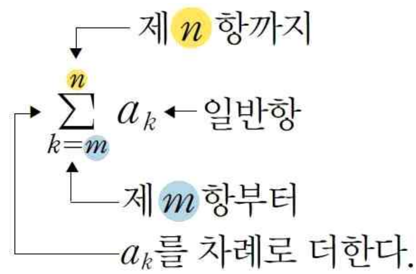
Ⅲ_2. 수열의 합과 수학적 귀납법

[12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고,
그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
[12수학Ⅰ03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여
명제를 증명할 수 있다.

1 합의 기호 $\sum$ ❶

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$



와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 제 m항부터 제 n항까지의 합은

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad (m \le n)$$

과 같이 나타낸다.

☑ 기호 $\sum$는 합을 뜻하는 Sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자로, ‘sigma’ 라고 읽는다.

☑ 소문자 σ는 표준편차를 의미한다.

1 합의 기호 Σ ❷

이것은 첫째항부터 제 n항까지의 합에서

첫째항부터 제 $(m-1)$항까지의 합을 뺀 것과 같으므로

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = S_n - S_{m-1} \quad (2 \le m \le n)$$

이 성립한다.

예 ① $\sum_{k=1}^{10} (3k+1) = 4 + 7 + 10 + \cdots + 31$

② $25 + 30 + 35 + \cdots + 100 = \sum_{k=5}^{20} 5k = \sum_{k=1}^{20} 5k - \sum_{k=1}^{4} 5k$

1 합의 기호 Σ ❸

☑ $\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용해도 그 합은 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

예 ① $1 + 4 + 7 + \cdots + 28 = \sum_{k=1}^{10} (3k-2)$

② $\sum_{i=4}^{13} 2^i = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{13}$

2 합의 기호 Σ의 성질 ❶

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$ (단, c는 상수)

☑ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$

$$=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$

$$=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

2 합의 기호 Σ의 성질 ❷

실수 p, q, r에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k+r)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k+rn$

예 ① $\sum_{k=1}^{n}(3a_k-2b_k)=3\sum_{k=1}^{n}a_k-2\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{100}3=3\times 100=300$

3 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

☑ (1) $\sum_{k=1}^{n}k$는 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\{2\times 1+(n-1)\times 1\}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

(2) k에 대한 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 $1, 2, 3, \cdots, n$을 차례로 대입하면

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$

$k=3$일 때, $4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=\frac{n+1}{2}\left\{2(n+1)^2-3n-2\right\}\\&=\frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) k에 대한 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$

의 k에 $1, 2, 3, \cdots, n$을 차례로 대입하면

$k=1$일 때, $2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$

$k=2$일 때, $3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$

$k=3$일 때, $4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)$$

$$-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left\{\sum_{k=1}^{n}k\right\}^2$$

예 ① $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n=n^2$$

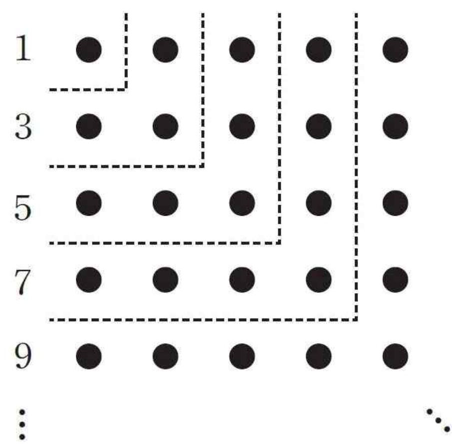
② $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=\sum_{k=1}^{5}(2k)^2$

$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}=220$$

③ $\sum_{k=1}^{10}k\left(k^2+1\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(k^3+k\right)$

$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11}{2}=3080$$

✡ 합의 기호 Σ의 활용 ❶



(1) ① $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

② $\sum_{k=m}^{n}(2k-1)=n^2-(m-1)^2$

(2) $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k=S_n-S_{m-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n \Rightarrow \begin{cases} ① \ S_0=0 \Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1} \ (n\geq 1) \\ ② \ S_0\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n=S_n-S_{n-1} \ (n\geq 2) \\ a_1 \Leftarrow S_1 \end{cases} \end{cases}$

✡ 합의 기호 Σ의 활용 ❷

(4) ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

(5) ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1} + a_{2k}\right)$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k} + a_{2k+1}\right)$

✡ 합의 기호 Σ의 활용 ❸

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}\right)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$

$$= 1\times n + 2\times(n-1) + 3\times(n-2) + \cdots + n\times 1$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

4 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

☑ 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어진 유리식을 일반항으로 갖는 수열의 합은

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \text{ (단, } A \neq B\text{)}$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

(1) $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}$

$$\times\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

한편, 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타내어진 식을 일반항으로 갖는 수열의 합은 분모를 유리화하여 구한다.

(3) $$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

예 ① $$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

② $$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$= -1+5=4$

④ $\dfrac{1}{k(k+a)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+a}\right)$

⑤ $\dfrac{1}{(k+a)(k+b)} = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{k+a}-\dfrac{1}{k+b}\right)$

⑥ $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}} = \dfrac{1}{a-b}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})$

5 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을

(1) 처음 몇 개의 항의 값

(2) 이웃하는 여러 항 사이의 관계식[점화식]

으로 정의하는 것을 '수열의 귀납적 정의'라고 한다.

6 등차수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = a, \; a_{n+1} = a_n + d \text{ (단, } a\text{와 } d\text{는 상수)}$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여

$$2 \times a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

(3) $a_n = a + (n-1)d$

(4) $S_n = \dfrac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \dfrac{n(a+l)}{2}$

예 ① $a_1 = 1, \; a_{n+1} = a_n + 3 \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 3$$

을 만족시키므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다. 즉, $a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

② $a_1 = 5, \; a_2 = 3, \; 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

을 만족시키므로 첫째항이 5이고 공차가 $a_2 - a_1 = -2$인 등차수열이다.

즉, $a_n = 5 + (n-1) \times (-2) = -2n + 7$

$\boxed{7}$ 등비수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = r a_n \quad \text{(단, } a\text{와 } r\text{은 상수)}$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1}\right)^2 = a_n a_{n+2}$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

(3) $a_n = a r^{n-1}$

(4) $S_n = \begin{cases} \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$

$\boxed{\text{예}}$ ① $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$$

을 만족시키므로 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열이다. 즉, $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

② $a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ (a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

을 만족시키므로 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

인 등비수열이다.

즉, $a_n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{8}$ 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

특정한 항의 값을 구할 때에는 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

예 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}$을 만족시킬 때, a_5의 값을 구해 보자.

$a_1 = 3$이므로 $a_2 = \frac{2a_1}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$

$a_2 = 3$이므로 $a_3 = \frac{2a_2}{3} = \frac{2 \times 3}{3} = 2$

$a_3 = 2$ 이므로 $a_4 = \dfrac{2a_3}{4} = \dfrac{2 \times 2}{4} = 1$

$a_4 = 1$ 이므로 $a_5 = \dfrac{2a_4}{6} = \dfrac{2 \times 1}{5} = \dfrac{2}{5}$

✡ 조화수열

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 조화수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = d$ (일정)

(2) $2a_n a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + a_{n+2}) \Leftrightarrow \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$

(3) $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + (n-1)d \ \left(\text{단, } d = \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_1} \right)$

✡ 특수한 점화식 ❶

(1) $a_{n+1} = a_n + f(n)$

$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = f(n)$

$\Rightarrow a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2} = a_1 + f(1) \\
 & \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + f(2) \\
 & \cancel{a_4} = \cancel{a_3} + f(3) \\
 & \quad \vdots \\
+ & a_n = \cancel{a_{n-1}} + f(n-1) \\
\hline
 & a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)
\end{array}$$

(2) $a_{n+1} = a_n \times f(n)$

$\Rightarrow a_n = a_1 \times f(1) \times f(2) \times \cdots \times f(n-1)$

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2} = a_1 \cdot f(1) \\
 & \cancel{a_3} = \cancel{a_2} \cdot f(2) \\
 & \cancel{a_4} = \cancel{a_3} \cdot f(3) \\
 & \quad \vdots \\
\times & a_n = \cancel{a_{n-1}} \cdot f(n-1) \\
\hline
 & a_n = a_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \cdots \cdot f(n-1)
\end{array}$$

✡ 특수한 점화식 ❷

(3) $a_{n+1} = pa_n + q$ (단, $p \neq 0$, $p \neq 1$)

① $a_{n+1} - \alpha = p\left(a_n - \alpha\right) \quad \leftarrow \alpha = p\alpha + q$

$$\therefore\ a_n - \alpha = \left(a_1 - \alpha\right) \times p^{n-1}$$

② $\begin{cases} a_{n+2} = pa_{n+1} + q \\ a_{n+1} = pa_n \quad\ \ + q \end{cases}$ 의 차

$$a_{n+2} - a_{n+1} = p\left(a_{n+1} - a_n\right)$$

⇨ $a_{n+1} - a_n = \left(a_2 - a_1\right)p^{n-1}$

$$\therefore\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_2 - a_1\right)p^{k-1}$$

✡ 특수한 점화식 ❸

(4) $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ (단, $pqr \neq 0$)

① $p + q + r = 0$;

⇨ $a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{r}{p}\left(a_{n+1} - a_n\right)$

⇨ $a_{n+1} - a_n = \left(a_2 - a_1\right)\left(\dfrac{r}{p}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_2 - a_1\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{k-1}$$

✡ 특수한 점화식 ❹

(5) $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ (단, $pqr \neq 0$)

② $p+q+r \neq 0$; α, β는 $px^2+qx+r=0$의 두 근

$$\Rightarrow \begin{cases} ㉠\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta a_n\right) \\ ㉡\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ㉠\ a_{n+1}-\beta a_n=\left(a_2-\beta a_1\right)\alpha^{n-1} \\ ㉡\ a_{n+1}-\alpha a_n=\left(a_2-\alpha a_1\right)\beta^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \neq \beta : a_n=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left\{\left(a_2-\beta a_1\right)\alpha^{n-1}-\left(a_2-\alpha a_1\right)\beta^{n-1}\right\} \\ \alpha=\beta : a_{n+1}-\alpha a_n=\left(a_2-\alpha a_1\right)\alpha^{n-1} \end{cases}$$

✡ 특수한 점화식 ❺

(6) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ ⇨ 역수를 취한다.

⇨ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{r}{p}\times\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$ ⇨ (3) or 조화수열

(7) 거듭제곱(근)의 꼴

① $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

② 양변에 로그를 취한다.

✡ 특수한 점화식 ❻

(8) $pa_na_{n+1} = qa_n - ra_{n+1}$ ⇨ 최소공배수(a_na_{n+1})로 나눈다.

(9) $a_{n+1} = pa_n + q^{n+1}$ ⇨ 양변을 p^{n+1}로 나눈다.

(10) 연립점화식 ⇨ 연립하여 푼다.

① 대칭형 : $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ ⇨ a_n, b_n

② 비대칭형 : b_n (또는 a_n) 소거

⇨ a_n (또는 b_n)의 점화식

9 수학적 귀납법

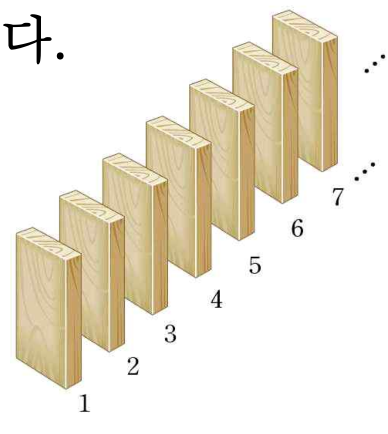
자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면,

$n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 자연수 n에 대한 어떤 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 방법을 '수학적 귀납법'이라고 한다.



예 모든 자연수 n에 대하여

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

① $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1^2=1$이므로 (*)이 성립한다.

② $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(2k+1)$을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

①, ②에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

☑ 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n \geq m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

① $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

② $n=k$ ($k \geq m$)일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

$\boxed{\text{예}}$ $h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대해 성립함을 증명.

$(1+h)^n > 1+nh$ $\cdots\cdots$ $(*)$: (복리법) $>$ (단리법)

① $n=2$: (좌변) $=(1+h)^2=1+2h+h^2$

(우변) $=1+2h$

$\therefore$ $h^2>0$이므로, $n=2$일 때 $(*)$이 성립한다.

② $n=k$ $(k \geq 2)$일 때 $(*)$ 성립 가정 : $(1+h)^k > 1+kh$

$n=k+1$: $(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k$

$> (1+h)(1+kh)=1+(k+1)h+kh^2$

$> 1+(k+1)h$ $\quad(\because\ k \geq 2,\ h^2>0)$

$\therefore$ $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

①과 ②에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립.