수학 보고서

이차곡선-타원

10920 이준상
11011 양진모

MATHTIMES

목차

1. 활동 동기

이번 동아리 활동으로 이차곡선을 탐구하게 되었는데, 이 중 타원에 관한 내용을 정리하고 활동을 기록하여 이후 수학축전 등에서 이용할 수 있도록 하기 위해서 이 활동을 기획하고 보고서를 작성하게 되었다.

2. 타원의 개념

2-1. 타원의 정의

타원은 두 개의 대칭인 포물선을 포개 놓은 모양이다.
그러나 포물선에는 초점이 하나고 준선이 있는 반면에, 타원은 준선이 없고 초점이 두 개다.
타원의 정의는 ‘두 정점(초점)과의 거리의 합이 일정한 점들의 집합’이다.
타원은 두 초점에 실을 연결하여 연필을 걸고 그리면 만들어진다.

2-2. 타원의 방정식

우선 x축 위의 두 점 $(c,0)$과 $(-c,0)$을 잡는다.
이 두 점은 초점이 된다.

타원과 x축과의 교점을 각각 $(a,0),(-a,0)$으로 잡는다. 그리고 타원과 y축과의 교점을 각각 $(0,b),(0,-b)$로 잡는다. 이때 각 교점과의 거리 $2a, 2b$는 각각 장축, 단축이 된다. 이때 타원 위의 임의의 점을 (x,y)라고 하면, 각 초점과의 거리는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$l_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$l_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

여기서 두 거리의 합은 장축의 길이와 같고, 타원 위의 점은 각 초점으로부터의 거리의 합이 일정하기 때문에 다음 등식이 성립한다.

$$l_1+l_2=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

이를 이항하고 다음과 같은 순서로 식을 변형한다.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

(양 변을 제곱)

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

(전개하여 정리)

$$-2xc=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2xc$$

(이항)

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4xc$$

(4로 약분)

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc$$

(양변을 제곱)

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)=a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

(전개)

$$a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

(소거)

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$$

(x,y 관련 항 좌변 정리)

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

(공통 인수로 묶기)

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이때 타원에서 y축의 교점과 한 초점을 연결하면 직각삼각형이 만들어지므로, 피타고라스의 정리에 의해 다음 등식이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2-c^2=b^2$$

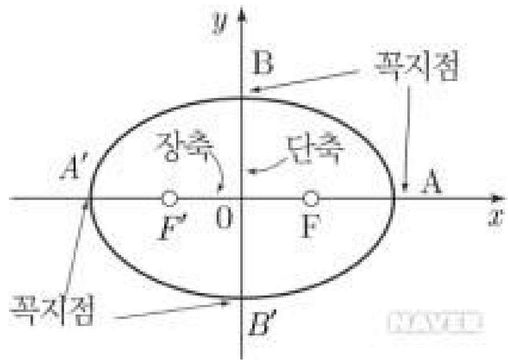
이 등식을 이용해 변형하면 다음과 같다.

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

(각 항을 a^2b^2으로 나눔)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

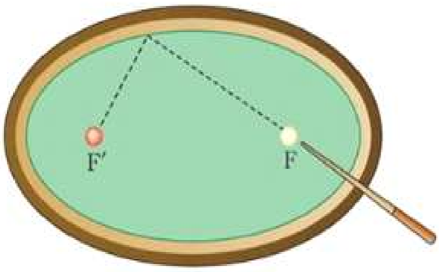
이와 같은 방법으로 초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식도 구할 수 있다. 결과가 같게 나오지만 이때는 $a<b$이다.



3. 타원의 활용

1) 타원 모양의 당구대

두 초점에 공이 놓여 있을 때, 한 초점에 놓인 공의 뒷면을 똑바로 치면 공은 당구대 가장자리에 반사된 후 다른 점에 있는 공에 부딪힌다.



2) 체외 충격파 쇄석기

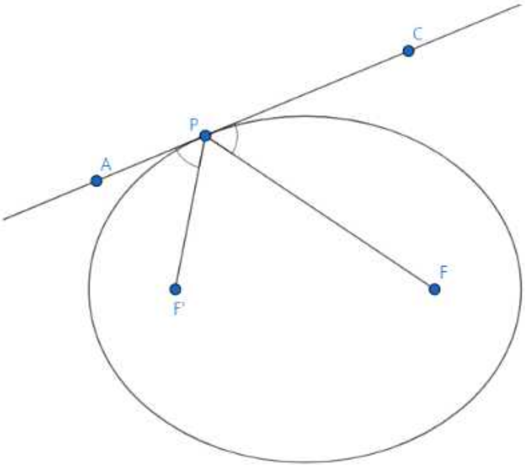
신장 결석을 제거 할 때 사용하는 의료 기기이다.

3) 치과에서 사용하는 조명

4) 세인트 폴 대성당 – 속삭이는 회랑

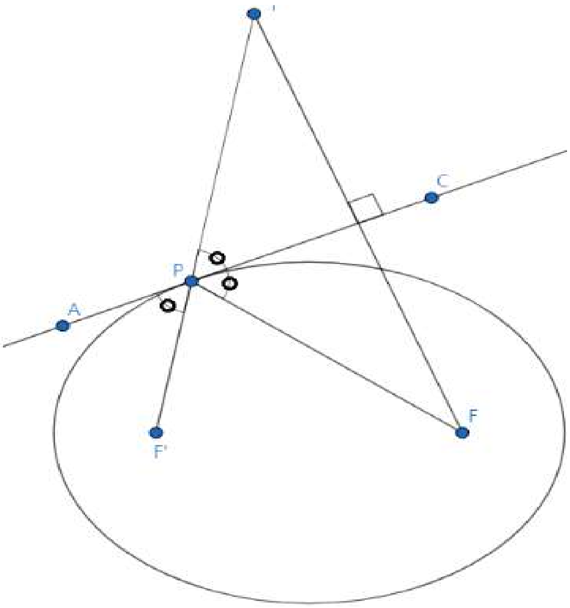
이들은 모두 **타원의 광학적 성질**을 이용한 것이다.
타원의 광학적 성질이란 "타원의 한 초점에서 나간 빛은 타원에 반사된 후 다른 초점을 지나간다는 것" 이다.

< 증명 >



위 그림과 같이 타원을 지나는
점 P에 대하여 접선을 그린다.

여기서 $\angle APF'$과 $\angle CPF$가 같음을
증명하면 된다.



점 F를 접선에 대하여 대칭시켜 F1을 만든다.

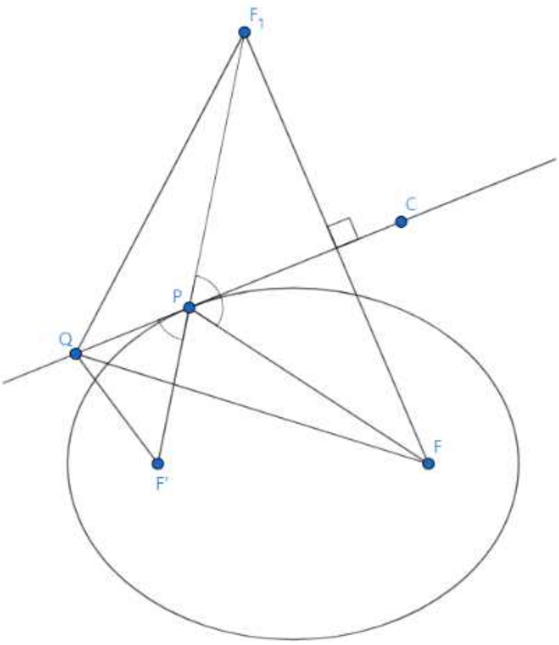
대칭이므로 $\overline{FF_1}$은 접선에 의해
수직 이등분된다.

$\overline{PF_1}$을 그어 이등변삼각형을 만든다.
이등변삼각형의 성질에 따라
$\angle CPF_1$와 $\angle CPF$ 는 서로 같다

맞꼭지각에 의해 $\angle APF'$와 $\angle CPF_1$이
서로 같다.

따라서 $\angle CPF$와 $\angle APF'$가 같다.

+ 선분PF1과 선분PF'이 한직선 위에 존재하는 이유



접선 상에 존재하는 임의의 점 Q를 찍는다.
접선 위의 점이므로 타원의 내부 또는 외부에
존재할 수 있다.

따라서 $\overline{QF} + \overline{QF'} \geq \overline{PF'} + \overline{PF}$ 이다.
이때 $\overline{PF} = \overline{PF_1}$ 이고 $\overline{QF} = \overline{QF_1}$
이므로 $\overline{QF_1} + \overline{QF'} \geq \overline{PF'} + \overline{PF_1}$ 이다.

즉 접선을 지나는 임의의 점 Q에 대하여
$\overline{PF'} + \overline{PF_1}$는 항상 최소가 되어야 하므로
점 P는 $\overleftrightarrow{F'F_1}$ 위에 존재하게 된다.