교육학 석사학위논문

사원수와 사원수 방정식에 대한 연구

전남대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

전 은 주

2012 년 8월

교육학 석사학위논문

사원수와 사원수 방정식에 대한 연구

전남대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

전 은 주

2012 년 8월

사원수와 사원수 방정식에 대한 연구

이 논문을 교육학 수학교육전공 석사학위
논문으로 제출함

전남대학교 교육대학원
교육학과 수학교육전공
전 은 주
지도교수 박 종 률

전은주의 교육학 수학교육전공 석사 학위논문을
인준함

심사위원장 김 인 수 (인)
심 사 위 원 박 종 률 (인)
심 사 위 원 신 보 미 (인)

2012 년 8월

목　　차

사원수와 사원수 방정식에 대한 연구

전 은 주

전남대학교 교육대학원
교육학과 수학교육전공
(지도교수 : 박종률)

(국문초록)

현재 사원수나 사원수 방정식에 대한 자료나 연구가 많이 부족한 상태이다. 따라서 본 논문에서는 사원수에 대한 개념과 그에 따른 정리들을 증명하여 사원수에 대한 정보를 제공하고, 더 나아가 선행 연구들을 통해 사원수 방정식의 해법에 대한 정보를 제공한다. 실제로, 그것을 이용해 2차와 3차 사원수 방정식에 대한 해를 구하였다.

본 연구의 목적은 수학을 공부하는 학생들과 수학을 가르치는 교사들에게 사원수에 대한 정보를 제공하고, 실수 계수에서 사원수 계수로의 확장된 사원수 방정식을 소개하고 해를 구해봄으로써 방정식에 대한 이해의 폭을 넓히는 데 있다.

1. 서론

가. 연구의 필요성 및 목적

수학을 왜 배워야 하는지에 대한 의문을 품었다면 개개인에 따라 다양한 이유가 있을 것이다. 수학이 단지 어렵고 재미가 없어서 혹은 지금 배우고 있는 내용이 더 나아가 필요가 있을지 없을지에 대한 의문이 들어서 일수도 있다. 현재 시행되고 있는 2007년 개정교육과정안의 수학교육의 목표를 보면 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다(교육인적자원부 고시 제 2007-79호)라고 명시하고 있다. 여기서 수학교육의 목표 중 수학의 실용적 가치에 기인하여 살펴보면 수학교육을 통해 사회생활을 하거나 장차 과학이나 다른 학문을 공부하는 데 유익하기 때문에 수학을 배워야 한다.

윌리엄 해밀턴(Hamilton, Sir William Rowan, 1805~1865, 영국)이 고안한 사원수(quaternion)는 복소수의 확장된 체계로서 실제적으로 많은 과학, 게임 분야에서 사용하고 있다. 사원수를 이용하면 회전을 효과적으로 표현할 수 있어 컴퓨터 게임에서 3차원 캐릭터의 동작제어나 인공위성의 자세 제어 등에 쓰인다.

현재 우리나라의 게임시장은 큰 규모로 운영되고 있고, 인공위성 또한 중요한 과학 분야로서 대두되고 있다. 따라서 실용적 가치로서의 수학을 공부하는 예로 사원수는 합당하므로 사원수를 좀 더 주의 깊게 공부할 필요가 있다.

그러나 대부분의 대수 책에서는 사원수를 한두 장의 설명으로 끝내버렸고, 어떤 대수 책은 사원수에 대한 내용을 찾아볼 수 없었다. 사원수를 공부하고자 하는 학생들에게 사원수에 대한 정보가 미비한 실정이다.

이에 본 연구에서는 사원수에 대한 기본이론을 시작으로 사원수에 대한 성질들을 소개하고 사원수에 따르는 정리들을 증명함으로써 사원수에 대한 정보를 제공하고 이해의 폭을 넓히는데 목적을 두었다. 또한 실수 계수를 갖는 방정식을 사원수 계수를 갖는 방정식으로 확장하였을 때, 사원수 방정식의 해를 구하기

위한 개념과 방법을 소개하고 정리하였다. 또한 체에서 성립하였던 대수적 성질이 사원수에서도 성립하는지를 살펴보고 실제로 이러한 이론들을 토대로 2차 사원수 방정식과 3차 사원수 방정식의 해를 구하였다. 이런 과정을 통해 이론으로만 제시했던 사원수와 사원수 방정식에 대한 개념들을 실제 해를 구하는 과정에 적용해 봄으로써 제시한 이론들을 깊이 이해하고 그 쓰임을 확인해 보고 더 나아가 응용할 수 있도록 하고자 한다.

이를 통해 수학을 공부하는 학생들에게 사원수와 사원수 방정식에 대한 정보를 제공하고 복소수와 방정식을 가르치는 교사들에게 그것들의 확장된 체계로서 미리 숙지할 수 있도록 하는데 논문을 쓴 목적이 있다.

나. 연구 내용

사원수를 수학의 실용적 가치에 기인하여 그 중요성을 인지하고 사원수에 대한 이해의 폭을 넓히고자 연구를 하였다. 연구방법으로는 다음과 같다.

1) 사원수에 대한 이론들을 소개 한다.
2) 사원수의 방정식의 해를 구하는 방법을 조사해 보고, 사원수 안에서의 대수적 성질을 살핀다.
3) 예를 들어, 사원수 방정식을 해를 구한다.

다. 연구의 제한점

실제적으로 사원수 방정식의 해를 구할 때, 손으로 계산하기에 어려움이 따라 maple이라는 수학프로그램을 이용하여 계산을 하였다. 또한, 본 연구에서는 고차방정식의 해를 구하는 것에 목적이 있는 것이 아니고 사원수 방정식의 해를 구해보는 과정들을 공부하고 방정식을 계산해 봄으로써 방정식의 대수적인 구조를 좀 더 깊이 이해하려는데 목적이 있으므로, 계산이 복잡한 4차 이상의 방정식의 계산은 하지 않고, 2차와 3차방정식의 해를 계산해 보는 것으로 제한을 두고 연구를 진행하였다.

2. 사원수(quaternion)의 성질

가. 사원수의 기본 이론

사원수에 대한 정의와 그에 따르는 기본 이론들을 소개하고, 정리들을 증명해 보인다.

정의 1) 사원수의 정의

사원수는 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in H$에 의해 주어지며 $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$ 이다.

이때, i, j, k는 다음과 같이 정의한다.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

따라서 사원수는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다.

예를 들어, $4+5i = 4+5i+0j+0k$이므로 사원수의 j, k의 계수가 0일 때, 사원수를 복소수로 나타낼 수 있다.

특히, i, j, k의 계수가 0일 경우 사원수는 실수가 된다.

정의 2) 사원수 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$가 주어졌을 때,

$Re\, q = a_0$: q의 실수부분

$Im\, q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$: q의 허수부분

정의 3) 사원수의 상등

두 사원수 $q_0 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $q_1 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여,

$q_0 = q_1 \leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ 을 만족하며 이때 두 사원수는 상등(서로 같다)이라고 정의한다.

정의 4) 사원수의 합과 곱

두 사원수 $q_0 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $q_1 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 사원수의 합과 곱을 다음과 같이 정의한다.

$q_0 + q_1 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$

$q_0q_1 = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)j$

$\qquad + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k$

이때 사원수의 덧셈에 관한 교환법칙과 결합법칙은 성립하나, 곱셈에 대한 교환법칙은 성립하지 않고 결합법칙만 성립한다.

정의 5) 사원수의 켤레(conjugate), 트레이스(trace), 노름(norm), $|q|$

사원수 $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$에 대하여,

• 켤레를 다음과 같이 정의한다.

$\bar{q} = \overline{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$

• 트레이스 $t(q)$란 사원수 q와 $\bar{q}$와의 합으로 정의한다.

$t(q) = q + \bar{q} = 2a_0$

• 노름 $n(q)$란 사원수 q와 $\bar{q}$와의 곱으로 정의한다.

$n(q) = q\bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

• $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

정리 6) x, y가 사원수라고 하자.

(1) $\bar{x}x = x\bar{x}$ 즉, $|x| = |\bar{x}|$

(2) $|x|^2 + |y|^2 = \frac{1}{2}(|x+y|^2 + |x-y|^2)$

(3) 모든 복소수 c에 대하여, $jc = \bar{c}j$ 또는 $jc\bar{j} = \bar{c}$

(4) $x^2 = |Re\,x|^2 - |Im\,x|^2 + 2Re\,x\,Im\,x$

(5) 일반적으로, $(x+y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$

(6) 모든 사원수 x에 대하여 $ax = xa \Leftrightarrow a \in R$ 이다.

(7) 모든 사원수 x는 복소수 c_1, c_2에 대하여 $x = c_1 + c_2j$로 유일하게 표현된다.

(8) $x^2 = -1$은 무수히 많은 사원수 해를 갖는다.

<u>증명</u>

(1) $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $\overline{x}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$ 라 하자.

$\overline{x}x=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=x\overline{x}$이므로 $\overline{x}x=x\overline{x}$ 즉, $|x|=|\overline{x}|$ 이다.

(2) $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $y=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$ 라 하자.

$|x|^2+|y|^2=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$

$|x+y|^2=(a_0+b_0)^2+(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2$

$|x-y|^2=(a_0-b_0)^2+(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2$

$\frac{1}{2}(|x+y|^2+|x-y|^2)=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$ 이다.

따라서 $|x|^2+|y|^2=\frac{1}{2}(|x+y|^2+|x-y|^2)$

(3) $c=a+bi$, $\overline{c}=a-bi$ 라 하자.

$jc=j(a+bi)=aj+bji=aj-bij=(a-bi)j=\overline{c}j$

$jc\overline{j}=j(a+bi)(-j)=(aj+bji)(-j)=-aj^2-bij=a+bij^2=a-bi=\overline{c}$

(4) $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$라 하자.

$|Re\,x|^2-|Im\,x|^2+2Re\,x\,Im\,x=a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2-2a_0(a_1i+a_2j+a_3k)$

$x^2=a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2-2a_0(a_1i+a_2j+a_3k)$

따라서 $x^2=|Re\,x|^2-|Im\,x|^2+2Re\,x\,Im\,x$

(5) 사원수는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로 자명하다.

(6) ($\rightarrow$) 모든 사원수 $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ 에 대하여 $ax=xa$ 을 만족한다고 하자.

그러면 $ax=a(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)=aa_0+aa_1i+aa_2j+aa_3k$ 이고

$xa=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)a=a_0a+a_1ia+a_2ja+a_3ka$ 이다.

가정에 의해 $aa_0+aa_1i+aa_2j+aa_3k=a_0a+a_1ia+a_2ja+a_3ka$ 인데 사원수는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로 $a\in R$ 이다.

($\leftarrow$) 모든 사원수 $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ 에 대하여 $a\in R$이라 하자.

그러면 $1 \in R$이므로 $a=1$일 때, $1x=x1=x$이므로 $ax=xa$ 이다.

(7) $c_1=a_0+a_1 i$, $c_2=a_2+a_3 i$라 하자.

모든 사원수 $x=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k$에 대하여,

$c_1+c_2 j=a_0+a_1 i+(a_2+a_3 i)j=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k=x$로 표현할 수 있다.

복소수 c_1, c_2, c_3, c_4에 대하여 $x=c_1+c_2 j=c_3+c_4 j$라 하자.

$c_3=b_0+b_1 i$, $c_4=b_2+b_3 i$일 때,

$c_1+c_2 j=a_0+a_1 i+(a_2+a_3 i)j=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k$

$c_3+c_4 j=b_0+b_1 i+(b_2+b_3 i)j=b_0+b_1 i+b_2 j+b_3 k$ 이므로

$a_0=b_0, a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$이다.

따라서 모든 사원수 $x=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k$는 복소수로 유일하게 표현된다.

(8) $x^2=-1$의 사원수 해는 $\pm i, \pm j, \pm k, \pm ij, \pm ji, \pm ki, \pm ik, \pm jk, \pm kj$ 무수히 많다.

나. 사원수 환과 사원수 다항식

위에서 정리한 사원수 성질들을 이용하여 사원수 환임을 증명하고, 사원수 다항식의 정의를 내릴 수 있다.

정리 1) 사원수 H는 덧셈과 곱셈에 대하여 환을 이룬다.

증명

사원수는 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

또한 덧셈에 대한 항등원 $0=0+0i+0j+0k \in H$ 이 존재한다.

$q \in H$에 대한 역원 $-q \in H$가 존재하므로 H는 덧셈에 대한 가환군이다.

그리고 사원수 $x,y,z \in H$ 에 대하여

$$x=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k,\ \ y=b_0+b_1 i+b_2 j+b_3 k,\ \ z=c_0+c_1 i+c_2 j+c_3 k$$

(단, $a_i, b_i, c_i \in R, i=1,2,3,4$)일 때,

$$\begin{aligned}[xy]z &= [(a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k)(b_0+b_1 i+b_2 j+b_3 k)](c_0+c_1 i+c_2 j+c_3 k)\\ &= [(a_0 b_0-a_1 b_1-a_2 b_2-a_3 b_3)+(a_0 b_1+a_1 b_0+a_2 b_3-a_3 b_2)i+(a_0 b_2+a_2 b_0+a_3 b_1-a_1 b_3)j\\ &\quad +(a_0 b_3+a_3 b_0+a_1 b_2-a_2 b_1)k](c_0+c_1 i+c_2 j+c_3 k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_0-(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)c_1\\
&\quad-(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)c_2-(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_3]\\
&\quad+[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_1+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)c_0\\
&\quad+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_2]i\\
&\quad+[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_2-(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)c_3\\
&\quad+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)c_0+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_1]j\\
&\quad+[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)c_3+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)c_2\\
&\quad-(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)c_1+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)c_0]k\\
&=[a_0(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)-a_1(b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad-a_2(b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3)-a_3(b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1)]\\
&\quad+[a_1(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_0(b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad-a_3(b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3)+a_2(b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1)]i\\
&\quad+[a_2(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+a_3(b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad+a_0(b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3)-a_1(b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1)]j\\
&\quad+[a_3(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)-a_1(b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad+a_2(b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3)+a_0(b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1)]k\\
&=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)[(b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)+(b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)i\\
&\quad+(b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3)j+(b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1)k]\\
&=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)[(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)]\\
&=x[yz]
\end{aligned}
$$

이므로 곱셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
x[y+z]&=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)[(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)+(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)]\\
&=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)[(b_0+c_0)+(b_1+c_1)i+(b_2+c_2)j+(b_3+c_3)k]\\
&=[a_0(b_0+c_0)-a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2)-a_3(b_3+c_3)]
\end{aligned}
$$

$$+[a_1(b_0+c_0)+a_0(b_1+c_1)-a_3(b_2+c_2)+a_2(b_3+c_3)]i$$

$$+[a_2(b_0+c_0)+a_3(b_1+c_1)+a_0(b_2+c_2)-a_1(b_3+c_3)]j$$

$$+[a_3(b_0+c_0)-a_2(b_1+c_1)+a_1(b_2+c_2)+a_0(b_3+c_3)]k$$

$$=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)i$$

$$+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)j+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)k$$

$$+(a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_3)+(a_0c_1+a_1c_0+a_2c_3-a_3c_2)i$$

$$-(a_0c_2+a_2c_0+a_3c_1-a_1c_3)j+(a_0c_3+a_3c_0+a_1c_2-a_2c_1)k$$

$$=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)$$

$$+(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)$$

$$=xz+yz$$

마찬가지로 $(x+y)z=xz+yz$ 이므로 분배법칙이 성립한다.

따라서 사원수 H는 덧셈과 곱셈에 대하여 환을 이룬다.

정리 2) 사원수 H안의 모든 0이 아닌 원소는 곱셈에 대하여 항등원과 역원을 갖는다.

<u>증명</u>

$0\neq q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in H$ 에 대하여

$$q\cdot 1=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)\cdot(1+0i+0j+0k)=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$$
$$1\cdot q=(1+0i+0j+0k)\cdot(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$$

이므로, 사원수 q의 항등원$1=1+0i+0j+0k\in H$을 갖는다.

$0\neq q$, $\bar{q}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$, $|q|^2=q\bar{q}$에 대하여,

$q\dfrac{\bar{q}}{|q|^2}=q\dfrac{\bar{q}}{q\bar{q}}=\dfrac{\bar{q}}{\bar{q}}=1$, $\dfrac{\bar{q}}{|q|^2}q=\dfrac{\bar{q}q}{q\bar{q}}=1$ ($q\bar{q}=\bar{q}q\in R$ 이므로) 곱셈에 대한 q의 역원

$q^{-1}=\dfrac{\bar{q}}{|q|^2}\in H$을 갖는다.

따름 정리 3) H는 나눗셈 환(division ring)이지만 체(field)는 아니다.

<u>증명</u>

정리 1)와 정리 2)에 의해 나눗셈 환이다. 하지만 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로 체는 아니다.

정리 4) 사원수 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$에 대하여,

$n(q) = q\overline{q}$이면 $N(q_1 q_2) = N(q_1)(q_2)$이다.

즉, n은 0이 아닌 사원수에서 0이 아닌 실수로의 군 동형사상이다.

<u>증명</u>

$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ 에 대하여

$$\overline{q_1}\,\overline{q_2} = (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)(b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k) = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)$$

$$-(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j - (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

$$\overline{q_2}\,\overline{q_1} = (b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k)(a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)$$

$$-(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j - (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

이므로, $\overline{q_1}\,\overline{q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$

$$N(q_1 q_2) = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_1}\,\overline{q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1 N(q_2)\overline{q_1} = q_1 \overline{q_1} N(q_2) = N(q_1) N(q_2)$$

($N(q_2) \in R$이므로)

정리 5) 사원수는 복소수를 성분으로 갖는 환 2 x 2행렬 $M_2(C)$의 부분환으로

H와 H'는 본질적으로 같다. 따라서

$$\mu: \ q = c_1 + c_2 j \in H \quad \rightarrow \quad q' = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\overline{c_2} & \overline{c_1} \end{pmatrix} \in H'$$

이때, μ는 bijective하며 연산을 보존한다.

더욱이, $|q|^2 = \det q'$ 이고 q'의 고유값은 $Re\, q \pm |Im\, q| i$ 이다.

<u>증명</u>

사원수 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i) j \in H$ 이므로

(이때, $c_1 = a_0 + a_1 i$, $c_2 = a_2 + a_3 i$)

$$\mu(q) = \mu(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix}-i & 0\\0 & i\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_0 - a_1 i & a_2 - a_3 i\\-a_2 + a_3 i & a_0 + a_1 i\end{pmatrix}$$ 정의하자.

$\mu(q_1) = \mu(q_2)$ (이때, $q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$라 하자.)

$$\begin{pmatrix}a_0 - a_1 i & a_2 - a_3 i\\-a_2 + a_3 i & a_0 + a_1 i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_0 - b_1 i & b_2 - b_3 i\\-b_2 + b_3 i & b_0 + b_1 i\end{pmatrix}$$

$\leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

$\leftrightarrow q_1 = q_2$

따라서 μ는 단사함수이며 정의에 의해 전사함수 이다.

μ는 bijective 이다.

$$\mu(q_1 + q_2) = \mu((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k)$$

$$= \begin{pmatrix}a_0 + b_0 - a_1 i - b_1 i & a_2 + b_2 - a_3 i - b_3 i\\-a_2 - b_2 + a_3 i + b_3 i & a_0 + b_0 + a_1 i + b_1 i\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_0 - a_1 i & a_2 - a_3 i\\-a_2 + a_3 i & a_0 + a_1 i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_0 - b_1 i & b_2 - b_3 i\\-b_2 + b_3 i & b_0 + b_1 i\end{pmatrix} = \mu(q_1) + \mu(q_2)$$

$$\mu(q_1 q_2) = \mu((a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$$

$$+ (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

$$= \begin{pmatrix}d_0 - d_1 i & d_2 - d_3 i\\-d_2 - d_3 i & d_0 + d_1 i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0 - a_1 i & a_2 - a_3 i\\-a_2 + a_3 i & a_0 + a_1 i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0 - b_1 i & b_2 - b_3 i\\-b_2 + b_3 i & b_0 + b_1 i\end{pmatrix}$$

$$= \mu(q_1)\mu(q_2)$$

(여기서, $d_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$, $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2$)

$d_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3$, $d_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1$

따라서 사원수는 복소수를 성분으로 갖는 환 2 x 2행렬 $M_2(C)$의 부분환으로

H와 H'는 본질적으로 같다.

$|q|^2 = \det q' = c_1^2 + c_2^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ 이므로 $|q|^2 = \det q'$이다.

또한,

$$\det\begin{vmatrix} c_1 - \lambda & c_2 \\ -\overline{c_2} & \overline{c_1} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (c_1 + \overline{c_1})\lambda + c_1\overline{c_1} + c_2\overline{c_2} = 0$$

$(c_1 + \overline{c_1} = 2a_0$, $c_1\overline{c_1} = a_0^2 + a_1^2$, $c_2\overline{c_2} = a_2^2 + a_3^2$ 이므로)

$Re\, q \pm |Im\, q| i = a_0 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\, i$을 λ에 대입하여 정리하면 등식이 성립하므로 $Re\, q \pm |Im\, q| i$는 q'의 고유값이다.

정의 6) 사원수 다항식

사원수 $q_0, \ldots, q_{m-1}$이 주어졌을 때, 최고차항의 계수가 1인 m차 사원수 다항식 $p(x)$는 $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ 표현할 수 있다.

정의 7) 사원수 다항식 $p(x)$에 대하여 만약, $p(\lambda) = 0$이라면 λ는 $p(x)$의 해이다.

3. 사원수 방정식(quaternion equation)의 계산

가. 사원수 방정식을 푸는 방법과 대수적 성질

사원수 동반행렬을 이용하여 그것의 고유값이 사원수 방정식의 해가 됨을 보이고, 그 성질들을 이용하여 사원수에서도 대수적 성질 즉, m차 사원수 다항식에서 많아야 m개의 해가 존재함을 보일 수 있다.

정의 1) $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0$가 주어졌을 때,

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ : & 0 & \ldots & : \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \ldots & -q_{m-1} \end{bmatrix}$$

행렬 C_p는 사원수 다항식 $p(x)$에 관련된 동반 행렬이라고 정의한다.

정의 2) 사원수 x, y에 대하여 사원수 x, y가 유사하다는 것은 $\sigma^{-1}x\sigma = y$ 을 만족하는 0이 아닌 σ가 존재할 때를 말한다.

기호로 $x \sim y$ 나타낸다.

이때, 관계 $\sim$는 동치관계를 나타내며 $[x]$는 x를 포함하는 동치류이다.

정리 3) (Fuzhen Zhang, 1997)

사원수 $q = a_{0+}a_1 i + a_2 j + a_3 k$ (단, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$)가 존재한다면 그때,

q와 $a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$는 유사하다. 즉, $q \in \left[a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right]$ 이다.

<u>증명</u>

방정식 $qx = x(a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})$ (단, $a_2^2 + a_3^2 \neq 0$)을 만족하는 사원수

$x = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + a_1) - a_3 j + a_2 k$가 존재한다.

정의 가-2)에 의해 q와 $a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$는 유사하며,

$q \in \left[a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right]$이다.

정리 4) (R.SERÔDIO, E.PEREIRA, J.VITÔRIA, 2001)

만약 λ가 사원수 다항식 $p(x)$의 동반행렬의 좌고유값일 때,

(1) λ는 $p(x)$의 해

(2) $v = \left[1\ \lambda\ \lambda^2 \ldots \lambda^{m-1}\right]^\top$는 좌고유벡터이다.

<u>증명</u>

(1) $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ 의 동반행렬 C_p와 C_p의 좌고유값을 λ라 하자.

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \ldots & -q_{m-1} \end{bmatrix}$$ 이때, $C_p v = \lambda v$이므로

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \ldots & -q_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix}$$ 양변을 곱하면

$v_2 = \lambda v_1$, $v_3 = \lambda v_2$, $\cdots$ $v_m = \lambda v_{m-1}$, $-q_0 v_1 - q_1 v_2 - \cdots - q_{m-1} v_m = \lambda v_m$ 이다.

$(m-1)$번째까지의 식의 우변을 v_1으로 치환하면, $v_i = \lambda^{i-1} v_1, i = 2, \cdots, m$

마지막 식에 대입하여 $-q_0 v_1 - q_1 \lambda v_1 - q_2 \lambda^2 v_1 - \cdots - q_{m-1} \lambda^{m-1} v_1 = \lambda^m v_1$ 정리하면,

$$(\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0) v_1 = 0$$

그러므로 $v_1 \neq 0, v$가 영벡터가 아니면, $\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0 = 0$

따라서 C_p의 좌고유값을 λ는 다항식 $p(x)$의 해이다.

(2) $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ 의 동반행렬 C_p와 C_p의 좌고유값을 λ하자.

$v_1 = 1$을 선택하면, $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix}$ 얻을 수 있다.

따라서 $v = [1\ \lambda\ \lambda^2 \ldots \lambda^{m-1}]^\top$는 고유값 λ와 연관된 좌고유벡터이다.

따름 정리 5) λ가 동반행렬의 좌고유값이라면 그때, λ는 또한 우고유값이다.

<u>증명</u>

$p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ 의 동반행렬 C_p의 좌고유값을 λ하자.

$C_p v = \lambda v$ 이므로 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \ldots & -q_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix}$ 이다.

그런데 λ는 λ끼리 교환이 가능하므로

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \ldots & -q_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} \lambda$$

따라서 $C_p v = v\lambda$ 이며 λ는 또한 우고유값이다.

따름 정리 6) $Av = v\lambda$는 모든 0이 아닌 사원수 q에 대해,

$(Av)q = (v\lambda)q = v(qq^{-1})\lambda q = (vq)q^{-1}\lambda q$ 이므로

만약 λ가 우고유값이면 동치류 $[\lambda]$안의 모든 원소들은 또한 우고유값이다.

정리 7) 사원수를 성분으로 갖는 $m\times m$행렬은 정확하게 m개의 우고유값들을 갖으며, 우고유값들은 음수가 아닌 허수 부분으로 복소수이다.

증명

사원수 q가 우고유값이라면 정리 3)의 모든 사원수 $q\in\left[a_0+i\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\right]$)에 의해 우고유값은 우복소고유값과 동치류이다.

따름정리 6)에 의해 우복소고유값들의 동치류 또한 우고유값이다.

그래서 만약 m개의 우복소고유값들을 안다면 모든 우고유값들을 아는 것이다.

따라서 사원수를 성분으로 갖는 $m\times m$행렬은 정확하게 m개의 우복소고유값들을 갖는다.

정리 8) (R.SERÔDIO, E.PEREIRA, J.VITÔRIA, 2001) 사원수의 대수적 성질

만약 $p(x)$가 m차 사원수 다항식일 때, 그때 해집합은 많아야 m개의 사원수 동치류에 포함된다.

증명

m차 사원수 다항식 $p(x)=x^m+q_{m-1}x^{m-1}+\dots+q_1x+q_0$, $q_i\in H$ 을 잡자.

그러면 $p(x)$의 $m\times m$ 동반행렬C_p는 정리 가-3)에 의해 정확하게 m개의 우복소고유값을 갖는다.

λ가 우복소고유값이라 하면 $C_pv=v\lambda$ 이고, 정리 4-(1)의 증명과정을 그대로 적용하면 $-q_0v_1-q_1v_1\lambda-q_2v_1\lambda^2-\cdots-q_{m-1}v_1\lambda^{m-1}=v_1\lambda^m$ 을 얻을 수 있다.

위 식의 양변의 오른쪽에 v_1^{-1}을 곱하면,

$$-q_0-q_1v_1\lambda v_1^{-1}-q_2v_1\lambda^2v_1^{-1}-\cdots-q_{m-1}v_1\lambda^{m-1}v_1^{-1}=v_1\lambda^mv_1^{-1}$$ 이다.

$v_1\lambda v_1^{-1}=\sigma$로 놓고 식을 치환하면 $\sigma^m+q_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+q_1\sigma+q_0=0$

그러므로 각각의 우복소고유값들은 적어도 하나의 유사한 사원수가 존재하는데 그 사원수는 동반행렬C_p 좌고유값이다. 정리 4)에 의해 좌고유값은 $p(x)$의 해이므로 m개의 우복소고유값이 존재하면 $p(x)$의 해들은 m개의 서로 다른

사원수 동치류보다 더 많이 포함될 수는 없다.

정리 9) (Niven's algorithm, 1941)

$t:q$의 trace , $n:q$의 norm 일 때, 모든 사원수 q는 다음 2차 방정식을 만족한다.

$$x^2-tx+n=0$$

이때, $p(x)=x^m+q_{m-1}x^{m-1}+...+q_1x+q_0$를 다항식$x^2-tx+n$으로 나누면

나눗셈 알고리즘에 의해 $p(x)=q(x)(x^2-tx+n)+f(q_i,t,n)x+g(q_i,t,n)$를 얻는다.

이때, $f(q_i,t,n)x+g(q_i,t,n)=0$이 되는 $x=-\dfrac{1}{f(q_i,t,n)}\times g(q_i,t,n)$를 구할 수 있다.

정리 10) (R.SERÔDIO, E.PEREIRA, J.VITÔRIA, 2001)

만약, 특별한 쌍(t,n)에 의해 $f(q_i,t,n)$, $g(q_i,t,n)$가 사라진다면 동치류

$\left[\dfrac{t}{2}+i\sqrt{n-\dfrac{t}{2^2}}\right]$에 속하는 모든 사원수들은 다항식 $p(x)$의 해이다.

<u>증명</u>

특별한 쌍(t,n)에 의해 $f(q_i,t,n)$, $g(q_i,t,n)$가 사라진다고 가정하자.

그러면, Niven's algorithm에 의해 $p(x)=q(x)(x^2-tx+n)$이다.

x_1이 $p(x)$의 해라면 $p(x_1)=q(x_1)(x_1^2-tx_1+n)=0$

x_1과 유사한 사원수 $x_2=\sigma x_1\sigma^{-1}$를 잡으면,

$$\begin{aligned}p(x_2)&=q(x_2)(x_2^2-tx_2+n)\\&=q(x_2)\left[(\sigma x_1\sigma^{-1})^2-t(\sigma x_1\sigma^{-1})+n\right]\end{aligned}$$

$t,n\in R$, $\sigma\sigma^{-1}=1$ 때문에 $p(x_2)=q(x_2)\sigma(x_1^2-tx_1+n)\sigma^{-1}$

$$=q(x_2)\sigma\bullet 0\bullet\sigma^{-1}$$

$$=0$$

따라서, x_2 또한 해이다. 임의의 σ에 대하여, x_1과 유사한 모든 사원수들은 다항식 $p(x)$의 해이다.

만약, $x_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $t = 2a_0$, $n = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ 이면 $a_0 = \frac{t}{2}$,

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = n - (\frac{t}{2})^2$이다. 사원수 $q \in \left[a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right]$이므로

사원수 $x_1 \in \left[\frac{t}{2} + i\sqrt{n - \frac{t}{2^2}}\right]$이고, 이 동치류에 속하는 모든 사원수들은

다항식$p(x)$의 해이다.

나. 예제를 통한 사원수 방정식의 계산

지금까지 사원수 방정식을 풀기 위한 개념들을 정리하였다.

실제로 위의 개념들을 이용하여 2차 사원수 다항식과 3차 사원수 다항식을 maple을 이용하여 해를 계산해 보겠다.

계산하는 과정 중에 나오는 값들은 소수 6번째 자리에서 반올림하여 근삿값으로 구하였기에 약간의 오차는 있다.

1) $p(x) = x^2 + (2-3j)x - k$

(사원수 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 일 때, $q \in \left[a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right]$이므로)

=>$p(x)' = x^2 + (2+3i)x + i$

$C_{p'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & -2-3i \end{bmatrix}$

maple을 이용하여 고유값을 구한다.

$\lambda_1 = -0.25552 - 0.15678i \ \rightarrow \ t_1 = -0.51104, n_1 = 0.08987$

$\lambda_2 = -1.74448 - 2.8432i \ \rightarrow \ t_2 = -3.48896, n_2 = 11.127$

위의 $p(x)$에 대한 niven's algorithm

$x = \frac{n+k}{t+2-3j}$ 에 대입하여 사원수 해를 구한다.

((2. 정리 2) 사원수 q에 대하여 $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ 이용하여 계산)

$$x_1 = \frac{0.08984 + k}{-0.51104 + 2 - 3j} \fallingdotseq 0.01193 - 0.26745i + 0.2404j + 0.13274k$$

$$x_2 = \frac{11.127 + k}{-3.48896 + 2 - 3j} \fallingdotseq -1.47701 - 0.26745i + 2.97593j - 0.13274k$$

따라서 $p(x) = x^2 + (2-3j)x - k = 0$의 해는

$$x_1 = 0.01193 - 0.26745i + 0.2404j + 0.13274k$$

$$x_2 = -1.47701 - 0.26745i + 2.97593j - 0.13274k$$

2) $p(x) = x^3 + (1-j)x^2 + 2kx + (3-i)$

(사원수 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 일 때, $q \in \left[a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right]$이므로)

=>$p(x)' = x^3 + (1+i)x + 2ix + (3+i)$

$$c_{p'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(3+i) & -2i & -(1+i) \end{bmatrix}$$

maple을 이용하여 고유값을 구한다.

$\lambda_1 \fallingdotseq 0.73114 - 1.77623i \rightarrow t_1 = 1.46228,\ n_1 \fallingdotseq 3.68956$

$\lambda_2 \fallingdotseq -1.84412 - 0.10779i \rightarrow t_2 = -3.68824,\ n_2 \fallingdotseq 3.4124$

$\lambda_3 \fallingdotseq 0.11299 + 0.88402i \rightarrow t_3 = 0.22598,\ n_3 \fallingdotseq 0.79426$

위의 $p(x)$에 대한 niven's algorithm

$x = \dfrac{n + nt - 3 + i - nj}{-n + t + t^2 - tj + 2k}$ 에 대입하여 사원수 해를 구한다.

((2. 정리 2) 사원수 q에 대하여 $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$ 이용하여 계산)

$$x_1 = \frac{3.68956 + 1.46228 \times 3.68956 - 3 + i - 3.68956j}{-3.68956 + 1.46228 + 1.46228^2 - 1.46228j + 2k} = \frac{6.08473 + i - 3.68956j}{-0.08902 - 1.46228j + 2k}$$

$$\fallingdotseq 0.78971 + 1.1861i + 1.8265j - 1.74205k$$

$$x_2 = \frac{3.4124 - 3.68824 \times 3.4124 - 3 + i - 3.4124j}{-3.4124 - 3.68824 + 3.68824^2 + 3.68824j + 2k} = \frac{-12.17335 + i - 13.61473j}{6.50247 + 3.68824j + 2k}$$

$$\fallingdotseq -2.1603 + 4.65549i + 1.47829j + 4.00394k$$

$$x_3 = \frac{0.79426 + 0.79426 \times 0.22598 - 3 + i - 0.79426j}{-0.79426 + 0.22598 + 0.22598^2 - 0.22598j + 2k} = \frac{-2.02625 + i - 0.79426j}{-0.51721 - 0.22598j + 2k}$$

$$\fallingdotseq 0.28423 + 0.24808i + 0.45219j + 0.99073k$$

따라서 $p(x) = x^3 + (1-j)x^2 + 2kx + (3-i) = 0$의 해는

$$x_1 = 0.78971 + 1.1861i + 1.8265j - 1.74205k$$

$$x_2 = -2.1603 + 4.65549i + 1.47829j + 4.00394k$$

$$x_3 = 0.28423 + 0.24808i + 0.45219j + 0.99073k$$

4. 결론 및 제언

사원수는 복잡하고 어려운 수체계임은 확실하다. 하지만 과학이 발달함에 따라 사원수의 중요성은 점점 더 높아지고 있고 물리학뿐만 아니라 다양한 실생활 분야에서 실제로 많이 사용하고 있기 때문에 사원수에 대한 공부를 해야 하는 것은 불가피해 보인다.

따라서 본 연구에서는 사원수를 처음 접하는 학생들을 위해 어렵지 않은 범위에서 사원수를 소개하고 성질들을 증명함으로써 사원수에 대한 이해를 높이고자 하였다. 또한 실 계수에서 사원수 계수로 확장하여 방정식을 접근해 보고 그에 따르는 개념들과 성질들을 연구하고, 실제로 계산을 통해 해를 구해 보았다.

이러한 과정들을 통하여 수학을 공부하는 학생들과 수학을 가르치는 교사들에게 사원수와 사원수 방정식에 대한 정보를 제공하고 방정식에 대한 이해의 폭을 넓히고자 본 연구를 진행하였다.

사원수에 대한 내용은 앞으로 진로를 결정하고자 하는 학생들에게 좋은 지침서가 될 수 있고, 수학을 배우는 학생들에게 수학의 쓰임에 대한 흥미를 제공할 수도 있다.

하지만 서론에서도 언급했다시피 사원수에 대한 책이 별로 없고, 사원수에 대한 연구도 많이 부족하다. 앞으로 많은 후속연구가 나와 사원수를 공부하는데 갈증을 느끼는 일이 없기를 바라며, 본 연구가 실제로 사원수를 공부하고자 하는 사들에게 도움이 되길 기대한다.

참 고 문 헌

1. R.SERÔDIO, E.PEREIRA, J.VITÔRIA. Computing the zeros of quaternion polynomials. Computers and Mathematics With Applications. 1229-1237 .2001
2. Fuzhen Zhang. Quaternions and matrices of quaternions. Linear Algebra and its Applications. 251:21-57. 1997
3. Ivan Niven. Equations in quaternions. Mathematical Association of America. 654-661. 1941
4. 주용우. 3D 그래픽을 통한 사원수의 고찰 . 연세대학교 교육대학원 . 2007
5. 우성식. 사원수군과 그 응용 . 한남대학교 교육대학원 . 2006
6. John B. Fraleigh. A first course in abstract algebra. Addison Wesley. 224-227

A study of quaternion and quaternion equation

Jeon, Eun-Ju

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Chonnam National University

(Directed by professor Park, Jong Youll)

(Abstract)

There is very insuffcient data and research about the quaternion and the quaternion equation. So, this study provides information about quaternion by proving the concept of quaternion and its theorem and, by extension, provides information computing the zeros of quaternion equation through previous research. In fact, Using it, we obtained solution of a quadratic quaternion equation and a cubic quaternion equation.

The aim of this study is to provide the quaternion information with students to study mathematics and teachers, introduce the quaternion equation extended from a real coefficient to a quaternion coefficient, and help broaden understanding by solving a quaternion equation.