결과적으로 게임에서의 카메라조작이나 키 프레임 애니메이션의 보간에 보다 쉬운 행렬표현을 사용하지 않는 이유는 사원수가 행렬표현 방법에 비해서 다음과 같은 큰 장점 2가지를 갖기 때문이다.

〈장점1〉 두 사원수의 곱셈에는 16번의 스칼라 곱셈과 덧셈이 수행되지만, 3×3 회전 변환 행렬 두개를 곱할 경우는 총 27번의 연산이 필요하기 때문에 사원수 곱셈을 통한 회전 변환의 표현이 계산속도가 더 빠르다. 즉 계산 속도가 빠르다는 말은 보다 안정적이고 보다 부드러운 3D의 움직임을 표현할 수 있다는 말이 된다.

〈장점2〉 회전 변환을 행렬로 표현하는 데 사용되는 오일러 변환은 한 축의 각도가 90°가 되면 자유도를 잃어버리는 짐발 락(Gimbal-Lock)이라는 현상이 발생하여 회전이 부드럽지 못하게 된다. 이때 사원수 변환을 사용하면 공간상의 임의의 축에 대한 회전이기 때문에 오일러 변환의 문제가 생기지 않는다. 따라서 회전 간에 그래픽이 겹치는 현상이나 그래픽이 깨지는 현상을 막을 수 있다.

제5장 논문의 결과 분석과 방향제시

(1) 고등학교 교육과정에서의 복소수와 벡터의 지도방안

본 논문은 사원수를 소재로 하여 수학의 특성을 살펴보고 고등학교 수학에서의 벡터 단원과 복소수의 단원의 내용을 구성해 보았다. 벡터와 복소수를 도입하는 방법은 해석적 방법과 대수적 방법 등이 있으나 고등학교에서는 해석적 방법으로 도입하는 것이 바람직하다고 본다. 벡터와 복소수는 기하학적인 상상력과 계산능력을 모두 필요로 하는 부분이다. 따라서 학생들이 처음 접하게 될 때 어려워하고 의미를 모르는 채 단순히 계산 방식을 암기하여 문제를 해결하기 쉽다. 이러한 문제점은 수학의 여러 성격을 이해하고, 좀 더 다양한 예시와 적용부분을 지도한다면 해결될 수 있다고 생각한다.

벡터의 뜻	⇒	벡터의 덧셈과 뺄셈	⇒	벡터의 실수배	⇒	벡터의 내적	⇒	벡터의 성분

(유형1)

벡터의 기초개념	⇒	위치 벡터	⇒	벡터의 성분	⇒	도형의 방정식

(유형2)

위의 표는 고등학교 과정에 나오는 벡터의 내용과 순서이다.

표에서 보는 것과 같이 벡터는 고등학교 과정의 벡터부분은 크게 ‘벡터와 그 연산’, ‘벡터의 성분과 내적’, ‘벡터의 응용’의 세 가지 내용으로 구성되어 있다.

대부분의 교과서가 도입부분이나 단원이 끝난 후 준비학습의 내용과 벡터와 관련된 이야기 그리고 본 논문의 주제인 사원수 응용을

통해 학생들에게 흥미를 심어주려하고 있다. 이러한 부분은 교과서의 본문 내용을 더욱 풍부하게 이해할 수 있는 자료가 될 수 있다. 수학 교과서의 본문은 이론적인 내용에 치중된 경향이 있는데, 그러한 이론이 발생된 배경과 과정과, 옛 학자들의 이야기, 그리고 현실적인 적용의 예를 풍부하게 이야기 해 주는 것이 학생들이 내용을 이해하는데 더욱 도움이 되리라 생각한다.

또한 벡터를 지도함에 있어서도 벡터에서 끝이 나는 것이 아니라 복소수에서 사원수까지 확장 시킬 수 있도록 도와주고 새로운 수학의 분야에 응용됨을 알려줌으로써 학생들로 하여금 기존의 사고방법을 확장시켜 줄 필요성 있다. 그럼으로써 학생들이 장래의 직업에 대한 인식을 키워줌은 물론 적절한 방향 제시를 해 줄 수 있다. 따라서 현직의 교사들이 좀 더 많은 자료를 가지고 학생들이 필요로 하는 부분을 연구하고 생각하는데 본 논문이 좋은 자료가 되었음 한다.

(2) 연구 결과 적용 방안

이 논문을 통해 기대되는 효과는 사원수라는 새로운 수의 체계를 학생들에게 소개함으로서 이전까지 배웠던 수학의 수 체계의 확장이 복소수에서 사원수로 어떻게 확장되었는지 알 수 있을 것이다. 그리고 사원수를 응용함이 오일러 변환에 대한 짐발 락(Gimbal-lack)문제에 대한 해결책을 제시하는 것으로서 수학을 통해 다른 학문이나 현실에 응용할 때 필요한 문제 해결력을 제시한다. 또한 사원수의 응용과 구체적인 활용사례를 통해 지루하고 따분하고 어렵기만 한 수학을 왜 배우는지 학생들에게 좀 더 구체적이고 현실적인 방향을 제시할 수 있을 것이다. 또한 다른 학문에 응용되는 수학으로서의 중요성과 학생들의 관심이 점점 커지고 있는 게임

이라는 분야에서 수학이 얼마나 많은 부분에서 중요하게 응용되고 활용되는지 알게 함으로서 앞으로 학생들의 장래 직업에 대한 방안을 제시 할 수 있을 것이라 생각된다. 그리고 마지막으로 고등학교 현직 교사들에게 복소수의 연장선에서 이 논문에 대한 내용을 소개함으로서 학생들의 기대와 흥미를 유도 할 수 있는 좋은 자료가 될 것으로 생각된다.

따라서 학생들에게는 수학교육의 필요성과 흥미 그리고 장래에 대한 좋은 길잡이가 될 수 있고 현직 교사에게는 학생들의 수업에 좋은 자료로 사용함으로서 학생들에게 수학교육의 필요성을 일깨울 수 있을 것으로 기대된다.

-참고 문헌-

1. 김 건 호(1987) [On the Quaternions] 성균관 대학교 교육대학원
2. 김 금 일(1987) [사원수와 행렬에 관하여] 공주사범대학 교육대학원
3. 신 현 성 외(2002) [고등학교 수학10-가] 천재교육
4. 이 희 진(2004) [On the Integral Quaternions] 전북대학교 대학원
5. 원 종 애(1996) [고등학교 교육과정에서의 벡터의 지도에 관한 연구] 서강대학 교육대학원
6. 웬디 스타일러, 더스틴 클링맨, 카베 카히리쯔 공저(2004) [게임 프로그래머를 위한 기초 수학과 물리] 제우미디어
7. 주 정 식, 주 영 만 외 7 공통수학, 수학Ⅰ, 수학ⅡⅠ 중앙교육진흥연구소
8. 천 장 호 (2000) [현대 대수학] 대명사
9. 최 용 준 외(2003) [고등학교 수학I] , [고등학교 수학Ⅱ] 천재교육
10. 최 종 현, 이 상 욱, 김 용 준 공저(2003) 좋은 게임을 만드는 핵심원리 한빛 미디어
11. Crowe, Michael J.(1967). A History of Vector Analysis University of Notre Dame
12. David H. Eberly / 유채곤, 차미리 역(2003) [게임 물리 바이블] 사이텍 미디어
13. Howard Eves / 허민, 오혜영 옮김(1996) 수학의 위대한 순간들 경문사
14. Keith Devlin / 허민 옮김(1996) [수학: 새로운 황금시대] 경문사
15. Kuipers, Jack.(2002). Quaternions and Rotation Sequences Princeton University
16. Redfield. Robert H / Robert H. Redfield.(1993) Abstract algerbra 경문사
17. Steven J. Leon.(2002) [Linear Algebra with Applications] 경문사
18. Ward, J. P.(1997) Quaternions and Cayley Numbers Kluwer Academic Publishers.

♠관련 사이트

Links

■Geometric Tools documentation Includes several papers focusing on computer graphics applications of quaternions. Covers useful techniques such as spherical linear interpolation.

Geometric Tools source code Includes free C++ source code for a complete quaternion class suitable for computer graphics work, under a very liberal license.

■Doing Physics with Quaternions

■Quaternions for Computer Graphics and Mechanics (Gernot Hoffman)

Quaternion Calculator [Java]

The Physical Heritage of Sir W. R. Hamilton (PDF)

■Hamilton's Research on Quaternions

Quaternion Julia Fractals 3D Raytraced Quaternion Julia Fractals by David J. Grossman

ABSTRACT

Quaternion group and Application

Woo, Sung Sik
Major in Mathematics Education
HanNam University

The study of quaternions goes back to William Rowan Hamilton at 1843. He tried to expand the concept of 2 dimensional complex numbers to a certain analog in 3 dimensional space. He finally reach to the quaternion which is in 4 dimension.

As a non commutative extension of the complex numbers, recently the quaternion has wide applications in the area of computer game. The quaternion plays an important role in expressing the position's rotation like the physics and the three-dimensional computer game character's action control and the artificial satellite's position control and etc.

The purpose of this thesis is to study about the quaternion, from the birth to its recent application to computer game. The organization of this paper is as follow.

In Chapter 2, we begin from background of complex numbers to the invention of quaternion due to Hamilton.

In Chapter 3, we look around the complex number and the vector

theory appeared in middle and high school text books. We also study the advanced concepts of quaternion, such as quaternion group and quaternion ring.

Chapter 4 is devoted to investigate how to use quaternion in computer games. We try to indicate the usefulness of quaternions in the areas.

In final Chapter 5, we suggest some ways to apply the result of this work to high school mathematics curriculum, in order to make students feel mathematic more comfortable and friendly.