수학Ⅱ 해설 및 정답

I-1. 함수의 극한

01 함수의 극한

기본

01 답 (1) 1　(2) -1　(3) 2　(4) $\frac{1}{2}$

02 답 (1) $\frac{1}{2}$　(2) -3

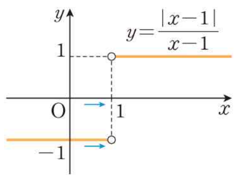
03 답 (1) ∞　(2) $-\infty$

04 답 (1) ∞　(2) $-\infty$

표준

01 답 -1

함수 $y=\frac{|x-1|}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$$\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

02 답 (1) 0　(2) 1

03 답 ④

$x\neq 0$이고 $-1<x<1$일 때, $0<1-x^2<1$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n$$

$$=\frac{x^4+x^2}{1-(1-x^2)}=x^2+1$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (|x|<1,\ x\neq 0)\\ 0 & (|x|\geq 1,\ x=0)\end{cases}$

이므로 $\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2+1)=2$

04 답 ③

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -1}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=1+(-1)=0$$

발전

01 답 ③

$\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$에서

$t\to\infty$일 때, $\frac{t-1}{t+1}\to 1-$이므로

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to 1-}f(x)=2$$

$\frac{4t-1}{t+1}=4-\frac{5}{t+1}$에서

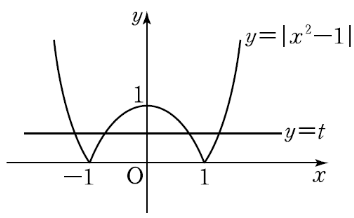
$t\to -\infty$일 때, $\frac{4t-1}{t+1}\to 4+$이므로

$$\lim_{t\to -\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to 4+}f(x)=3$$

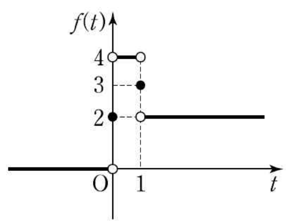
$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to -\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$

$$=2+3=5$$

02 답 ④



함수 $y=|x^2-1|$의 그래프가 위의 그림과 같으므로



(ⅰ) $t>1$, $t=0$일 때, $f(t)=2$

(ⅱ) $t=1$일 때, $f(t)=3$

(ⅲ) $0<t<1$일 때, $f(t)=4$

(ⅳ) $t<0$일 때, $f(t)=0$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $f(t)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $\lim_{t\to 1-}f(t)=4$

Ⅰ-1. 함수의 극한

02 함수의 극한에 대한 성질

기본

01 답 (1) 3 (2) $-\frac{1}{3}$

02 답 (1) -2 (2) $\frac{1}{4}$

03 답 (1) 0 (2) -3

04 답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

표준

01 답 ②

02 답 $a=5$, $b=3$

$\lim_{x\to 4}(x-4)=0$이고, 주어진 함수의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{4+a}-b=0$

즉, $b=\sqrt{4+a}$

$b=\sqrt{4+a}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}}=\frac{1}{2\sqrt{4+a}}=\frac{1}{6}$$

$2\sqrt{4+a}=6$에서 $\sqrt{4+a}=3$

$4+a=9$ $\quad\therefore\ a=5$

$\therefore\ b=\sqrt{4+5}=3$

03 답 ③

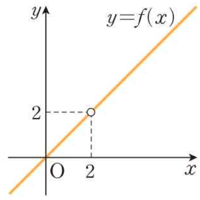
04 답 해설 참조

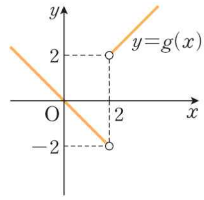
$x\neq 2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=x$$

$$g(x)=\frac{x^2-2x}{|x-2|}=\begin{cases}-x & (x<2)\\ x & (x>2)\end{cases}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.





위의 그래프에서 $\lim_{x\to 2}f(x)=2$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 2}f(x)$가 존재한다.

한편, $\lim_{x\to 2-}g(x)=-2$, $\lim_{x\to 2+}g(x)=2$이므로 극한값 $\lim_{x\to 2}g(x)$는 존재하지 않는다.

발전

01 답 ②

$S(\alpha)=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$이므로

$$\lim_{\alpha\to 1-}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}}$$
$$=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$
$$=\lim_{\alpha\to 1-}\alpha\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{2}$$

02 답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\leq 2$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 $x\to 0$일 때, (분자)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to 0}(ax+b)=b$$

$\therefore\ b=5$

이때 방정식 $f(x)=x$, 즉 $ax^2+5x=x$의 한 근이 $x=-2$이므로 $4a-10=-2$에서 $4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+5x$이므로 $f(1)=7$

Ⅰ-1. 함수의 극한

01 ②	**02** ③	**03** $\frac{1}{2}$	**04** ④	**05** ①
06 ④	**07** ②	**08** ①	**09** ③	**10** ②
11 ③	**12** 1	**13** ④	**14** ④	**15** ④
16 (1) 1 (2) -1		**17** $a=1$, $b=-2$		
18 ③	**19** $\frac{19}{27}$	**20** 8	**21** 72	
22 (1) -1 (2) 0 (3) 존재하지 않는다.				
23 -3	**24** ③			

01 $\lim_{x\to2}f(x)=2$

02 $\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}+\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}+\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}$
$=1+(-1)=0$

03 $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$
$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}$

04 $\lim_{x\to1}(x+2)+\lim_{x\to2}(x^2+1)=3+5=8$

05 $\lim_{x\to0}\{4f(x)-6f(x)g(x)\}$
$=4\lim_{x\to0}f(x)-6\lim_{x\to0}f(x)\cdot\lim_{x\to0}g(x)$
$=4\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$

06 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)$
$=3$

07 $\lim_{x\to4+}(\sqrt{x}-2)\left(1-\frac{1}{x-4}\right)$
$=\lim_{x\to4+}(\sqrt{x}-2)\left\{1-\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right\}$
$=\lim_{x\to4+}\left\{(\sqrt{x}-2)-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right\}=-\frac{1}{4}$

08 $\lim_{x\to-3+}(x+[x])=-6$

09 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x+4}-2x)$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x+4}-2x)(\sqrt{4x^2+3x+4}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+3x+4}+2x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+2}=\frac{3}{4}$

10 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서 $k=2$

11 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3x^2+1$,
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(3x+1)^2$이므로
$\lim_{x\to-1}\frac{(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)}{x^3-x}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{(3x^2+1)-(3x+1)^2}{x^3-x}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{-6x^2-6x}{x(x+1)(x-1)}$
$=\lim_{x\to-1}\left(-\frac{6}{x-1}\right)=3$

12 $x>0$이므로 주어진 부등식의 각 변에 x를 곱하면 $\frac{x^2}{x^2+3x+2}<xf(x)<\frac{x^2}{x^2+x+5}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+5}=1$
이므로 $\lim_{x\to\infty}xf(x)=1$

13 $x<1$일 때, $f(x)=x-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{x^2}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{2x+1}{2(1+x)}=\frac{3}{4}$$

$x>1$일 때, $f(x)=1-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1+}\left\{-\frac{1}{2(1+x)}\right\}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$$

14 $f(x)=a(x-2)(x+2)\ (a>0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}a(x-2)=-4a=-8$$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}2(x+2)=8$$

15 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}+2t}{-t-\sqrt{t^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+2}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{1+2}{-1-1}=-\frac{3}{2}$$

16 (1) $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3x-4}{3x+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{4x+2}=1$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3x-4}{3x-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-4}{2x+2}=-1$$

17 해결 과정 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

이므로 $b=-a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=a+2=3$$ ▸ 3점

답 구하기 $\therefore\ a=1,\ b=-2$ ▸ 3점

18 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{(t+2)^2-4}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+4)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+4}=8\cdot\frac{1}{4}=2$$

19 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-10x+7}+ax-b\right)=0$이므로

$a<0$이어야 한다. 한편,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-10x+7}+ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(9-a^2)x^2+2(ab-5)x+7-b^2}{\sqrt{9x^2-10x+7}-(ax-b)}=0$$

이므로 $9-a^2=0,\ 2(ab-5)=0$

이때 $a<0$이므로 $a=-3,\ b=-\dfrac{5}{3}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{9x^2-10x+7}+ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left\{7-\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right\}}{\sqrt{9x^2-10x+7}-\left(-3x+\frac{5}{3}\right)}=\frac{19}{27}$$

20 해결 과정 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a=2$ ▸ 2점

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=\infty,\ \lim_{x\to2}|f(x)|=\infty$이려면

$\lim_{x\to-1}(2x^2+bx+c)=0,\ 2-b+c=0$

$\lim_{x \to 2}(2x^2+bx+c)=0$, $8+2b+c=0$ ▸ 2점

답 구하기 위의 두 식을 연립하여 풀면

$\therefore\ b=-2$, $c=-4$ ▸ 2점

$\therefore\ a-b-c=8$ ▸ 2점

21 $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{3}$에서 극한값이 존재하려면 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$이므로

$a\sqrt{2}-b=0$　　$\therefore\ b=a\sqrt{2}$　　……㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

따라서 $a=2\sqrt{6}$, $b=4\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=24+48=72$

22 (1) 해결 과정 $x\to1-$일 때, $g(x)\to1-$이므로 $g(x)=t$로 놓으면

답 구하기 $\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=-1$

▸ 3점

(2) 해결 과정 $x\to1+$일 때, $g(x)=1$이므로

답 구하기 $\lim_{x\to1+}f(g(x))=f(1)=0$ ▸ 3점

(3) 해결 과정 $\lim_{x\to1-}f(g(x))\neq\lim_{x\to1+}f(g(x))$

답 구하기 따라서 $\lim_{x\to1}f(g(x))$의 값이 존재하지 않는다. ▸ 2점

23 해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 극한값이 존재하고,

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ▸ 2점

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-4$에서 극한값이 존재하고,

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$　　$\therefore\ f(2)=0$ ▸ 2점

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

(a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)$

$=-(a+b)=2$　　……㉠

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)$

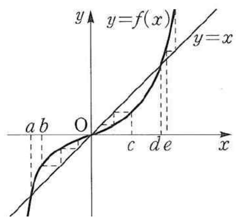
$=2a+b=-4$　　……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$, $b=0$이므로

$f(x)=-2x(x-1)(x-2)$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore\ \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x+1}=\frac{-12}{4}=-3$ ▸ 2점

24 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$보다 아래쪽에 있으면 n이 커짐에 따라 $f^n(x)$의 값은 작아지고, $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$보다 위쪽에 있으면 n이 커짐에 따라 $f^n(x)$의 값은 커지므로



$\lim_{n\to\infty}f^n(b)=0$, $\lim_{n\to\infty}f^n(c)=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}f^n(e)$는 양의 무한대로 발산하게 된다.

한편, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표인 a, d는 아무리 합성해도 자기 자신만 나오므로

$\lim_{n\to\infty}f^n(a)=a$, $\lim_{n\to\infty}f^n(d)=d$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 x는 b, c이다.

Ⅰ-2. 함수의 연속

01 함수의 연속

기본

01 답 (1) $[-1,\ 4]$ (2) $[-2,\ 5)$ (3) $(2,\ 6]$ (4) $(3,\ \infty)$

02 답 (1) $(-\infty,\ 1]$ (2) $[-2,\ 2]$

03 답 (1) 연속 (2) 불연속

04 답 $-\frac{1}{4}$

표준

01 답 $a=1$, $b=-1$

02 답 4

03 답 해설 참조

(ⅰ) $|x|<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$

(ⅱ) $x=1$, $x=-1$인 경우

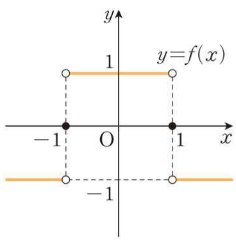
$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$

(ⅲ) $|x|>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-1$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, $x=-1$, $x=1$을 제외한 모든 실수 x에서 연속이다.

04 답 해설 참조

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로 두 원이 외접할 때, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1)$ 또는 $(4,\ 1)$

또, 두 원이 내접할 때, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$ 또는 $(2,\ 1)$

(ⅰ) $a<-2$, $0<a<2$, $a>4$일 때,

$f(a)=0$

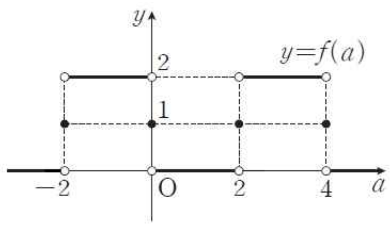
(ⅱ) $a=-2$, $a=0$, $a=2$, $a=4$일 때,

$f(a)=1$

(ⅲ) $-2<a<0$, $2<a<4$일 때,

$f(a)=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 불연속인 점은 $x=-2$, $x=0$, $x=2$, $x=4$이다.

발전

01 답 3개

$x\to1+$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{ax+\frac{2}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{b}{x^n}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1+}ax$$

$$=a$$

$x\to1-$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{ax^{n+1}+2x+1}{x^n+x+b} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{2x+1}{x+b}$$

$$= \frac{3}{1+b}$$

또, $x=1$일 때,

$$f(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{ax^{n+1}+2x+1}{x^n+x+b} = \frac{a+3}{2+b}$$

이때 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는

$$a = \frac{3}{1+b} = \frac{a+3}{2+b}$$

즉, $a(b+1)=3$ (단, $b \neq -1$, $b \neq -2$)

이때 a, b $(b \neq -1,\ b \neq -2)$는 정수이므로

$$\begin{cases} a=-1 \\ b+1=-3 \end{cases},\ \begin{cases} a=1 \\ b+1=3 \end{cases},\ \begin{cases} a=3 \\ b+1=1 \end{cases}$$

따라서 구하는 정수 a, b의 순서쌍은

$(-1,\ -4)$, $(1,\ 2)$, $(3,\ 0)$의 3개이다.

02 답 (1) $a-b=5$ (2) $2a+b=1$

(3) $a=2$, $b=-3$

(1) $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$이므로

$a-b=5$

(2) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$이므로

$2a+b=1$

(3) (1), (2)의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$

Ⅰ-2. 함수의 연속

02 연속함수의 성질

기본

01 답 (1) $(-\infty,\ \infty)$

(2) $(-\infty,\ 0),\ (0,\ 2),\ (2,\ \infty)$

02 답 해설 참조

(1) $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$, $f(0)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(2) 불연속인 점의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$의 3이다.

03 답 해설 참조

$H(x)=f(1-x)-f(x)$라고 하면

$H(0)=f(1)-f(0)$

$=0-1=-1<0$

$H(1)=f(0)-f(1)$

$=1-0=1>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $H(x)=0$, 즉 방정식 $f(1-x)-f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

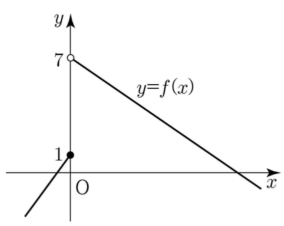
04 답 ③

표준

01 답 ③

02 답 13

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ⅰ) $a=0$일 때,

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=7^2=49$

즉, $\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)\neq \lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)$

이므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ⅱ) $a>0$일 때,

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 1$

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 7$

$f(a)f(a-a)=f(a)f(0)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 1$

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 7=-\frac{1}{2}a+7$이어야 한다.

$-\frac{7}{2}a+\frac{1}{2}a=7-49,\ 3a=42 \qquad \therefore\ a=14$

(ⅲ) $a<0$일 때,

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=(a+1)\times 1$

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=(a+1)\times 7$

$f(a)f(a-a)=f(a)f(0)=(a+1)\times 1$

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$(a+1)\times 7=a+1$이어야 한다.

$7a-a=1-7,\ 6a=-6 \qquad \therefore\ a=-1$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$

03 답 최댓값 3, 최솟값 1

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 1을 갖는다.

04 답 2

$g(x)=x^2f(x)-(2x+1)$이라고 하면 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다. 이때

$g(-1)=f(-1)+1=2>0$

$g(0)=-1<0$

$g(1)=f(1)-3=0$

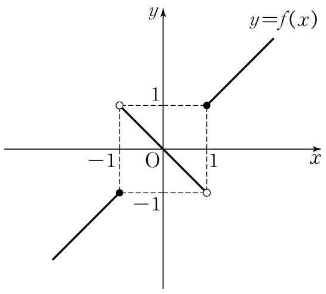
$g(2)=4f(2)-5=3>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖고, 또 다른 실근 $x=1$을 갖는다.
따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 2개의 실근을 가지므로 $m=2$

발전

01 답 ⑤

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=1$인 점에서 불연속이다. 그러므로 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1-}(x-1)f(x)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to 1+}(x-1)f(x)=0\times 1=0$

$(1-1)f(1)=0\times 1=0$

즉, $\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=(1-1)f(1)$이므로 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x\neq-1,\ x\neq 1$인 모든 점에서 연속이므로 $x=-1,\ x=1$인 점에서 함수 $\{f(x)\}^2$이 연속인지 알아보자.

(ⅰ) $\lim_{x\to -1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim_{x\to -1+}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\{f(-1)\}^2=(-1)^2=1$

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x)\}^2=\{f(-1)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=-1$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\{f(1)\}^2=1^2=1$

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

02 답 $g(x)=x^3-x+3$

$g(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, $g(0)=3$이므로 $g(x)=x^3+ax^2+bx+3$으로 놓는다.
이때 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 불연속이고 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) $x=0$에서 연속일 때,

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$

$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-}g(x)=g(1)$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-}g(x)=g(1)$

$\lim_{x\to 0}g(f(x))=(g\circ f)(0)$이므로 $g(1)=3$

$1+a+b+3=3$

$\therefore\ a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

(ⅱ) $x=2$에서 연속일 때,

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(0)=3$

$\lim_{x\to 2+}g(f(x))=\lim_{x\to -1+}g(x)=g(-1)$

$\lim_{x\to 2-}g(f(x))=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to 2}g(f(x))=(g\circ f)(2)$이므로

$g(-1)=g(0)=3$

$-1+a-b+3=3$에서

$\therefore\ a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$\therefore\ a=0,\ b=-1$

$\therefore\ g(x)=x^3-x+3$

Ⅰ-2. 함수의 연속

01 ③	**02** ②	**03** ③	**04** ①	**05** ⑤
06 ②	**07** ①	**08** ①	**09** ⑤	**10** ②
11 ①	**12** ③	**13** ④	**14** ⑤	**15** -1
16 0	**17** 57	**18** 6	**19** 해설 참조	
20 3	**21** (1) 해설 참조	(2) 해설 참조		
(3) $a=2$, $b=-1$	**22** 1	**23** 120		

01 주어진 그래프에서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하고 $f(a)$가 정의되어 있지만 $x=a$에서 불연속인 것은 ③이다.

02 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+1}{x-1}=f(1)=b$ ……㉠

㉠에서 (분모)→0일 때, (분자)→0이어야 하므로

$1+a+1=0$ ∴ $a=-2$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x-1)=1=b$$

∴ $a+b=-1$

03 $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$g(-2)=f(-2)-(-2)=-1+2=1>0$

$g(-1)=f(-1)-(-1)=-2+1=-1<0$

$g(0)=f(0)-0=1-0=1>0$

$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0$

$g(2)=f(2)-2=1-2=-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2,-1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 방정식 $f(x)=x$는 적어도 3개의 실근을 가지므로 $m=3$

04 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)$

$-a+1=3+b$에서

$a+b=-2$ ……㉠

$x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$에서

$b=2a+1$ 즉, $2a-b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

∴ $ab=1$

05 ① $f(0)$이 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}[x]^2=0$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}[x]^2=(-1)^2=1$

이므로 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\dfrac{|2x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{2x}{x}=2$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\dfrac{|2x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{-2x}{x}=-2$

이므로 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(2\sqrt{x+1}-2)=0$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

따라서 $x=0$에서 연속이다.

06 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=4f(2)=8$$

∴ $f(2)=2$

07 $f(x)=f(x+3)$에서 $3 \le x < 6$일 때,
$f(x)=(x-3)^3+a(x-3)^2+b(x-3)+3$
이므로

$$\lim_{x\to 3-} f(x)= \lim_{x\to 3-}(x^3+ax^2+bx+3)$$
$$=9a+3b+30$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 3+}\{(x-3)^3+a(x-3)^2+b(x-3)+3\}$$
$$=3$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로
$9a+3b+30=3$, $9a+3b=-27$
$\therefore$ $3a+b=-9$

08 ㄱ. [반례]
$f(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$이면
$f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=0$에서 불연속이지만
$f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이 성립한다.
이때 $\lim_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$이므로
$y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. [반례] $f(x)=x+1$, $g(x)=x$는 각각
$x=0$에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$
이므로 연속이지만 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+1}{x}$은
$x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

09 $$f(x)=\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{x}{x^2-2}}$$
$$=\frac{x^2-2}{x^3-3x}$$
즉, $x=0$, $x^2-2=0$, $x^3-3x=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 0, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$의 5개이다.

10 $f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$이므로
닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $x=1$일 때 최댓값 3,
$x=4$일 때 최솟값 -6을 갖는다.
$\therefore$ $3+(-6)=-3$

11 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
조건 (나)에서 $f(x)=f(2+x)$이므로 함수 $f(x)$는 주기함수이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[0, 2]$에서의 그래프 모양이 반복되어 나타난다.
함수 $y=f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 조건 (다)에서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.
또한, 닫힌구간 $[-4,\ 6]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서의 그래프 모양이 반복되므로 닫힌구간 $[-5,\ 5]$에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 10개의 실근을 갖는다.

12 보기에서 주어진 함수를 $f(x)$라고 하면
ㄱ. $f(0)=16>0$, $f(1)=8>0$
ㄴ. $f(0)=1>0$, $f(1)=3>0$
ㄷ. $f(0)=4>0$, $f(1)=-1<0$
따라서 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄷ뿐이다.

13 ㄱ. $F(x)=x-f(x)$로 놓으면
$F(0)F(1)=\{0-f(0)\}\{1-f(1)\}=-1<0$
ㄴ. $G(x)=x-f(f(x))$로 놓으면
$G(0)G(1)=\{0-f(f(0))\}\{1-f(f(1))\}$
$=\{0-f(1)\}\{1-f(0)\}=0$
ㄷ. $H(x)=f(1-x)-f(x)$로 놓으면
$H(0)H(1)=\{f(1)-f(0)\}\{f(0)-f(1)\}$
$=-1<0$
따라서 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(0,\ 1)$에서 항상 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 (ⅰ) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ⅱ) $x \neq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 첫째항이

$\dfrac{x^2}{1+x^2}$, 공비가 $\dfrac{x^2}{1+x^2}$인 등비급수의 합이고,

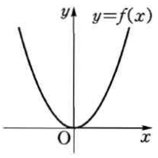
$0<\dfrac{x^2}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}=x^2$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ㄷ. $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

15 해결 과정 (i) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x+\dfrac{2}{x^{n-2}}+\dfrac{a}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{n-1}}}=x$$ ▸ 2점

(ii) $|x|<1$일 때, $f(x)=2x+a$ ▸ 2점

(iii) $x=1$일 때, $f(x)=\dfrac{3+a}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 $x=1$에서 연속이므로 (i), (ii), (iii)에서

$x=2x+a=\dfrac{3+a}{2}$

이때 $x=2x+a$에서 $x=-a$이므로

$-a=\dfrac{3+a}{2}$ $\quad\therefore\ a=-1$ ▸ 2점

16 $f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 $M=2$,

$x=1$일 때 최솟값 $m=-2$이다.

$\therefore M+m=0$

17 $f(x)=[2^x]$은 2^x의 값이 정수인 점에서 불연속이다. $n<x<n+1$이면 $2^n<2^x<2^{n+1}$이므로 열린구간 $(n,\ n+1)$에서의 불연속인 점의 개수는

$a_n=2^{n+1}-2^n-1=2^n-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1$$
$$=\dfrac{2(2^5-1)}{2-1}-5=57$$

18 $x \neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)$$
$$=3\cdot 2=6$$

19 해결 과정 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있고,

$f(1)=1+1=2$ ▸ 1점

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-2x+4)=2$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$가 존재하고

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ▸ 1점

20 $x+1=x^2-1$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

즉, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ 2$에서 연속이고 그 이외의 점에서는 불연속이다.

따라서 $a=2,\ b=1$이므로

$a+b=3$

21 (1) 해결 과정 $n-1 \le x < n$일 때, $[x]=n-1$

답 구하기 $\therefore\ f(x)=(n-1)^2-(ax+b)(n-1)$

▸ 2점

(2) 해결 과정 $n \le x < n+1$일 때, $[x]=n$

답 구하기 $\therefore\ f(x)=n^2-(ax+b)n$ ▸ 2점

(3) 해결 과정 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x \to n-} f(x)=\lim_{x \to n+} f(x)=f(n)$,

$(n-1)^2-(an+b)(n-1)=n^2-(an+b)n$,

$(a-2)n+b+1=0$ ……㉠ ▸ 2점

답 구하기 ㉠이 n에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=-1$ ▸ 2점

22 해결 과정 $x \ne 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x+a}{\sqrt{x}-1}$이고

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1}(x+a)=0,\ 1+a=0$

$\therefore\ a=-1$ ▸ 2점

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\\ &= \lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x \to 1}(\sqrt{x}+1)=2\end{aligned}$$

그런데 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\therefore\ b=f(1)=\lim_{x \to 1} f(x)=2$ ▸ 4점

답 구하기 $\therefore\ a+b=1$ ▸ 2점

23 (ⅰ) $1<x<3$일 때, $f(x)=0$

(ⅱ) $3 \le x < 9$일 때, $f(x)=1$

(ⅲ) $9 \le x < 27$일 때, $f(x)=2$

(ⅳ) $27 \le x < 81$일 때, $f(x)=3$

(ⅴ) $81 \le x < 100$일 때, $f(x)=4$

즉, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(1,\ 100)$에서 불연속이 되는 x의 값은 $3,\ 9,\ 27,\ 81$이다.

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$3+9+27+81=120$

I 함수의 극한과 연속

01 ②	**02** 4	**03** ④	**04** ①	**05** 1
06 ②	**07** ②	**08** ②	**09** ①	**10** ④
11 ①	**12** ④	**13** ①, ④		**14** ③
15 ⑤	**16** ④	**17** ①	**18** ①	
19 ㄴ, ㄷ		**20** 0	**21** 3	**22** 1
23 10	**24** $-\frac{1}{2}$	**25** 13		

09 $f(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로

$x>0$

따라서 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{1}{x^2+200x} \le f(x) \le \frac{1}{x^2+100x}$$

각 변에 $3x^2+4$를 곱하면

$$\frac{3x^2+4}{x^2+200x} \le (3x^2+4)f(x) \le \frac{3x^2+4}{x^2+100x}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+200x}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+100x}=3$

이므로 $\lim_{x\to\infty}(3x^2+4)f(x)=3$

10 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+1}{x^2-1}$의 값이 1로 수렴하므로

분자와 분모의 차수가 같고 최고차항의 계수가 같아야 한다.

$\therefore\ a=0,\ b=1 \qquad \therefore\ a+b=1$

12 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$라 하면

조건 ㈎에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2}$$

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\therefore\ f(0)=0=d$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c}{x}$$

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\therefore\ c=0$

즉, $\lim_{x\to 0}(ax+b)=b$에서

$b=4$

$\therefore\ f(x)=ax^3+4x^2$

조건 ㈏에서

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\therefore\ f(2)=a\cdot 2^3+4\cdot 2^2=0$

$\therefore\ a=-2 \qquad \therefore\ f(x)=-2x^3+4x^2$

$\therefore\ f(-2)=-2(-2)^3+4(-2)^2=32$

14 ㄱ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}$

ㄷ. [반례] $a=2$이고, $f(x)=\frac{1}{x-1}$

16 $f(x)=x^3+3x^2+4x-12$라고 하면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고,

$f(1)=-4<0$, $f(2)=16>0$이므로, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 단 하나의 실근을 갖는다.

17 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$, $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=4$

$\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to 3}(x^2+ax+b)=0$

$\therefore\ 9+3a+b=0 \qquad \therefore\ b=-3a-9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+a+3)}{x-3}=6+a=4$$

$\therefore\ a=-2$

㉠에서 $b=-3 \qquad \therefore\ a+b=-5$

18 ① $x=a$에서 $f(x)$가 연속이려면 $f(a)$와 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하고 $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$이어야 한다.

③ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, $f(x)=t$로 놓으면

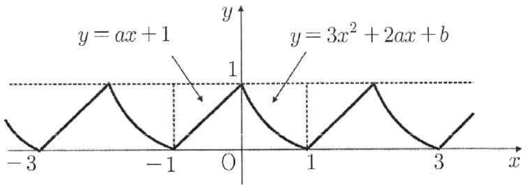
$x\to 0$일 때 $t\to f(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{t\to f(0)}|t|=|f(0)|$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$

따라서 함수 $|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

20 문제 이해 $f(x+2)=f(x)$ 에서 최소의 주기가 2 이고 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=0$ 에서도 연속이다.



해결 과정 (ⅰ) $x=0$ 에서 $f(x)$ 가 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0-} f(x)$, 즉

$3\times 0^2+2a\times 0+b=\lim_{x\to 0-}(ax+1)$

$\therefore\ b=1$ ▸ 2점

(ⅱ) $x=-1$ 에서 $f(x)$ 가 연속이고 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x^2+2ax+b)$

즉,

$f(-1)=\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x^2+2ax+b)$

$-a+1=3+2a+b$

$\therefore\ a=-1$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore\ a+b=0$ ▸ 2점

21 해결 과정 (ⅰ) $a\neq 0$ 인 경우

방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 판별식 D가 양수이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4$

$=2(a^2-3a+2)=2(a-1)(a-2)>0$

$\therefore\ a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$ ▸ 2점

또, 중근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

또, 실근을 갖지 않을 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)<0$

$\therefore\ 1<a<2$ ▸ 2점

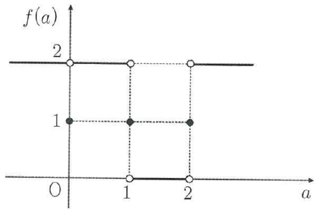
(ⅱ) $a=0$ 인 경우

$-4x+2=0\quad\therefore\ x=\frac{1}{2}$ ▸ 2점

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1,\ a>2)\\ 1 & (a=0,\ 1,\ 2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



답 구하기 $a=0,\ 1,\ 2$ 에서 함수 $f(a)$가 불연속이므로 구하는 값은 $0+1+2=3$ ▸ 2점

22 해결 과정 직선 OP의 기울기가 $\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$ 이므로 점 P를 지나고 $\overline{\mathrm{OP}}$와 수직인 직선의 기울기는

$m=-\sqrt{t}$ ▸ 2점

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t}$ 이므로

$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\overline{\mathrm{OP}}+m}{t}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}{t}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}\right)}{t\left(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}\right)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}}$ ▸ 2점

답 구하기 $=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}}}=1$ ▸ 2점

23 문제 이해

$$f(x)=\begin{cases}ax^2 & (|x|>1)\\ \frac{a+5}{1+b} & (x=1)\\ \frac{2x+3}{b} & (|x|<1)\end{cases}$$

해결 과정 $x=1$에서 연속이려면

$\frac{a+5}{1+b}=\lim_{x\to 1+} f(x)=a$ …… ㉠ ▸ 2점

$\frac{a+5}{1+b}=\lim_{x\to 1-} f(x)=\frac{5}{b}$ …… ㉡ ▸ 2점

㉠, ㉡에서 $ab=5$

답 구하기 따라서 $a^2+b^2 \geq 2|ab| = 10$이므로
a^2+b^2의 최솟값은 10이다. ▸ 2점

24 문제 이해 $\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\{f(x)-2g(x)\}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}=0$ ▸ 2점

따라서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1}\left(1-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right)=0$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-4g(x)}{3f(x)-2g(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1-4\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{3-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$

$=\frac{1-4\cdot\frac{1}{2}}{3-2\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$ ▸ 2점

25 해결 과정 $g(x)=(x-2)^2+k-4$ 이므로
$x\to2$일 때, $g(x)\to(k-4)+$ 이다.
따라서 $\lim_{x\to2}f(g(x))=\lim_{t\to(k-4)+}f(t)$ 이다.
이때 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서
$\lim_{t\to(k-4)+}f(t)$의 값은 항상 존재하므로 함수
$(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면
$\lim_{t\to(k-4)+}f(t)\neq f(g(2))$이어야 한다.
이때 $f(g(2))=f(k-4)$이므로 함수
$(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면
$\lim_{t\to(k-4)+}f(t)\neq f(k-4)$이어야 한다. ▸ 2점
즉, 함수 $f(x)$의 $x=k-4$에서의 함숫값과
$x=k-4$에서의 우극한이 서로 달라야 한다.
따라서 $k-4=2$ 또는 $k-4=3$이므로
$k=6$ 또는 $k=7$ ▸ 2점
답 구하기 구하는 모든 k의 값의 합은
$6+7=13$ ▸ 2점

Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

01 미분계수

기본

01 답 (1) -2 (2) $6a^2+6a\Delta x+2(\Delta x)^2$

02 답 4

03 답 15.6(원/kg)

04 답 6

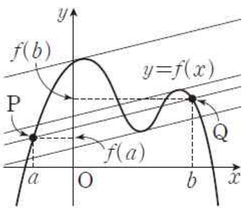
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3=3f'(1)=6$$

표준

01 답 $\frac{3}{2}$

02 답 ③



오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q를 잇는 직선을 그리면 이 직선과 같은 기울기를 가지며 곡선에 접하는 직선은 모두 3개를 그을 수 있다. 따라서 x가 a에서 b까지 변할 때, $f(x)$의 평균변화율과 $x=c$에서의 미분계수가 같게 되는 실수 c는 3개 존재한다.

03 답 -5

04 답 ④

$$f'(x)=\begin{cases}x^2+a & (x>1)\\ 4x & (x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능

$\lim_{x\to 1+0}(3x^2+a)=\lim_{x\to 1-0}4x$에서 $3+a=4$

$\therefore a=1$

발전

01 답 해설 참조

(1) (ⅰ) $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x|x|=0$

이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0$

$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0$

따라서 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$

$\therefore$ 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (ⅰ) $f(0)=0$,

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x-|x|)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(\Delta x+\Delta x)-0}{\Delta x}=2$

$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x+\Delta x)-0}{\Delta x}=0$

따라서 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$은 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=x-|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

02 답 ③

① [그림1]에서 세 점
$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에 대하여 두 직선 OA, OB의 기울기는 각각 $\dfrac{f(a)-0}{a-0}=\dfrac{f(a)}{a}$, $\dfrac{f(b)-0}{b-0}=\dfrac{f(b)}{b}$이고 그래프에서 직선 OB의 기울기가 직선 OA의 기울기보다 크므로 $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$이다.
(거짓)

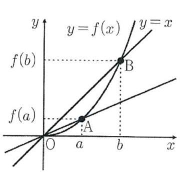
② [그림 2]에서 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(a)$, $f'(b)$이고 그래프에서 두 접선의 기울기를 비교해 보면 $f'(a)<f'(b)$ 이다. (거짓)

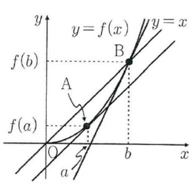
③ [그림 3]에서 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 1보다 크므로 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$
즉 $f(b)-f(a)>b-a$ 이다. (참)

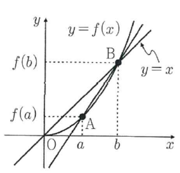
④ $0<a<b$ 에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고 x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 커진다. $f'(\sqrt{ab})<f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
(거짓)

⑤ [그림 3]에서 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기는 1보다 크다. (거짓)

[그림 1] [그림 2] [그림 3]







Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

02 도함수

기본

01 답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=5$

(3) $f'(x)=6x$ (4) $f'(x)=3x^2$

02 답 (1) 8 (2) -8

03 답 해설 참조

(1) $y'=3(x^2+x+1)+(3x-2)(2x+1)$

$=9x^2+2x+1$

(2) $y'=2x(2x^2-x-1)+(x^2-1)(4x-1)$

$=8x^3-3x^2-6x+1$

04 답 ①

표준

01 답 ④

02 답 $a=1$, $b=1$

03 답 85

04 답 25

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

이때 $\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to 0$이므로 주어진 식은

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(1+3t)-f(1-2t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+3t)-f(1)-\{f(1-2t)-f(1)\}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{3t}\times 3+\lim_{t\to 0}\frac{f(1-2t)-f(1)}{-2t}\times 2$$

$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$

따라서 $f(x)=2x^4-3x+1$에서

$f'(x)=8x^3-3$이므로 $5f'(1)=5\times(8-3)=25$

발전

01 답 (1) 0 (2) 5 (3) $2x+5$

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 의 양변에

$x=y=0$ 을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

(2) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5$

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5$

(3) 주어진 관계식에서

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh$ 이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x\right\}$$

$\therefore\ f'(x)=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2x+5$

02 답 1

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\ ax^2+bx+c & (0\le x<2)\\ 2 & (x\ge 2)\end{cases}$$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2ax+b & (0<x<2)\\ 0 & (x>2)\end{cases}$$

(ⅰ) $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $g(0)=c=\lim_{x\to 0-}(x+1)=1$ …… ㉠

$x=0$에서 미분계수 $g'(0)=b=1$ …… ㉡

(ⅱ) $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$g(2)=\lim_{x\to 2-}(ax^2+bx+c)=4a+2b+c=2$

…… ㉢

$x=2$ 에서 미분계수

$g'(2)=4a+b=0$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하면

$a=-\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=1$

$\therefore$ $4a+b+c=1$

Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

01 ④	**02** ①	**03** ④	**04** ⑤	**05** ③
06 3	**07** ②	**08** ①	**09** 68	**10** ③
11 ⑤	**12** ④	**13** ⑤	**14** ⑤	**15** ①
16 16	**17** -1	**18** -11	**19** 4	
20 해설 참조	**21** 3			

22 (1) $x^8-x^2+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

(2) $a=6$, $b=-5$ (3) $6x-5$

23 ④ **24** $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x$

01 $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^2-2a-(1-2)}{a-1}$

$=\frac{a^2-2a+1}{a-1}=a-1=8$

이므로 $a=9$

02 $\frac{f(a+2)-f(a)}{a+2-a}=\frac{\{(a+2)^2-1\}-(a^2-1)}{2}$

$=2a+2$

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}(h+4)$

$=4$

$2a+2=4$이므로 $a=1$

03 ㄱ. $\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$는 두 점 $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$을 이은 직선의 기울기이므로

$\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}>0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)$이고 이것은 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선의 기울기이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}<0$ (참)

ㄷ. $f'(\beta)$는 $(\beta, f(\beta))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(\gamma)$은 $(\gamma, f(\gamma))$에서의 접선의 기울기이므로 $f'(\beta)<f'(\gamma)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\cdot(-3)$

$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)=5$

05 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$

$=f'(2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

06 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{f(x)-f(-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{f(x)-f(-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x-(-1)}{f(x)-f(-1)}\times\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)$

$=\frac{1}{f'(-1)}\times3=\frac{1}{1}\times3=3$

07 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-xf(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)(1-x)}{x-1}$

$=f'(1)-f(1)=4-2=2$

08 조건 ㈎에서 $f(0+0)=f(0)+f(0)-0$이므로

$f(0)=0$

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=0$

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1=-1$

09 $\lim_{x\to3}\frac{f(x+1)-8}{x^2-9}=10$에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉, $\lim_{x\to3}\{f(x+1)-8\}=0$이므로

$f(4)-8=0$ $\therefore f(4)=8$

$x-3=h$로 놓으면 $x\to3$일 때, $h\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x+1)-8}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x+1)-8}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(4+h)-f(4)}{(h+6)h}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\cdot\frac{1}{h+6}$$
$$=\frac{1}{6}f'(4)$$

$\frac{1}{6}f'(4)=10$에서 $f'(4)=60$

$\therefore f(4)+f'(4)=8+60=68$

10 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=d$에서 연속이 아니므로 $p=2$

함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=d$에서 미분가능하지 않으므로 $q=4$ $\therefore p+q=6$

11 ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$,

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)=0$,

$$\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1$$

$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=-1$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이지만 미분불가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1}h(x)=h(-1)=0$,

$$\lim_{x\to-1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}=-2$$

$\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}=2$ 이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이지만 미분불가능하다.

따라서 $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

12 $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h+2h|h|}{h}=\lim_{h\to0}(1+2|h|)=1$$

13 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$에서

$f'(1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=45$

$n^2+n-90=0$, $(n-9)(n+10)=0$

$\therefore n=9$

14 $g'(x)=2f'(x)-2x+3$에서

$g'(3)=2f'(3)-6+3=2\times4-3=5$

15 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 7)$에서의 접선의 방정식이 $y=-x+5$이므로 $f'(-2)=-1$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-2+3h)-f(-2)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+3h)-f(-2)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-1)=-\frac{3}{2}$$

16 $f'(x)=6x^2+2x$이고, $\frac{1}{n}=h$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}2f'(1)=2\times8=16$$

17 해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$이므로 $f(1)=0$

즉 $1+a-b=0$, $a-b=-1$ …… ㉠ ▸ 2점

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$이고, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$3+2a+b=0$, $2a+b=-3$ …… ㉡ ▸ 2점

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ $\therefore a-b=-1$ ▸ 2점

18 해결 과정 $x\neq5$일 때, $f(x)=\frac{2x^2+ax+5}{x-5}$

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 미분 가능하므로 $x=5$에서 연속이다. ▸ 2점

따라서 $f(5)=\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{2x^2+ax+5}{x-5}$의 값이 존재한다. ▸ 2점

$x\to5$일 때, (분모)→0이므로 (분자)→0

$\lim_{x\to5}(2x^2+ax+5)=0$에서

답 구하기 $50+5a+5=0$ $\therefore a=-11$ ▸ 2점

19 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=1+a,\ \lim_{x\to1-}f(x)=b+1,$

$\lim_{x\to1+}f(x)=1+a$에서 $1+a=b+1,\ a=b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분 가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{bx+1-(1+a)}{x-1}$$
$$=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+a-(1+a)}{x-1}$$
$$=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $a=b=2$ $\therefore a+b=4$

20 해결 과정 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ▸ 2점

$$=\lim_{h\to0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}$$

▸ 3점

답 구하기 $\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)$

▸ 3점

21 $\lim_{h\to0}\frac{f(3-3h)-f(3+2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3-3h)-f(3)+f(3)-f(3+2h)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3-3h)-f(3)}{-3h}\cdot(-3)$$
$$-\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2$$

$=-3f'(3)-2f'(3)=-5f'(3)$

따라서 $-5f'(3)=15$에서 $f'(3)=-3$이므로

$$f'(-3)=\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-1)$$
$$=-f'(3)=3$$

22 해결 과정

(1) $x^8-x^2+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ▸ 2점

(2) $f(x)=x^8-x^2+1$이라 하면

$f(1)=1=a+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

(1)에서 구한 식의 양변을 미분하면

$8x^7-2x=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=-5$ ▸ 3점

답 구하기 (3) 나머지가 $ax+b$이므로 $6x-5$

▸ 3점

23 주어진 식에 $x=1,\ y=0$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(0)-1$에서 $f(0)=1$

이때

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+4h-1-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+4$$

이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+4=10$에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=6$

$$\therefore f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=6$$

24 $f(x)=x^3+f'(1)x^2+f'(-1)x$에서

$f'(x)=3x^2+2f'(1)x+f'(-1)$

양변에 $x=1,\ x=-1$을 각각 대입하면

$f'(1)=3+2f'(1)+f'(-1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=3-2f'(1)+f'(-1)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$f'(-1)=-\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x$

Ⅱ-2. 도함수의 활용

01 접선의 방정식

기본

01 답 $y=x+2$

02 답 $y=5x+4$ 또는 $y=5x-4$

03 답 4

04 답 ①

표준

01 답 $y=x+3$

02 답 ④

$f(x)=x^3+ax+3$에서 $f'(x)=3x^2+a$
점 $(-1,\ b)$에서 직선 $y=5x+c$와 접하므로
$f(-1)=-1-a+3=b$ …… ㉠
$f'(-1)=3+a=5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=0$
따라서 곡선 $f(x)=x^3+2x+3$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은
$y-0=5(x+1)$
$\therefore\ y=5x+5 \qquad \therefore\ c=5$
$\therefore\ abc=2\cdot 0\cdot 5=0$

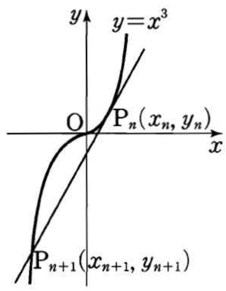
03 답 ④

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$
$g(x)=x^2+bx+c$에서 $g'(x)=2x+b$
두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $f(1)=1+a=2 \quad \therefore\ a=1$ …… ㉠
$g(1)=1+b+c=2 \therefore\ b+c=1$ …… ㉡
또, 점 $(1,\ 2)$에서 공통접선을 가지므로 이 점에서의 기울기가 같다. $f'(1)=g'(1)$에서
$3+a=2+b$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=2,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+2c=1+2-2=1$

04 답 ④

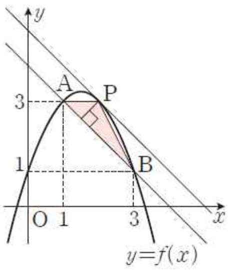
발전

01 답 $(-2)^9$



접점을 $P_n(x_n,\ y_n)$으로 놓으면 $y_n=x_n^{\ 3}$이고 접선의 기울기는 $y_n'=3x_n^{\ 2}$이므로 직선 P_nP_{n+1}의 방정식은
$y-x_n^{\ 3}=3x_n^{\ 2}(x-x_n)$
$y=3x_n^{\ 2}x-2x_n^{\ 3}$
이 직선과 $y=x^3$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면 $x^3=3x_n^{\ 2}x-2x_n^{\ 3}$에서
$x^3-3x_n^{\ 2}x+2x_n^{\ 3}=0,\ (x-x_n)^2(x+2x_n)=0$
따라서 점 P_{n+1}의 x좌표는 $x_{n+1}=-2x_n$
한편, 점 $P_1(1,\ 1)$에서 $x_1=1$이므로
$x_n=x_1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$
따라서 점 P_{10}의 x좌표는 $x_{10}=(-2)^9$

02 답 P (2, 3)



선분 AB의 길이는 일정하므로 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 길이 PH가 최대일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다.
따라서 직선 AB의 기울기가 점 P에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로 점 P의 x좌표는
$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(x)$에서
$\dfrac{1-3}{3}=-2x+3,\ -1=-2x+3$
$\therefore\ x=2$
$y=-2^2+3\times 2+1=3$
그러므로 점 P (2, 3)

Ⅱ-2. 도함수의 활용

02 평균값 정리

기본

01 답 (1) 1 (2) 2

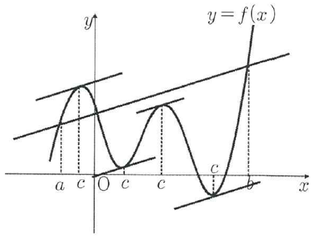
02 답 (1) 3 (2) $\sqrt{3}$

03 답 1

04 답 1

표준

01 답 4개



$y=f(x)$의 그래프에서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$은 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 이은 선분의 기울기와 접점 c에서의 접선의 기울기가 같다는 것이므로 그래프에서 두 점을 잇는 선분의 기울기와 같은 기울기를 갖는 접선의 접점을 찾으면 된다.

따라서 등식 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c의 개수는 4개이다.

02 답 -18

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-5,\ x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x-5,\ x+1)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}=f'(c)\ \ (x-5<c<x+1)$

를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.
이때 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-5)\}$

$=6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}$

$=6\lim\limits_{c\to\infty}f'(c)=6\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=6\cdot(-3)=-18$

03 답 2

04 답 해설 참조

$a<x\le b$인 임의의 x에 대하여 닫힌구간 $[a,\ x]$에서 평균값 정리를 적용하면

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$인 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(c)=0$이므로 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$에서

$f(x)=f(a)$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 상수함수이다.

발전

01 답 (답) (1) 132초 (2) 해설 참조

(1) $\dfrac{3.3}{90}\times3600=132$(초)

(2) 속도위반을 하지 않고 단속 구간을 지나는 데 걸리는 최소 시간은 132초인데, 운전자는 2분(120초)만에 통과하였기 때문에 속도위반을 하였다. 이를 평균값 정리를 이용하여 설명하면 다음과 같다. 2분은 $\dfrac{1}{30}$시간이므로 운전자가 단속 구간을 지날 때의 평균 속도는

$\dfrac{3.3}{\frac{1}{30}}=99$ (km/h)

따라서 평균값 정리에 의하여 운전자는 단속 구간을 지날 때, 적어도 한 번 시속 99 km로 달렸으므로 속도위반을 하였다.

02 답 해설 참조

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다.
이때 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$이므로 $h(x)$는 상수함수이다.
따라서 $h(x)=c$ (c는 상수)라고 하면
$h(x)=f(x)-g(x)=c$
즉, $f(x)=g(x)+c$

Ⅱ-2. 도함수의 활용

03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

기본

01 답 해설 참조

(1) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -3]$, $[1,\ \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-3,\ 1]$에서 감소한다.

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ 1]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -2]$, $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

02 답 (1) 극댓값 7, 극솟값 -1
(2) 극댓값 1, 극솟값 -3

03 답 해설 참조

(1) $t=0.7$(초)일 때 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(0.7)>0$이고, $t=0.8$(초)일 때 접선의 기울기가 음수이므로 $f'(0.8)<0$이다.

(2) $f'(t)$의 부호가 양(+)일 때는 델타파의 주파수가 증가하고 $f'(t)$의 부호가 음(−)일 때는 델타파의 주파수가 감소한다.

04 답 ④

표준

01 답 -20

02 답 해설 참조

정답을 맞힌 학생은 이승우이다.
함수 $y=f(x)$는 $x=x_1$에서 극댓값 b를 갖고, $x=x_4$에서 극솟값 c를 갖는다.
이때 $b<c$이므로 함수의 극댓값이 극솟값보다 항상 크다고 할 수 없다.

03 답 $a=-3$, $b=-12$, $c=-3$

04 답 ①

(ⅰ) $x\ge 2a$일 때,
$$f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$$
이므로 $f'(x)=3x^2+12x+15>0$
즉, 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ⅱ) $x\le 2a$일 때,
$$f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$$
이므로 $f'(x)=3(x+5)(x-1)$
이때, 함수 $f(x)$가 증가하려면 $2a\le -5$
$\therefore\ a\le -\dfrac{5}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{5}{2}$이다.

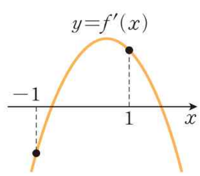
발전

01 답 13

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에서
$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}$
$=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$
이 접선의 y절편, 즉 $x=0$일 때의 y좌표가 $g(t)$이므로
$g(t)-\{t^3-(a+2)t^2+at\}$
$=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(-t)$
따라서 $g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$이므로
$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$
이때, 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가하므로 $0<t<5$에서 $g'(t)>0$이어야 한다.
즉, $g'(0)\ge 0$, $g'(5)\ge 0$
$g'(0)=0$이고, $g'(5)=-150+10(a+2)\ge 0$
따라서 $a\ge 13$이므로 구하는 a의 최솟값은 13이다.

02 답 $1<a<\dfrac{3}{2}$

이차방정식 $f'(x)=-6x^2+2ax+4a^2=0$의 서로 다른 두 실근이 다음 그림과 같이 $-1<x<1$에서 한 개, $x>1$에서 한 개 존재해야 한다.



즉, $f'(-1)<0$, $f'(1)>0$이다.

(ⅰ) $f'(-1)<0$에서

$-6-2a+4a^2<0,\ 2a^2-a-3<0$

$(a+1)(2a-3)<0$

즉, $-1<a<\dfrac{3}{2}$

(ⅱ) $f'(1)>0$에서

$-6+2a+4a^2>0,\ 2a^2+a-3>0$

$(2a+3)(a-1)>0$

즉, $a<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $a>1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $1<a<\dfrac{3}{2}$

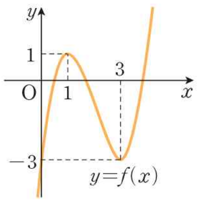
Ⅱ-2. 도함수의 활용

04 함수의 그래프

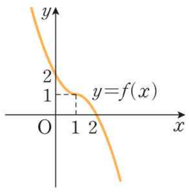
기본

01 답 해설 참조

(1)

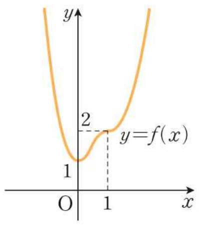


(2)

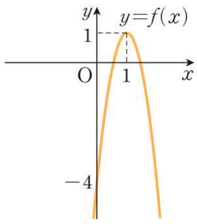


02 답 해설 참조

(1)



(2)



03 답 (1) 최댓값은 4, 최솟값은 0
(2) 최댓값은 6, 최솟값은 2

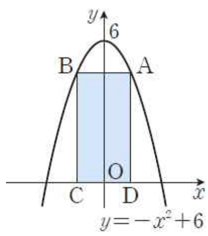
04 답 (1) 1375000천 원
(2) 직원의 수를 400명으로 늘리는 것이 좋다.

표준

01 답 18

02 답 $8\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 꼭짓점 D의 x좌표를 a로 놓으면



$D(a,\ 6-a^2)$, $A(-a,\ 6-a^2)$ $(0<a<\sqrt{6})$이므로

□ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(6-a^2)=-2a^3+12a$

$S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{2}$ ($\because$ $0<a<\sqrt{6}$)

이때 $0<a<\sqrt{6}$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 조사하면 표와 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$일 때, 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $S(\sqrt{2})=8\sqrt{2}$

03 답 6

04 답 4 cm

발전

01 답 2 cm

02 답 $\sqrt{5}-1$

원의 중심을 $C(4,\ 1)$, 점 P의 좌표를 $\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$이라 하면

$\overline{PC}^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^2=\frac{1}{4}x^4-8x+17$

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x+17$로 놓으면

$f'(x)=x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 5를 가지므로 $\overline{PC}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

즉, 구하는 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}-1$

Ⅱ-2. 도함수의 활용

05 방정식과 부등식에의 활용

기본

01 답 3

02 답 2개

03 답 $0<a<1$

04 답 해설 참조

$f(x)=x^3-3x+2$라 하면

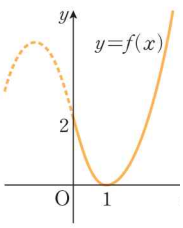
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

$x \geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	0(극소)	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이고 최소이다.



즉, 최솟값이 $f(1)=0$이므로 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^3-3x+2 \geq 0$

따라서 $x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3 \geq 3x-2$가 성립한다.

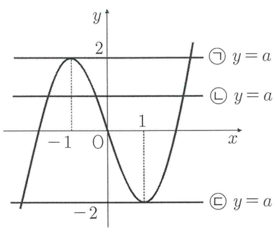
표준

01 답 $k \leq -1$

02 답 $2<k<4$

03 답 $0<a<2$

$x^3-3x=a$이므로 이 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이다.



$f(x)=x^3-3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

서로 다른 두 음근과 하나의 양근을 갖는 경우는 $x<0$에서의 교점이 두 개이고 $x>0$에서의 교점이 한 개이므로 ㉡과 같은 경우이다.

$\therefore\ 0<a<2$

04 답 해설 참조

$f(x)=3x^4-16x^3+30x^2-24x+8$이라 하면

$f'(x)=12x^3-48x^2+60x-24$

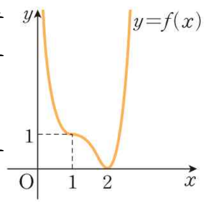
$\quad =12(x-1)^2(x-2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0 (극소)	↗

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 극소이고 최소이다.



즉, 최솟값이 $f(2)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여

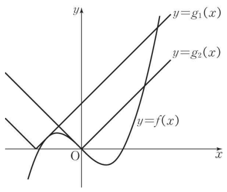
$f(x)=3x^4-16x^3+30x^2-24x+8 \geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$3x^4+30x^2+8 \geq 16x^3+24x$가 성립한다.

발전

01 답 ④



위의 그림과 같이 두 함수 $f(x)=6x^3-x$, $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $g(x)$의 그래프가 곡선 $f(x)=6x^3-x$에 접해야 한다. 이때

$f'(x)=18x^2-1$, $g(x)=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -x+a & (x<a) \end{cases}$이므로 $f'(x)=1$ 또는 $f'(x)=-1$이면서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 찾으면 된다.

(ⅰ) $f'(x)=1$인 경우

$18x^2-1=1$, $x^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}\ (x<0)$

즉, 점 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$을 지나므로

$a=-\dfrac{4}{9}$

(ⅱ) $f'(x)=-1$인 경우

$18x^2-1=-1$, $x^2=0$

$\therefore\ x=0$

즉, 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 실수 a값의 합은

$-\dfrac{4}{9}$이

02 답 $0<k<3$

조건 (가)에서 $x=-3$에서 극값을 가진다.

조건 (나)에서 $f'(3)=0$이므로 $x=3$에서 극값을 가진다. 이때, 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x=-3$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가진다.

한편 $f(3)=0$이므로 $x=3$에서 극솟값으로 0을 가지며 x축과 접한다.

주어진 조건에 의하여 $y=f(x)$는 $x=-3$에서 극대, $x=3$에서 극소를 가지며

$y=f(x)$의 그래프는 $x=3$에서 x축과 접한다.

따라서 양의 실근 2개, 음의 실근 1개가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<3$이다.

Ⅱ-2. 도함수의 활용

06 속도와 가속도

기본

01 답 (1) 속도 -9, 가속도 -6 (2) 4

02 답 $t=4$, $x=48$

03 답 12

04 답 3

표준

01 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도는

$P'(t)=3t^2-18t+34$이므로 속도가 10이 되는

순간은 $3t^2-18t+34=10$

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore$ $t=2$ 또는 $t=4$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 속도가 처음으로 10이 되므로 점 P의 위치는

$P(2)=2^3-9\times2^2+34\times2=40$

02 답 (1) 2초, 45m (2) 초속 -30(m/s)

(1) t초 후의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t+20$

최고 높이에 도달하면 $v=0$이므로 도달하는 데 걸리는 시간은 $v=-10t+20=0$, 즉 $t=2$(초)

그때의 높이는

$x=-5\cdot2^2+20\cdot2+25=45$(m)

(2) $t>0$이고, 물체가 지면에 떨어지면 $x=0$이므로 떨어지는 데 걸리는 시간은

$x=-5t^2+20t+25=-5(t+1)(t-5)=0$

즉, $t=5$(초)

그때의 속도는 $v=-10\cdot5+20=-30$(m/s)

03 답 10

04 답 (1) $8\pi t+16\pi$ (2) $4\pi t^2+16\pi t+16\pi$

(1) t초 후의 비눗방울의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi(2+t)^2=4\pi t^2+16\pi t+16\pi$

이므로 비눗방울의 겉넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=8\pi t+16\pi$

(2) t초 후의 비눗방울의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi(2+t)^3$$
$$=\frac{4}{3}\pi t^3+8\pi t^2+16\pi t+\frac{32}{3}\pi$$

이므로 비눗방울의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=4\pi t^2+16\pi t+16\pi$

발전

01 답 (1) $r(t)=5-\dfrac{1}{2}t$

(2) $V(t)=\left(-\dfrac{1}{12}t^3+\dfrac{5}{2}t^2-25t+\dfrac{250}{3}\right)\pi$

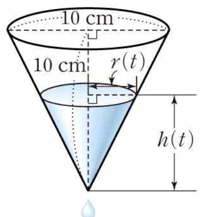
(3) $V'(t)=\left(-\dfrac{1}{4}t^2+5t-25\right)\pi$

(1) t초 후의 물의 높이를 $h(t)$라 하면

$h(t)=10-t$

t초 후의 물의 표면의 반지름의 길이를 $r(t)$라고 하면 $h(t):r(t)=10:5$에서

$r(t)=\dfrac{1}{2}h(t)$이므로 $r(t)=\dfrac{1}{2}h(t)=5-\dfrac{1}{2}t$



(2) t초 후의 물의 부피를 $V(t)$라고 하면

$$V(t)=\frac{1}{3}\pi\{r(t)\}^2h(t)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5-1}{2}t\right)^2(10-t)$$
$$=\left(-\frac{1}{12}t^3+\frac{5}{2}t^2-25t+\frac{250}{3}\right)\pi$$

(3) t초 후의 물의 부피의 순간변화율은 $V'(t)$이므로

$$V'(t)=\left(-\frac{1}{4}t^2+5t-25\right)\pi$$

02 답 ①

두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치가 각각
$f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$ 이므로
시각 t 일 때 두 점 P, Q의 움직이는 속도는
각각 $f'(t)=4t-2$, $g'(t)=2t-8$
이때, 두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직이면
$f'(t)$와 $g'(t)$의 부호가 반대가 되므로
$f'(t)g'(t)=(4t-2)(2t-8)<0$
$4(2t-1)(t-4)<0$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}<t<4$

Ⅱ-2. 도함수의 활용

01 ⑤	**02** ①	**03** 42	**04** ⑤	**05** ①
06 ②	**07** ②	**08** ④	**09** ③	**10** ①
11 ⑤	**12** ②	**13** ③	**14** ④	**15** ④
16 2	**17** 8	**18** 8	**19** $\frac{\pi}{2}$	

20 해설 참조　**21** 8

22 (1) $V=x(x-5)^2$　(2) 500

23 64　**24** $a<-1$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

01 곡선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$1-a+b=2$에서　$a-b=-1$　$\cdots\cdots$ ㉠

$y'=2x+a$이므로 $-2+a=2$에서　$a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면　$b=5$

따라서　$a+b=9$

02 접선의 기울기는 1이고, $y'=2x+3$이므로

$2x+3=1$에서　$x=-1$

따라서 구하는 접선은 점 $(-1,\ -4)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y+4=x+1,\ y=x-3$

03 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

$=6(x-1)(x-2)$

이때 $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값 M과 극솟값 m의 곱은 $Mm=f(1)\times f(2)$이다. 따라서

$f(1)=2-9+12+2=7$

$f(2)=16-36+24+2=6$이므로

$Mm=f(1)\times f(2)=7\times 6=42$

04 $y'=3x^2+6x+5$이므로 접점 P의 x좌표를 a라 하면 접선의 방정식은

$y-(a^3+3a^2+5a+5)=(3a^2+6a+5)(x-a)$

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$-(a^3+3a^2+5a+5)=(3a^2+6a+5)(-1-a)$

$2a(a^2+3a+3)=0$,　즉　$a=0$

따라서 $\mathrm{P}(0,\ 5)$이므로　$\overline{\mathrm{OP}}=5$

05 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2kx+3\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $3x^2-2kx+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=k^2-9\leq 0$에서　$-3\leq k\leq 3$

따라서 $a=-3,\ b=3$이므로　$ab=-9$

06 $y=x^3-3ax^2+4a$에서

$y'=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

이므로 $x=0$에서 극대, $x=2a$에서 극소이다.

$x=0$에서 접할 경우

$y=4a=0,\ a=0$이 되어 모순이므로 $x=2a$에서 x축에 접한다.

따라서 주어진 식은 점 $(2a,\ 0)$을 지나므로

$8a^3-12a^3+4a=-4a(a^2-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because\ a>0)$

07 $f'(x)=6x^2+2ax+b$이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(2)=16+4a+2b+16=-4$

$f'(2)=24+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-12$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$

에서　$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-2-3+12+16=23$

08 $f'(x)=9x^2+6kx+(3k+4)$이므로 모든 실수 x에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9k^2-9(3k+4)\leq 0$에서

$k^2-3k-4\leq 0,\ (k+1)(k-4)\leq 0$

따라서 $-1\leq k\leq 4$이므로 구하는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개다.

09 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=-1,\ 2,\ 4$이고, 이때 $f(x)$의 증감표를 만들어 보면 다음과 같다.

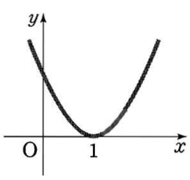
x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

① $f(x)$는 구간 $(-2,\ -1)$에서 감소하고 구간 $(-1,\ 1)$에서 증가한다.
② $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가하고 구간 $(2,\ 3)$에서 감소한다.
③ $f(x)$는 구간 $(4,\ 5)$에서 증가한다.
④ $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.
⑤ $f(x)$는 $x=3$에서 극점을 갖지 않는다.

10 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로
$3(x+3)(x-1)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
이때 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $k+27$을 갖고, $x=1$에서 최솟값 $k-5$를 갖는다.
따라서 $k+27+k-5=12$이므로
$2k=-10,\ k=-5$

11 $\mathrm{A}(a,\ 6a-a^2)$이라 하고 사다리꼴의 넓이 $S(a)$라 하면
$S(a)=\dfrac{1}{2}\times\{(6-2a)+6\}\times(6a-a^2)$
$\quad=a^3-12a^2+36a$
$S'(a)=3a^2-24a+36=3(a-2)(a-6)$이고,
$0<a<6$이므로
$3(a-2)(a-6)=0$에서 $\quad a=2$
$\therefore S(a)$는 $a=2$일 때, 최댓값 32를 갖는다.

12 두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$,
$g(x)=-x^2+2x-a$를 연립하여 정리하면
$x^4+x^2-6x+2a=0$
$h(x)=x^4+x^2-6x+2a$라 하면
$h'(x)=4x^3+2x-6=(x-1)(4x^2+4x+6)$
이므로 $x=1$에서 $h(x)$의 극솟값만 존재한다.
그런데 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점이 한 개이므로 $h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나야 한다.



$\therefore h(1)=0$
$h(1)=1+1-6+2a=0$
$\therefore a=2$

13 $f(x)=x^3-3x$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$3(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 2를 갖고, $x=1$일 때, 극솟값 -2를 가지므로 방정식 $x^3-3x-k=0$, 즉 $x^3-3x=k$의 해의 집합의 원소의 개수가 2가 되도록 하는 k의 값은 -2 또는 2이다.
따라서 구하는 k의 값의 합은 $-2+2=0$

14 $f(x)=2x^3-11x^2-3x+a-(4x^2-27x)$
$\quad=2x^3-15x^2+24x+a$
$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$
$6(x-1)(x-4)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$
즉, 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때, 극소이고 최소이다. 이때 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 하므로 $a-16>0$에서 $\quad a>16$
따라서 정수 a의 최솟값은 17이다.

15 $f(a)=f'(a)=0,\ f(b)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-a)^2$과 $(x-b)$를 인수로 가진다.
$f(x)=k(x-a)^2(x-b)$로 놓으면
$f'(x)=k\{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2\}$
$f'(a)=f'(c)=0$이므로
$f'(c)=k\{2(c-a)(c-b)+(c-a)^2\}=0$
$(c-a)(2c-2b+c-a)=0$
$(c-a)(3c-a-2b)=0,\quad c\neq a$이므로
$3c-a-2b=0 \quad \therefore c=\dfrac{a+2b}{3}$

16 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 $f(x)=0$의 근이므로
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0,\ f(\gamma)=0$
롤의 정리에 의하여 α와 β 사이에 $f'(c_1)=0$을 만족시키는 c_1이 적어도 하나 존재한다. 마찬가지 방법으로 β와 γ 사이에도 $f'(c_2)=0$을 만족시키는 c_2가 적어도 하나 존재한다.
따라서 이차방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

17

(속도)$=v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t+4$이므로

$3t^2-4t+4=8$에서 $(3t+2)(t-2)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=2$

(가속도)$=a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$에 $t=2$를 대입하면

구하는 가속도는 $a=8$

18

해결 과정 조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$x^4-ax^3+bx^2-cx+6$

$=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ $\therefore ax^3+cx=0$

모든 실수 x에 대하여 성립 $a=0,\ c=0$ ▸ 2점

$\therefore f'(x)=x(4x^2+2b)$

$f'(x)=0$에서 $4x^2+2b=0,\ x^2=-\dfrac{b}{2}$

$\therefore x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\ (b<0)$ ▸ 2점

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 가지므로

$f(x)=x^4+bx^2+6$에서

$f\left(\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\right)=\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b^2}{2}+6=-10$

$-\dfrac{b^2}{4}=-16,\ b^2=64$ $\therefore b=-8\ (\because b<0)$

$\therefore f(x)=x^4-8x^2+6$ ▸ 2점

답 구하기 $a-b+c=0-(-8)+0=8$ ▸ 2점

19

t초 후의 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를

$\overline{\mathrm{AP}}=t,\ \overline{\mathrm{BP}}=5-t$라 하면 두 원의 넓이의 합

$S=\pi\left(\dfrac{t}{2}\right)^2+\pi\left(\dfrac{5-t}{2}\right)^2=\pi\left(\dfrac{2t^2-10t+25}{4}\right)$

$\dfrac{dS}{dt}=\pi\left(\dfrac{2t-5}{2}\right)$이므로 $t=3$일 때 넓이의 합 S의 변화율은 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

20

문제 이해 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여 평균값 정리가 성립하므로 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다. ▸ 2점

해결 과정 $f'(c)<0$이고 $x_2-x_1>0$이므로

$f(x_2)-f(x_1)<0$이다. $f(x_1)>f(x_2)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 감소한다. ▸ 2점

21

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$에서 $f(0)=0$

따라서 $f(x)=xg(x)$ (단, $g(x)$는 다항함수)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg(x)}{x}=g(0)=-2$ …… ㉠

또, $x=1$에서 극값 -3을 가지므로

$f'(1)=0,\ f(1)=-3$

한편, $f(x)=xg(x)$에서

$f'(x)=g(x)+xg'(x)$

$\therefore f'(1)=g(1)+g'(1)=0$ …… ㉡

$f(1)=g(1)=-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 가장 차수가 낮은 다항함수 $g(x)$는 이차함수이므로

$g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라고 하면

$g(0)=c=-2$

$g(1)=a+b+c=-3$

$g'(x)=2ax+b$에서

$g'(1)=2a+b=3$ ($\because$ ㉡, ㉢)

이것을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-5,\ c=-2$

$\therefore\ g(x)=4x^2-5x-2$

$\therefore\ f(x)=x(4x^2-5x-2)=4x^3-5x^2-2x$

$\therefore\ f(2)=4\cdot2^3-5\cdot2^2-2\cdot2=8$

22

해결 과정 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10-2x)^2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$=x(x-5)^2$ ▸ 2점

$V'=3x^2-20x+25=(3x-5)(x-5)$

이고, $0<x<5$이므로

$(3x-5)(x-5)=0$에서 $x=\dfrac{5}{3}$ ▸ 2점

답 구하기 $x=\dfrac{5}{3}$일 때, 부피 최댓값 $M=\dfrac{500}{27}$

$\therefore 27M=500$ ▸ 2점

23

문제 이해 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$라 하면

해결 과정 $f(3+x)=f(1-x)$

즉, $f(2+x)=f(2-x)$이므로 $x=2$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극소, $x=3$에서 극소, $x=2$에서 극대이다. ▸ 3점

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bvx+c$

$=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$=4x^3-24x^2+44x-24$

따라서 $a=-8$, $b=22$, $c=-24$이므로

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$ ▸ 3점

답 구하기 $x=2$에서 극대이고 극댓값 a는

$a=f(2)=-8$ $\therefore$ $a^2=64$ ▸ 2점

24 $f(x)=x^3+3ax-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+3a=3(x^2+a)$

곡선 위의 점 $(t, t^3+3at-2)$에서의 접선의 방정식은 $y-(t^3+3at-2)=3(t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=3(t^2+a)x-2t^3-2$

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=6(t^2+a)-2t^3-2$

$t^3-3t^2-3a+1=0$

이때 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=x^3+3ax-2$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으므로 방정식 $t^3-3t^2-3a+1=0$은 하나의 실근과 두 허근을 갖는다.

$g(t)=t^3-3t^2-3a+1$로 놓으면

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$을 풀면 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	$-3a+1$	↘	$-3a-3$	↗

$t=0$에서 극대, $t=2$에서 극소이므로 극댓값은 $g(0)=-3a+1$, 극솟값은 $g(2)=-3a-3$

그런데 삼차방정식 $g(t)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)>0

이므로

$g(0)g(2)=(-3a+1)(-3a-3)>0$

$(a+1)(3a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\dfrac{1}{3}$

Ⅱ 다항함수의 미분법

01 -3	**02** ③	**03** ③	**04** ③	**05** ③
06 ②	**07** ①	**08** $\frac{26}{3}$	**09** ①	**10** 10
11 $-\frac{3}{2}$	**12** ⑤	**13** ⑤	**14** ②	**15** ④
16 ①	**17** ③	**18** ⑤	**19** ②	**20** -1
21 $a<-1$		**22** 28		

23 $k<-2$ 또는 $-\frac{2}{9}<k<0$ 또는 $k>0$

24 -25 **25** 10

09 $2x^3+3x^2+a=0$에서

$f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=-a$라 하자.

삼차방정식 $2x^3+3x^2+a=0$이 $-1<x<1$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면

$-1<x<1$에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점이 존재해야 한다.

$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)=0$ 에서

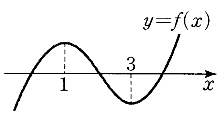
$x=-1$ 또는 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	5

따라서 $f(x)$와 $g(x)=-a$가 교점을 가지려면

$0\le -a\le 5$ $\quad\therefore\ -5<a\le 0$

13 ㄱ. $b<x<c$일 때 $f(x)$는 증가하므로 $f'(x)>0$ (참)



ㄴ. $f'(a)<0$, $f'(e)<0$ 이므로

$f'(a)+f'(e)<0$ (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $d<x<e$ 일 때,

$f(x)>0, f'(x)<0$이므로

$f(x)\cdot f'(x)<0$

(ⅱ) $f<x<g$ 일 때,

$f(x)<0$, $f'(x)>0$

이므로 $f(x)\cdot f'(x)<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d<x<e$ 또는 $f<x<g$일 때 $f(x)\cdot f'(x)<0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 $f(x)=-x^2$으로 놓으면 $f'(x)=-2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x+4$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2)$이라 하면 이점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$f'(t)=-2t=1$ $\quad\therefore\ t=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$이고 점 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$과 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$사이의 거리가 최솟값이므로

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

15 $y=-x^2+4$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 $x=2$, $x=-2$이므로 점 A의 x좌표는 -2, 점 B의 x좌표는 2이다. 점 C의 좌표를 (x, y)라 하면 점 D의 좌표는 $(-x, y)$가 되므로 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot y$$
$$=\frac{1}{2}(4+2x)(4-x^2)$$
$$=-x^3-2x^2+4x+8$$

이때

$$S'(x)=-3x^2-4x+4$$
$$=-(3x-2)(x+2)=0$$

이므로 $x=-2$, $x=\frac{2}{3}$

따라서 $0<x<2$ 이므로 $S(x)$의 증감표는 다음과 같다.

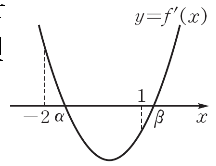
x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$S'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(x)$		↗		↘	

따라서 $x=\frac{2}{3}$일 때, 사다리꼴 ABCD의 넓이가 최대이므로 그때의 높이는

$$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^2+4=4-\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$$

20 문제 이해 $f(-1)=f(1)=f(2)=k$로 놓고,
$g(x)=f(x)-k$라 하자. ▸ 2점
해결 과정 이때 $g(-1)=g(1)=g(2)=0$이므로
$g(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+k$ ▸ 2점
$f'(x)=(x-1)(x-2)+(x+1)(x-2)$
$+(x+1)(x-1)$
이므로 $f'(0)=-1$ ▸ 2점

21 문제 이해 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+3ax-9$에서
$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+3a$
방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면



해결 과정 $-2<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.
(ⅰ) $f'(2)=8-a>0$
$\therefore a<8$ ▸ 2점
(ⅱ) $f'(1)=5+5a<0$ $\therefore a<-1$ ▸ 2점
답 구하기 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a<-1$ ▸ 2점

22 문제 이해 방정식 $f(x)-k=0$의 세 실근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면
해결 과정 $f(x)-k=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나타낼 수 있다.
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+k$ ▸ 2점
$f'(x)=2(x-\beta)(x-\gamma)+2(x-\alpha)(x-\gamma)$
$+2(x-\beta)(x-\alpha)$
점 C에서의 접선의 기울기는 $x=\gamma$에서의 미분계수이므로 $f'(\gamma)=2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ ▸ 2점
한편, $\gamma-\alpha=\overline{AC}=5+2=7$,
$\overline{BC}=\gamma-\beta=2$이므로
답 구하기 $f'(\gamma)=2\cdot7\cdot2=28$ ▸ 2점

23 문제 이해 $f(x)=x^3+2x^2$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2+4x$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3+2a^2)$이라 하면
해결 과정 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(a)=3a^2+4a$이므로 접선의 방정식은
$y-a^3-2a^2=(3a^2+4a)(x-a)$ ▸ 2점
이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로
$0-a^3-2a^2=(3a^2+4a)(k-a)$
$\therefore a\{2a^2+(2-3k)a-4k\}=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
점 $(k,\ 0)$에서 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
즉 방정식 $2a^2+(2-3k)a-4k=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2-3k)^2-4\cdot2\cdot(-4k)>0$
$9k^2+20k+4>0$, $(k+2)(9k+2)>0$
$\therefore$ $k<-2$ 또는 $k>-\dfrac{2}{9}$ $\cdots\cdots$ ㉡ ▸ 2점
이때 방정식 $2a^2+(2-3k)a-4k=0$은 $a=0$을 근으로 갖지 않아야 하므로
$-4k\neq0$ $\therefore$ $k\neq0$ $\cdots\cdots$ ㉢ ▸ 2점
답 구하기 ㉡, ㉢에서 구하는 실수 k값의 범위는
$k<-2$ 또는 $-\dfrac{2}{9}<k<0$ 또는 $k>0$ ▸ 2점

24 해결 과정 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+2}=\frac{5}{2}$에서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{5}{2}$이므로
$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2+ax+b$ 라 할 수 있다. ▸ 2점
$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2+ax+b$ 를 ㈏에 대입하면
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{2}x^2+ax+b}{x}=-5$ 이므로 $b=0$ 이다.
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{5}{2}x+a\right)}{x}=a=-5$ 이므로 ▸ 2점
$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-5x$, $f'(x)=5x-5$
따라서 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$ 에서
답 구하기 $g'(-1)=-2f(-1)+f'(-1)$
$=-25$ ▸ 2점

25 해결 과정 조건 ㈎에서 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 $a=c=0$ 이다. ▸ 2점
따라서 $f(x)=x^3+bx$
$f'(x)=3x^2+b$ 이고 조건 ㈏에 의하여 α, β는 $3x^2+b=0$ 의 두 실근이다. 이차방정식의 근

과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

조건 (다)에서 $f(\alpha)-f(\beta)+\alpha-\beta=0$

$\therefore\ \alpha^3-\beta^3+b(\alpha-\beta)+\alpha-\beta=0$ …… ㉠

$\alpha-\beta\neq0$ 이므로 ㉠의 양변을 $\alpha-\beta$ 로 나누면

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+b+1=0$

$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+b+1=0$

즉, $-\dfrac{b}{3}+b+1=0$ 이므로 $b=-\dfrac{3}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x$,

$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{2}$이므로

$f(1)+f'(2)=-\dfrac{1}{2}+12-\dfrac{3}{2}=10$ ▸ 2점

Ⅲ-1. 부정적분과 정적분

01 부정적분

기본

01 답 (1) $f(x)=1$ (2) $f(x)=6x^2-3$

02 답 해설 참조

(1) $x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$

(2) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

(3) $\frac{4}{3}y^3+2y^2+y+C$

(4) $\frac{1}{4}t^4-t+C$

03 답 $\int 8x\,dx=4x^2+C$

04 답 0

표준

01 답 $f(x)=x^3+1$

02 답 4

03 답 12

04 답 ④

주어진 그래프에서 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $f'(-1)=f'(1)=0$이고 아래로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)(a>0)$으로 놓으면 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx$

$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C$

(단, C는 적분상수)

$f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=4$ …… ㉠

$f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로 $f(3)=20$

발전

01 답 ②

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$라 하면

$g(x)=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx$

$=\frac{1+a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $f(x)$는 이차함수이고

$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$, 즉 $f(x)g(x)$는 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다. $\therefore a=-1$

$f(x)=-x^2+bx+c$, $g(x)=\frac{b}{2}x^2+cx+C$

$f(x)g(x)$

$=(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)$

$=-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(\frac{3}{2}bc-C\right)x^2$

$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3$

에서 $b=4$, $c=0$, $C=0$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $g(1)=2$

02 답 ⑤

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x-\alpha)^2$으로 놓으면

조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=(xf(x))'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$g(x)=xf(x)+C$

$=x^2(x-\alpha)^2+C$ (단, C는 부정적분)

$\therefore\ g'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$

$=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	극소	↗	극대	↘	극소	↗

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

즉, 조건 (다)에서 $g(0)=g(\alpha)=0$이므로 $C=0$

또한 $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81$이므로 $\alpha=6$

따라서 $g(x)=x^2(x-6)^2$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=2^2\times(-4)^2=64$

Ⅲ-1. 부정적분과 정적분

02 정적분

기본

01 답 (1) 52 (2) $\frac{40}{3}$ (3) 20 (4) 24

02 답 ③

03 답 (1) 4 (2) 2

04 답 4

표준

01 답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 4

02 답 해설 참조

$f'(x)=(x-1)(x-3)$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하면 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	(극대)	↘	(극소)	↗

$$f(x)=\int_0^x (t^2-4t+3)dt=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$$

이므로 $f(1)=\frac{4}{3}$, $f(3)=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때

극댓값 $\frac{4}{3}$, $x=3$일 때 극솟값 0을 갖는다.

03 답 40

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$에서

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2xk$$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$$k=\int_0^1 f(t)dt=1-2-2k=-1-2k$$

$$\therefore\ k=-\frac{1}{3}$$

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$의 양변을

x에 대하여 미분하면 $f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$이므로

$f(0)=\frac{2}{3}=a$ $\qquad\therefore\ 60a=60\times\frac{2}{3}=40$

04 답 ④

$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2$에서

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^1 (x+1)^2dx$$

$$=\int_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{3}+1+1-(-\frac{1}{3}+1-1)=\frac{8}{3}$$

$$k\left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2=k\left(\int_{-1}^1 (x+1)dx\right)^2$$

$$=k\left(\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1\right)^2=k\left\{\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}^2=4k$$

이므로 $\frac{8}{3}=4k$ $\qquad\therefore\ k=\frac{2}{3}$

발전

01 답 ②

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$이다.

즉, $2=16-8+a$이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-4x+2 & (0\le x<2)\\ x^2-2x-6 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$$\int_9^{11} f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2(-4x+2)dx+\int_2^3(x^2-2x-6)dx$$

$$=-\frac{26}{3}$$

02 답 $f(x) = 2x - 3$, $a = 1$ 또는 $a = 2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)$$

따라서 $f(x) = 2x - 3$

주어진 식은 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로 양변에 $x = a$를 대입하면

$$\int_a^a f(t)dt = a^2 - 3a + 2,\ 0 = (a-1)(a-2)$$

따라서 $a = 1$ 또는 $a = 2$

Ⅲ-1. 부정적분과 정적분

01 ⑤ **02** ⑤ **03** ② **04** ⑤ **05** ④
06 ⑤ **07** $f'(x)=101x^{99}-\frac{9}{5}x^7$ **08** 6
09 5 **10** $-\frac{4}{5}$ **11** $f(x)=\frac{20}{3}x^3+4x^2+2$
12 ② **13** ④ **14** ④ **15** ⑤ **16** ①
17 ④ **18** ① **19** ③ **20** ⑤ **21** ⑤
22 1 **23** -6 **24** 2

01 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ (C는 적분상수)라 하면

$F(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3+C=\frac{8}{3}+C=3$에서 $C=\frac{1}{3}$

$\therefore\ F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$

02 $\int f(x)dx=x^2+C$에서

$f(x)=(x^2+C)'=2x$

ㄱ. $f(x)=2x$이므로 $f'(x)=2$ (거짓)

ㄴ. $f'(x)=2$ (참)

ㄷ. $f(x)=2x$이고 $(x^2+1)'=2x$이므로

$f(x)=(x^2+1)'$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 $\int x^{19}dx=\frac{1}{20}x^{20}+C=Ax^n+C$

즉, $A=\frac{1}{20}$, $n=20$이므로

$A\cdot n=\frac{1}{20}\cdot 20=1$

04 $\int(x^2-2x+5)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+C_1$

(단, C_1은 적분상수)

이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+C_2$ (단, C_2는 상수)

이때 $f(0)=5$이므로 $C_2=5$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+5$

05 $\int(3x+2)^2dx-\int(3x-2)^2dx$

$=\int\{(3x+2)^2-(3x-2)^2\}dx$

$=\int 24x dx$

$=12x^2+C$

06 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=2f'(1)$

$f'(x)=(x+3)(x^2-3x+9)$이므로

$f'(1)=28$

$\therefore\ 2f'(1)=2\cdot 28=56$

07 $f(x)=\left(\frac{1}{100}x^{101}-\frac{1}{40}x^9+C\right)'$

$=\frac{101}{100}x^{100}-\frac{9}{40}x^8$

$\therefore f'(x)=101x^{99}-\frac{9}{5}x^7$

08 해결 과정 $f'(x)=ax+b$라 하면

$f'(0)=b=-2$, $f'(1)=a+b=0$이므로

$a=2$, $b=-2$, 즉 $f'(x)=2x-2$ ▸ 3점

$\therefore\ f(x)=x^2-2x+C=(x-1)^2+C-1$

(단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$C-1=2$, 즉 $C=3$ ▸ 3점

답 구하기 $f(x)=x^2-2x+3$

$\therefore f(3)=6$ ▸ 2점

09 $f'(x)=4x^3-8x=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$f(x)=x^4-4x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=-3+C=2$이므로 $C=5$

$\therefore\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

$f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 극댓값은
$f(0)=5$

10 $\int(x^4-4x^3-2x+1)dx$
$=\frac{1}{5}x^5-x^4-x^2+x+C_1=f(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4-x^2+x+C_2$
(단, C_1, C_2는 상수)
$f(1)-f(0)=\left(-\frac{4}{5}+C_2\right)-C_2=-\frac{4}{5}$

11 해결 과정 양변을 미분하면
$f(x)+f'(x)$
$=\{xf(x)-5x^4+4x^3+4x^2+C\}'$
$=f(x)+xf'(x)-20x^3+12x^2+8x$ ▸ 2점
즉,
$(x-1)f'(x)=20x^3-12x^2-8x$
$=4x(5x+2)(x-1)$
$\therefore\ f'(x)=4x(5x+2)=20x^2+8x$ ▸ 2점
즉, $f(x)=\frac{20}{3}x^3+4x^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)
이고 $f(0)=2$이므로 $C_1=2$ ▸ 2점
답 구하기 $f(x)=\frac{20}{3}x^3+4x^2+2$ ▸ 2점

12 $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}\frac{1}{10}t^{10}dt=\frac{1}{10}x^{10}$

13 $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(t^3-1)^2dt=(x^3-1)^2$
따라서 $f'(-1)=(-2)^2=4$

14 ① $\int_0^{\frac{1}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$
② $-\int_1^0 ydy=-\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^0=\frac{1}{2}$
③ $\int_0^1 2x^3dx=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$
④ $\int_{-1}^0 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=-\frac{1}{2}$
⑤ $\int_0^1 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

15 ㄱ. $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=0$
즉, $\int_0^1 f(x)dx-\int_2^1 f(x)dx=0$이므로
$\int_0^1 f(x)dx=\int_2^1 f(x)dx$ (참)
ㄴ. $\int_2^2 f(x)dx=0$ (참)
ㄷ. $\int_2^0 f(x)dx=-\int_0^2 f(x)dx=0$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 $\int_{-2}^1(3x^3+x^2)dx+\int_{-2}^1(x^3-x^2)dx$
$=\int_{-2}^1(3x^3+x^2+x^3-x^2)dx$
$=\int_{-2}^1 4x^3dx=\Big[x^4\Big]_{-2}^1$
$=-15$

17 $\int_1^2(3x^5+4x^4)dx+\int_1^2(3x^5-4x^4+1)dx$
$=\int_1^2(6x^5+1)dx$
$=\Big[x^6+x\Big]_1^2$
$=64$

18 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(9x^2+2ax)dx$
$=\Big[3x^3+ax^2\Big]_0^1=3+a$
$f(1)=9+2a$, $3+a=9+2a$
$\therefore a=-6$

19 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{-2}^{6}$$
$$=F(6)-F(-2)=15$$
$$\therefore \int_{-7}^{1} f(x+5)dx=\Big[F(x+5)\Big]_{-7}^{1}$$
$$=F(6)-F(-2)=15$$

20 $$\int_{-2}^{2}(a-|x|)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(a+x)dx+\int_{0}^{2}(a-x)dx$$
$$=\left[ax+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[ax-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4a-4=16$$
따라서 $a=5$

21 $$\int_{0}^{5}(|x-1|-|x-2|)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\{-(x-1)+(x-2)\}dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{(x-1)+(x-2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{5}\{(x-1)-(x-2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-1)dx+\int_{1}^{2}(2x-3)dx+\int_{2}^{5}1dx$$
$$=\Big[-x\Big]_{0}^{1}+\Big[x^2-3x\Big]_{1}^{2}+\Big[x\Big]_{2}^{5}$$
$$=2$$

22 $$g(x)=\lim_{t\to x}\frac{1}{x-t}\int_{t}^{x} f'(u)du$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{1}{t-x}\{f(t)-f(x)\}$$
$$=f'(x)$$
$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx=\int_{0}^{1} f'(x)dx$$
$$=f(1)-f(0)$$
$$=3-2=1$$

23 해결 과정 $f(x)$

$$=f(x)+(x-1)f'(x)+3x^2+6x-9$$

$\therefore$ $(x-1)f'(x)=-3(x-1)(x+3)$ ▸ 2점

$f'(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$f'(x)=-3x-9$ ▸ 2점

$\therefore$ $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2-9x+C$

그런데 $f(-3)=0$이므로 $C=-\dfrac{27}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore$ $f(-1)=-6$ ▸ 2점

24 문제 이해

$f(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로 $0\le x\le 1$이면 $f(x)\le 0$이고, $x\ge 1$이면 $f(x)\ge 0$이다. ▸ 2점

해결 과정 $\displaystyle\int_{0}^{a}|f(x)|dx$

$$=\int_{0}^{1}(-3x^2+2x+1)dx$$
$$+\int_{1}^{a}(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_{0}^{1}+\Big[x^3-x^2-x\Big]_{1}^{a}$$

$=a^3-a^2-a+2=4$ ▸ 2점

답 구하기 $(a-2)(a^2+a+1)=0$에서

$a=2$ ▸ 2점

Ⅲ-2. 정적분의 활용

01 넓이

기본

01 답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

02 답 (1) $\frac{27}{4}$ (2) $\frac{37}{12}$

03 답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{22}{15}$

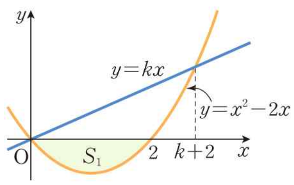
04 답 2

표준

01 답 $2^{\frac{4}{3}}-2$

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라고 할 때, $S=2S_1$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하면 된다. 곡선 $y=x^2-2x$의 x절편은 0, 2이고, 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=kx$, $x\{x-(k+2)\}=0$

즉, $x=0$ 또는 $x=k+2$, 이때 S가 x축에 의하여 이등분되도록 하려면 $k+2\geq 0$이어야 한다.



$$S=\int_0^{k+2}\{kx-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{x}x^2\right]_0^{k+2}=\frac{(k+2)^3}{6}$$
$$S_1=\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

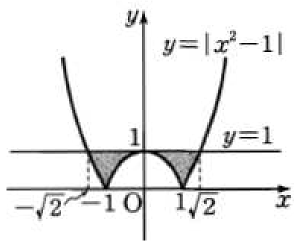
따라서 $\frac{(k+2)^3}{6}=2\cdot\frac{4}{3}$에서

따라서 $\frac{(k+2)^3}{6}=2\cdot\frac{4}{3}$에서

$(k+2)^3=16$, $k+2=2^{\frac{4}{3}}$, 즉 $k=2^{\frac{4}{3}}-2$

02 답 ③

$y\begin{cases}x^2-1 & (|x|\geq 1)\\ -x^2-1 & (|x|\leq 1)\end{cases}$



곡선 $y=|x^2-1|$과

직선 $y=1$

교점의 x좌표는

$x^2-1=1$에서 $x^2=2$

$x^2-1=-1$에서 $x^2=0$

$\therefore$ $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

곡선 $y=|x^2-1|$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-1=0$에서 $x=\pm1$

그런데 $y=|x^2-1|$과 $y=1$의 그래프는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이 S는

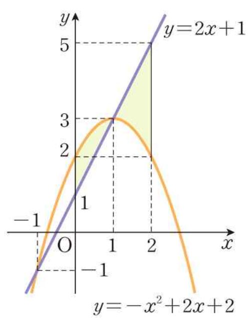
$$S=2\left[\int_0^1\{1-(-x^2+1)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\{1-(x^2-1)\}dx\right]$$
$$=2\left[\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\sqrt{2}}(-x^2+2)dx\right]$$
$$=2\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^{\sqrt{2}}\right\}$$
$$=2\left\{\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}\right)\right\}=\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$$

03 답 2

주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+2=2x+1$, $(x+1)(x-1)=0$

즉, $x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x+2)-(2x+1)\}dx$$
$$+\int_1^2\{(2x+1)-(-x^2+2x+2)\}dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2=2$$

04 답 $\frac{1}{3}$

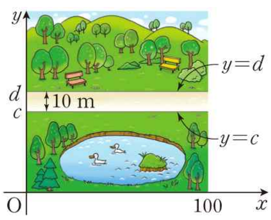
$y'=2x$이므로 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는 2이다.
이때 접선의 방정식은 $y-3=2(x-1)$, 즉
$y=2x+1$
따라서 구하는 넓이 S는

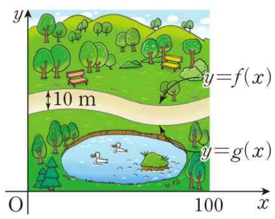
$$S=\int_0^1(x^2+2)-(2x+1)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

발전

01 답 같다.

[그림 1]에서 산책로의 위쪽 경계와 아래쪽 경계를 나타내는 직선의 식을 각각 $y=d$, $y=c$라 하고, [그림 2]에서 산책로의 위쪽 경계와 아래쪽 경계를 나타내는 곡선의 식을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라고 하자.





이때 닫힌구간 [0, 100]에서 다음이 성립한다.
$d-c=10$, $f(x)-g(x)=10$
산책로의 넓이는 두 곡선 사이의 넓이이므로 정적분을 이용하여 두 산책로의 넓이를 구하면
[그림 1]의 산책로의 넓이는

$$\int_0^{100}(d-c)dx=\int_0^{100}10dx=1000(\mathrm{m}^2)$$

[그림 2]의 산책로의 넓이는

$$\int_0^{100}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^{100}10dx=1000(\mathrm{m}^2)$$

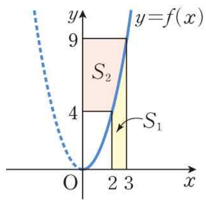
따라서 두 산책로의 넓이는 같다.

02 답 19

$f(x)=x^2(x\ge 0)$에서 $f(2)=4$, $f(3)=9$

이때 $\int_2^3 f(x)dx=S_1$,

$\int_4^9 g(x)dx=S_2$라 하면 그 값은 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



따라서 구하는 값은

$$\int_2^3 f(x)dx+\int_4^9 g(x)dx$$
$$=S_1+S_2=3\times9-2\times4=19$$

Ⅲ-2. 정적분의 활용

02 속도와 거리

기본

01 답 (1) $\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+3$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1

02 답 (1) -19 (2) 27 (3) -14

03 답 100 m

04 답 ⑤

표준

01 답 $10\sqrt{5}$

02 답 해설 참조

(1) $S_1-S_2=\int_0^b v(t)dt$이므로 시각 $t=0$에서 시각 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량을 의미한다.

(2) $S_1+S_2+S_3=\int_0^c |v(t)|dt$이므로 시각 $t=0$에서 시각 $t=c$까지 점 P가 움직인 거리를 의미한다.

03 답 (1) $t=\frac{1}{4}$, 점 P의 위치 $\frac{49}{4}$

(2) $t=2$, 점 P가 움직인 거리 $\frac{25}{2}$

04 답 6

$v(t)=t-2$이므로 시각 t일 때의 점 P의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=8+\int_0^t (t-2)dt=8+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}(t-2)^2+6$$

점 P가 원점과 가장 가까이 있을 때의 시각은 $t=2$

이때 점 P의 좌표는 $x(2)=6$

발전

01 답 (1) $f(t)=\frac{1}{2}t^2+2t$ (2) $3t-\frac{1}{2}$

(3) $(0,\ 5)$ (4) A : 12, B : 12

(1) $0\le t\le 1$일 때, $v(t)=t+2$이므로 자동차 A의 위치 $f(t)$는

$$f(t)=\int_0^t v(t)dt=\int_0^t (t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2+2t$$

(2) (1)에서 $f(1)=\frac{5}{2}$이고, $1\le t\le 2$일 때, $v(t)=3$이므로 자동차 A의 위치 $f(t)$는

$$f(t)=f(1)+\int_1^t v(t)dt=\frac{5}{2}+\int_1^t 3dt$$
$$=\frac{5}{2}+\left[3t\right]_1^t=3t-\frac{1}{2}$$

(3) [그림 2]에서 $f(t)>g(t)$인 시각 t의 구간은 $(0,\ 5)$이다.

(4) $v(t)\ge 0$, $u(t)\ge 0$이므로 $t=0$에서 $t=6$까지 두 자동차 A, B가 이동한 거리는 각각 $f(6)=12$, $g(6)=12$

02 답 40초

P 지점을 원점으로 생각할 때,

P 지점을 지나고 t초 후의 자동차 B의 위치는

$$\int_0^t \left(\frac{1}{2}t+20\right)dt=\frac{1}{4}t^2+20t$$

A의 위치는

$20\cdot 20+20t=400+20t$

이때 두 자동차가 만나는 시각은

$$\frac{1}{4}t^2+20t=400+20t$$

즉, $t=40$

따라서 40초 후에 두 자동차가 만나게 된다.

Ⅲ-2. 정적분의 활용

01 ② 02 ④ 03 ③ 04 ⑤ 05 ②
06 ⑤ 07 ④ 08 ③ 09 ② 10 ③
11 ④ 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ② 15 7
16 $-\frac{1}{2}$ 17 8 18 $\frac{8}{3}$ 19 20
20 $\frac{16}{3}$ 21 $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$
22 $\frac{5+\sqrt{46}}{7}$초, 7.1 m 23 12 24 8

01 $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=4$
닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $x^2-3x-4\le 0$이므로
$$S=\int_0^3(-x^2+3x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_0^3=\frac{33}{2}$$

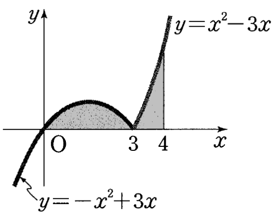
02 $$S=\int_0^1(-x+3)dx+\int_1^2(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{13}{6}=\frac{14}{3}$$

03 A_2는 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로
$$A_2=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$
A_1은 넓이가 1인 정사각형에서 A_2를 뺀 것이므로
$$A_1=1-A_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

04 $$S=\int_0^a(ax-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{6}=\frac{7}{6}$$
이므로 $a=\sqrt[3]{7}$

05 $2x^2-x+1=x^2+x+4$에서
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
$$\therefore\ S=\int_{-1}^3\{(x^2+x+4)-(2x^2-x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$$
$$=\frac{32}{3}$$

06 $y=x|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 값 $x=3$을 기준으로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤다.
(ⅰ) $x<3$일 때
$$x|x-3|=-x(x-3)$$
$$=-x^2+3x$$
(ⅱ) $x\ge 3$일 때
$$x|x-3|=x(x-3)$$
$$=x^2-3x$$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$$y=\begin{cases}-x^2+3x & (x<3)\\ x^2-3x & (x\ge 3)\end{cases}$$
따라서 주어진 곡선과 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx+\int_3^4(x^2-3x)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$
$$=\left(-9+\frac{27}{2}\right)+\left(\frac{64}{3}-24\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)$$
$$=\frac{19}{3}$$

07 $x^2-x=ax$에서

$x(x-a-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a+1$

곡선 $y=x^2-x$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이가 36이므로

$$\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{6}=36$$

$\therefore\ a=5$

08 $g(x)=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$이고

$x^2=-x^2-2x+4$에서

$2x^2+2x-4=0,\ 2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}(-x^2-2x+4-x^2)dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$=9$

09 A의 넓이를 S_1, B의 넓이를 S_2라 하면

$S_1=2S_2$

즉, $\frac{1}{2}S_1=S_2$

또, 이차함수

$y=-x^2+2x=-x(x-2)=-(x-1)^2+1$

의 x축과의 교점의 x좌표가 0, 2이고 축의 방정식이 $x=1$이므로

$$\int_1^2(-x^2+2x)dx=-\int_2^k(-x^2+2x)dx$$

따라서

$$\int_1^2(-x^2+2x)dx+\int_2^k(-x^2+2x)dx=0$$

이므로

$$\int_1^k(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^k$$

$$=-\frac{1}{3}k^3+k^2-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{2}{3}=0$$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{2}{3}=0$에서

$k^3-3^2+2=0$

$(k-1)(k^2-2k-2)=0$

$\therefore\ k=1$또는 $k=1-\sqrt{3}$ 또는 $k=1+\sqrt{3}$

그런데 $k>2$이므로

$k=1+\sqrt{3}$

10 시각 t일 때의 점 P의 위치는

$$2+\int_0^t(4t-3)dt$$

$$=2+\left[2t^2-3t\right]_0^t$$

$=2t^2-3t+2$

이므로 $t=5$일 때의 점 P의 위치는

37

11 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는 $t=0$에서 $t=6$까지 주어진 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$\frac{1}{2}\times5\times3+\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{17}{2}$$

12 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 세 근은

0, 3, 4

이므로

$f(x)-g(x)=ax(x-3)(x-4)$

$\qquad=a(x^3-7x^2+12x)\ (a>0)$

로 놓을 수 있다.

색칠한 도형의 넓이가 90이므로

$$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=90$$

$\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}dx$

$= \int_0^3 a(x^3-7x^2+12x)dx$

$= a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$

$= a\left(\frac{81}{4}-63+54\right)=\frac{45}{4}a=90$

$\therefore\ a=8$

따라서 $f(x)-g(x)=8x(x-3)(x-4)$이므로

$f(2)-g(2)=8\cdot 2(-1)\cdot(-2)=32$

13 $\int_0^4 |5t^2(3-t)|dt$

$= \int_0^3 (15t^2-5t^3)dt+\int_3^4 (-15t^2+5t^3)dt$

$= \left[5t^3-\frac{5}{4}t^4\right]_0^3+\left[-5t^3+\frac{5}{4}t^4\right]_3^4$

$= \frac{135}{4}-\left(-\frac{135}{4}\right)=67.5\ (\mathrm{m})$

14 시각 t일 때의 두 물체 P와 Q의 위치 x_{P}, x_{Q}는

$x_{\mathrm{P}}=4+\int_0^t (-2t+2)dt=-t^2+2t+4$,

$x_{\mathrm{Q}}=10+\int_0^t (4t-6)dt=2t^2-6t+10$

이고, 모든 $t>0$에 대하여

$(2t^2-6t+10)-(-t^2+2t+4)$

$=3t^2-8t+6>0$

$3t^2-8t+6=3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

이므로 두 물체 사이의 거리, 즉 $3t^2-8t+6$이 최소일 때는 $t=\frac{4}{3}$일 때이다.

15 해결 과정 두 점 P, Q의 t초 후의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(t)=\int_0^t (6t^2-2t+6)dt=2t^3-t^2+6t$

$x_Q(t)=\int_0^t (3t^2+10t+1)dt=t^3+5t^2+t$

▸ 2점

$f(t)=x_P(t)-x_Q(t)$라 하면

$f(t)=t^3-6t^2+5t$이고 두 점 P, Q가 만나려면

$f(t)=0$에서 $t(t-1)(t-5)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=5$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 만나는 것 $t=1$일 때이므로 그때의 위치는

$x_P(1)=2-1+6=7$ ▸ 2점

16 주어진 두 곡선 $y=2x^2+2x+3$, $y=-x^2+2x+1$과 두 직선 $x=m$, $x=m+1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_m^{m+1} \{(2x^2+2x+3)-(-x^2+2x+1)\}dx$

$= \int_m^{m+1} (3x^2+2)dx=3m^2+3m+3$

이므로 넓이가 최소일 때는 $m=-\frac{1}{2}$일 때이다.

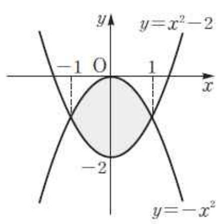
17 $S=\int_0^4 |x|dy$

$= \int_0^2 (-y^2+2y)dy+\int_2^4 (y^2-2y)dy$

$= \left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_2^4$

$=8$

18 문제 이해 $n\to\infty$이면 $\frac{5}{n^2}\to 0$이므로 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면 된다. ▸ 2점



해결 과정 두 곡선의 교점의 x좌표는

$-x^2=x^2-2$에서 $x^2=1$

$\therefore x=\pm 1$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\int_{-1}^1 \{-x^2-(x^2-2)\}dx$

$= \int_{-1}^1 (2-2x^2)dx=2\int_0^1 (2-2x^2)dx$

$=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{3}$ ▸ 2점

19 시각 t일 때의 점 P의 위치 x는

$$x=-12+\int_0^t(2t-4)dt=t^2-4t-12$$

점 P가 출발한 후, 원점에 올 때의 시각은

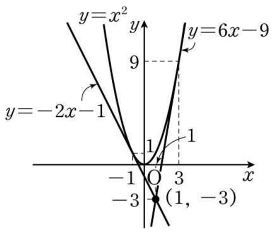
$t^2-4t-12=(t+2)(t-6)=0$에서 $t=6$

따라서 점 P가 출발한 후, 원점에 올 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^6(2t-4)dt$$

$$=\Big[-t^2+4t\Big]_0^2+\Big[t^2-4t\Big]_2^6=20$$

20 접점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 하면 접점에서의 구하는 접선의 방정식은



$y=2ax-2a-3$

이므로

$a^2=2a^2-2a-3$에서 $a=3$ 또는 $a=-1$

즉, 접선의 방정식은

$y=6x-9,\ y=-2x-1$

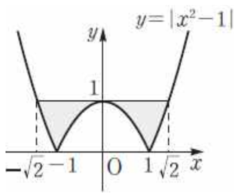
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$=\frac{16}{3}$$

21 $y=x^2-1$과 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-1=0$에서 $x=\pm1$

곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=1$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는

$$2\left\{\sqrt{2}\times1-\int_0^1(-x^2+1)dx-\int_1^{\sqrt{2}}(x^2-1)dx\right\}$$

$$=2\sqrt{2}-2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1-2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$$

22 시각 t초일 때 공의 지면으로부터의 높이 x m는

$$x=2.1+\int_0^t(-9.8t+7)dt$$

$$=-4.9t^2+7t+2.1$$

공이 지면에 닿을 때까지 걸리는 시간은

$-4.9t^2+7t+2.1=0$에서 $7t^2-10t-3=0$

그런데 $t>0$이므로 $t=\dfrac{5+\sqrt{46}}{7}$

이때 공이 최고점에 도달하는 순간은

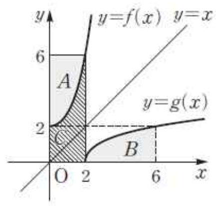
$v(t)=-9.8t+7=0$, 즉 $t=\dfrac{5}{7}$일 때이고,

$t=\dfrac{5}{7}$일 때의 공의 지면으로부터의 높이는 4.6 m이므로 공이 지면에 닿을 때까지 움직인 거리는

$(4.6-2.1)+4.6=7.1$ (m)

23 해결 과정 함수 $f(x)=x^2+2\ (x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ▸ 2점

답 구하기 오른쪽 그림에서



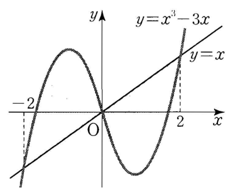
$A=B$이므로 ▸ 2점

$$\int_0^2f(x)dx+\int_2^6g(x)dx$$

$=C+B=C+A$

$=2\cdot6=12$ ▸ 2점

24 해결 과정 $x^3-3x=x$



에서 $x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

이므로 곡선 $y=x^3-3x$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-2,\ 0,\ 2$이다. ▸ 2점

또, 곡선 $y=x^3-3x$과 직선 $y=x$는 원점에 대하여 대칭이고, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-3x\leq x$이다. ▸ 2점

답 구하기 따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^2\{x-(x^3-3x)\}dx=2\int_0^2(4x-x^3)dx$$

$$=2\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=2(8-4)=8$$ ▸ 2점

Ⅲ 다항함수의 적분법

01 ⑤ **02** ① **03** 1

04 $f(x)=-3x^2+2x+1$ **05** ④ **06** $\frac{4}{3}$

07 ⑤ **08** ② **09** ③ **10** 5 **11** 7

12 ④ **13** $-\frac{1}{2}$ **14** ⑤ **15** ③ **16** 3

17 4 **18** ③ **19** ④ **20** $f(x)=3x$

21 $-\frac{1}{6}$ **22** $\frac{1}{3}$ **23** 19 **24** 25 **25** 16

11 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx=2$

또한, $\int_0^{-2} f(x)\,dx=-\int_{-2}^0 f(x)\,dx=-5$에서

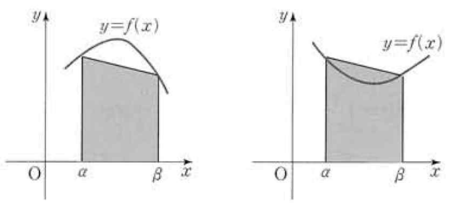
$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx=5$

$\therefore \int_{-1}^2 f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx$

$=2+5=7$

12



$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$는 $y=f(x)$와 $y=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이이고

$\frac{\beta-\alpha}{2}\{f(\alpha)+f(\beta)\}$는 위의 그림과 같이 색칠한 부분인 사다리꼴의 넓이이므로

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ge \frac{\beta-\alpha}{2}\{f(\alpha)+f(\beta)\}$를 만족하는 그래프는 위로 볼록한 모양이어야 한다.

따라서 부등식을 만족시키는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 곡선 $y=x(a-x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(a-x)=0$에서

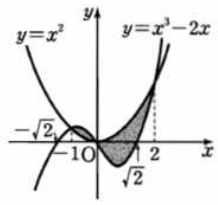
$x=0$ 또는 $x=a$ (단, $a>0$)

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^a (ax-x^2)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

이때 $\frac{a^3}{6}=\frac{2}{3}$이므로 $a^3=4$ $\quad\therefore a=\sqrt[3]{4}$

15 두 곡선



$y=x^3-2x$, $y=x^2$의

교점 의 x좌표는

$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이 S는

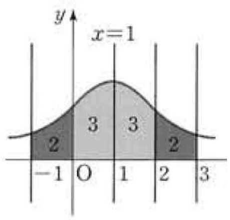
$$S=\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

16 $y=f(x)$는



$x=1$에 대하여 대칭인

함수이다.

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx$

$=\frac{1}{2}(8-2)=3$

18 이 물체가 10초 동안 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{10}|10t^2(6-t)|\,dt$$

$$=\int_0^6(60t^2-10t^3)\,dt+\int_6^{10}(-60t^2+10t^3)\,dt$$

$$=\left[20t^3-\frac{5}{2}t^4\right]_0^6+\left[-20t^3+\frac{5}{2}t^4\right]_6^{10}$$

$=1080+6080=7160$ (m)

20 해결 과정 a, b가 임의의 실수이므로 $a=b=0$을 $f(a+b)=f(a)+f(b)$에 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)$에서 $f(0)=0$ ▸ 2점

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$$ ▸ 2점

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int 3dx=3x+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

답 구하기 $\therefore\ f(x)=3x$ ▸ 2점

21 해결 과정 $0\le x<1$에서 $[x]=0$, $1\le x<2$에서 $[x]=1$, $x=2$일 때 $[x]=2$ ▸ 2점

답 구하기 $\displaystyle\int_0^2 [x](x-1)(x-2)dx$

$$=\int_0^1 0\cdot(x-1)(x-2)dx$$

$$+\int_1^2 1\cdot(x-1)(x-2)dx$$

$$+\int_2^2 2\cdot(x-1)(x-2)dx$$ ▸ 2점

$$=0+\int_1^2 1\cdot(x-1)(x-2)dx+0$$

$$=-\frac{1}{6}(2-1)^3=-\frac{1}{6}$$ ▸ 2점

22 해결 과정 $x^3=a$에서 $x=\pm\sqrt{a}$이므로 ▸ 2점

$$A=\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx,\ B=\int_{\sqrt{a}}^1(x^2-a)dx$$

이때 $A=B$이므로

$$\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx=\int_{\sqrt{a}}^1(x^2-a)dx$$ ▸ 2점

$$\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx-\int_{\sqrt{a}}^1(x^2-a)dx=0$$

$$\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^3)dx+\int_{\sqrt{a}}^1(a-x^2)dx=0$$

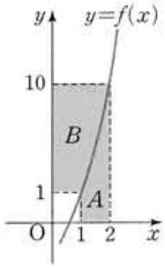
답 구하기 따라서 $\displaystyle\int_0^1(a-x^2)dx=0$에서

$$\left[ax-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=0,\ a-\frac{1}{3}=0$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{3}$$ ▸ 2점

23 문제 이해 $f(x)=x^3+2x-2$에서 $f'(x)=3x^2+2>0$

$f(x)$는 증가함수이므로 역함수가 존재한다.



해결 과정 역함수의 성질에서

$y=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$,

$y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$

$$A=\int_1^2 f(x)dx,\ B=\int_1^{10} g(y)dy$$ ▸ 2점

$f(1)=1$, $f(2)=10$이므로 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$와 $\displaystyle\int_1^{10} g(y)dy$는 그림에서 색칠한 두 부분 A, B의 넓이를 뜻한다. ▸ 2점

답 구하기 $\displaystyle\therefore\ \int_1^2 f(x)dx+\int_1^{10} g(y)dy$

$=2\times 10-1\times 1\ =19$ ▸ 2점

24 해결 과정 조건 I 의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2f(x)f'(x)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x+C$ ▸ 2점

조건 II의 식에 대입하면

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x+C\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+C\right.$$

$=2C=50$ $\quad\therefore\ C=25$ ▸ 2점

답 구하기 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+25$이므로 $f(0)=25$

▸ 2점

25 해결 과정 함수 $f(x)=x^3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 함수 $y=g(x)$의 식은

$g(x)=(x-a)^3+b$

이때 $g(0)=0$이므로 $-a^3+b=0$ $\quad\therefore b=a^3$

$\therefore g(x)=(x-a)^3+a^3$ ▸ 2점

또, $\displaystyle\int_a^{3a} g(x)dx=\int_0^{2a} g(x+a)dx$이므로

$$\int_{a}^{3a} g(x)dx = \int_{0}^{2a} g(x+a)dx$$
$$= \int_{0}^{2a} (x^3+a^3)dx = \int_{0}^{2a} x^3dx + \int_{0}^{2a} a^3dx$$
$$= \int_{0}^{2a} f(x)dx + \int_{0}^{2a} a^3dx \ (\because f(x) = x^3)$$

▸ 2점

답 구하기 위 식을

$\int_{a}^{3a} g(x)dx - \int_{0}^{2a} f(x)dx = 32$에 대입하면

$\int_{0}^{2a} f(x)dx + \int_{0}^{2a} a^3dx - \int_{0}^{2a} f(x)dx = 32$

에서 $\int_{0}^{2a} a^3dx = 32$, $\left[a^3x\right]_0^{2a} = 32$

$2a^4 = 32 \qquad \therefore a^4 = 16$ ▸ 2점