수학 I 해설 및 정답

Ⅰ-1. 지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근

기본

01 답 (1) a^3b^4 (2) a^4b^6 (3) a^2b^3

02 답 (1) -2 (2) $-3,\ 3$ (3) 0.3 (4) $-2,\ 2$

03 답 (1) 6 (2) 5 (3) -2 (4) -2

04 답 ②

$3^{\frac{6}{3}}=3^2=(3^2)^{\frac{k}{2}}=3^k$이므로 $\quad k=2$

표준

01 답 ③

ㄱ. (좌변)$=(a^b)^c=a^{bc}$, (우변)$=a^{bc}$ (참)

ㄴ. (좌변)$=a\wedge b^c=a^{b^c}$,

(우변)$=a^b\wedge c=(a^b)^c=a^{bc}$ (거짓)

ㄷ. (좌변)$=(ab)^c=a^cb^c$, (우변)$=a^cb^c$ (참)

02 답 ④

$1\le m\le 3,\ 1\le n\le 8$인 자연수이므로

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되려면

(ⅰ) $m=1$일 때 $n=1,\ 8$

(ⅱ) $m=2$일 때 $n=1,\ 8$

(ⅲ) $m=3$일 때 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$

구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 12개이다.

03 답 ④

$3^a=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠,

$9^{a+b}=48$에서

$(3^2)^{a+b}=3^{2(a+b)}=48$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡,

㉡÷㉠에서

$3^{2(a+b)-a}=12$

$\therefore\ 3^{a+2b}=12$

04 답 ①

$2^{xy}=(2^x)^y=3^y=5$

발전

01 답 ①

임의의 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 집합 S의 두 원소 $2^{2^m}+1$과 $2^{2^n}+1$의 공통인수를 $d\,(d>1)$라고 가정하자.

$2^{2^n}+1$은 $(2^{2^n}-1)+2$ 이고

$2^{2^n}-1=(\sqrt{2^{2^n}}+1)(\sqrt{2^{2^n}}-1)$

$=(2^{\boxed{2^{n-1}}}+1)(2^{\boxed{2^{n-1}}}-1)$

$(\because\ \sqrt{2^{2^n}}=(2^{2^n})^{\frac{1}{2}}=2^{2^n\times\frac{1}{2}}$

$=2^{2^n\times 2^{-1}}=2^{2^{n-1}})$

$2^{2^{n-1}}-1$

$=(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-3}}+1)\times\cdots\times(2+1)(2-1)$

$2^{2^n}+1$

$=(2^{2^n}-1)+2$

$=(2^{\boxed{2^{n-1}}}+1)(2^{\boxed{2^{n-1}}}-1)+2$

$=(2^{\boxed{2^{n-1}}}+1)\times\cdots\times(2^{2^m}+1)\times\cdots$

$\times(2+1)(2-1)+2$

따라서 d가 $2^{2^m}+1$과 $2^{2^n}+1$의 공통인수이고

$d>1$이므로 $d=\boxed{2}$ 이다.

그러나 모든 자연수 n에 대하여 $2^{2^n}+1$은

$\boxed{\text{홀수}}$ 이므로 모순이다.

따라서 $2^{2^m}+1$과 $2^{2^n}+1$은 1보다 큰 공통인수를 갖지 않으므로 서로소이다.

02 답 14

n이 짝수이면 $f(n)=2$

n이 홀수이면 $f(n)=1$

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$=2+1+2+1+2+1+2+1+2=14$

I-1. 지수와 로그

02 지수의 확장

기본

01 답 ②

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\times 4\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\sqrt{6}$$

02 답 ①

$$2^{\frac{6}{2}}\times\left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^3\times 2=16$$

03 답 6

$(x-x^{-1})^2=x^2+x^{-2}-2=38-2=36$이므로

$x-x^{-1}=\pm 6$

그런데 $x>1$에서 $0<\dfrac{1}{x}<1$이므로 $x-x^{-1}=6$

04 답 ⑤

$$8^3\times 4^{-2}=2^9\times 2^{-4}=2^5=32$$

표준

01 답 ④

$2^{2a+b}=27$이고, $4^{a-3b}=\dfrac{1}{25}$에서

$2^{2(a-3b)}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$이므로 $2^{a-3b}=\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $2^{3a-2b}=2^{2a+b}\cdot 2^{a-3b}=\dfrac{27}{5}$

02 답 ⑤

양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도가 S_1이므로

$$S_1=N\cdot(24)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{3}{4}}$$
$$=N\cdot(2^3\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{3}{4}}$$

양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도가 S_2이므로

$$S_2=N\cdot(12)^{\frac{1}{2}}\cdot 10^{-\frac{3}{4}}$$
$$=N\cdot(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 5)^{-\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\cdot(2^3\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{3}{4}}}{N\cdot(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 5)^{-\frac{3}{4}}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}-1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{\frac{5}{4}}$$

03 답 (1) $a^{\frac{2}{5}}$ (2) $a^{-\frac{3}{4}}$ (3) $\sqrt{a^5}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

04 답 ④

$$\frac{8^a+8^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\frac{(2^a+2^{-a})(4^a-1+4^{-a})}{2^a+2^{-a}}$$
$$=(2^a+2^{-a})^2-3=6$$

발전

01 답 (1) $\sqrt[3]{6}=\sqrt[12]{1296}$, $\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{1000}$, $\sqrt[6]{30}=\sqrt[12]{900}$

(2) $\sqrt[6]{30}<\sqrt[4]{10}<\sqrt[3]{6}$

(1) $\sqrt[3]{6}=\sqrt[3\times 4]{6^4}=\sqrt[12]{1296}$

$\sqrt[4]{10}=\sqrt[4\times 3]{10^3}=\sqrt[12]{1000}$

$\sqrt[6]{30}=\sqrt[6\times 2]{30^2}=\sqrt[12]{900}$

(2) $900<1000<1296$이므로

$\sqrt[12]{900}<\sqrt[12]{1000}<\sqrt[12]{1296}$

따라서 $\sqrt[6]{30}<\sqrt[4]{10}<\sqrt[3]{6}$이다.

02 답 3

$184^x=32$에서 $184^x=2^5$이므로

$184=2^{\frac{5}{x}}$ ……㉠

$23^y=4$에서 $23^y=2^2$이므로

$23=2^{\frac{2}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $2^{\frac{5}{x}}\div 2^{\frac{2}{y}}=8$

$2^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}=2^3$이므로 $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=3$이다.

Ⅰ-1. 지수와 로그

03 로그

기본

01 답 ④

$$\left(\frac{3}{\log_2 2}\right)^3+8\log_2 2=35$$

02 답 ①

$$\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{2}=\frac{\log 3^2}{\log 2}\cdot\frac{\log 2^{\frac{1}{2}}}{\log 3}$$

$$=\frac{2\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

03 답 ④

$$\log_3\sqrt{6}-\log_3\sqrt{2}$$

$$=\log_3\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

04 답 ②

$$\log_4\frac{16}{9}+\log_2 3=\log_2\frac{4}{3}+\log_2 3=2$$

표준

01 답 ②

세 수 1, $\log_2(2^x+1)$, $\log_2(4^x-1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2(2^x+1)=1+\log_2(4^x-1)$

$(2^x+1)^2=2(4^x-1)\ 4^x-2\cdot 2^x-3=0$,

$(2^x-3)(2^x+1)=0$

$2^x=3\ (\because\ 2^x>0)\qquad \therefore\ \alpha=\log_2 3$

그런데 $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$이므로 $1<\alpha<2$

02 답 30

$a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\log_2 a_k=\log_2 32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=6-k$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{11}|\log a_k|=\sum_{k=1}^{11}|6-k|=30$$

03 답 $0<x<1$ 또는 $1<x<5$

$\log_x(5-x)$가 정의되려면

$x>0$, $x\neq 1$, $5-x>0$

따라서 구하는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<1$ 또는 $1<x<5$

04 답 ⑤

$$\frac{\log 2}{\log a}=\frac{\log 5}{\log b}=\frac{\log 10}{\log c}$$

$$=\frac{\log 2+\log 5+\log 10}{\log a+\log b+\log c}$$

$$=\frac{\log 100}{\log abc}=\log_{abc}100$$

$\therefore\ x=100$

발전

01 답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

$\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=2$에서

$\log_c\{(a+b)(a-b)\}=2$, $\log_c(a^2-b^2)=2$

$a^2-b^2=c^2$, $a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

02 답 4

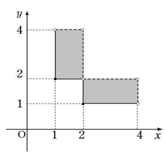
$[\log_2 x]=0$, $[\log_2 y]=1$ 일 때,

$1\le x<2$, $2\le y<4$ ...... ㉠

$[\log_2 x]=1$, $[\log_2 y]=0$ 일 때,

$2\le x<4$, $1\le y<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 좌표평면에 나타내면 두 사각형 넓이의 합은 4이다.



Ⅰ-1. 지수와 로그

04 상용로그

기본

01 답 (1) 4 (2) $\frac{2}{5}$ (3) $-\frac{3}{2}$

02 답 (1) 0.7882 (2) 0.6646

03 답 (1) 2.8312 (2) -1.1688

04 답 ②

처음 오염물질의 양을 a라 하면 필터의 길이가 5cm일 때, 공기청정기를 통과한 공기에 남아있는 오염물질의 양은 $a\times0.8^{n}$. 따라서 필터의 길이가 50cm일 때, 오염물질의 양은 $a\times0.8^{10}$

$x=0.8^{10}$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=10(3\log2-1)=-0.97$

$\therefore x=10^{-0.97}=0.11$

따라서 남아 있는 오염물질의 양은 처음의 11%이다.

표준

01 답 $\frac{7}{3}$

$\log 10<\log 40<\log 100$에서 $1<\log 40<2$

이므로 $n=1,\ \alpha=\log 40-1=\log 4$

$\therefore \frac{10^{n}+10^{\alpha}}{10^{n}-10^{\alpha}}=\frac{10+10^{\log 4}}{10-10^{\log 4}}=\frac{10+4}{10-4}=\frac{7}{3}$

02 답 0.0604

$\log x=-1.2190=-2+0.7810$

에서 $\log x$와 $\log 604$의 소수부분이 같으므로

x 는 604와 숫자의 배열이 같고, 정수부분이 -2

이므로 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. $\therefore x=0.0604$

03 답 1890

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수이므로

$[\log x]$는 $\log x$의 정수부분이다.

또한 진수 x가 n자리의 수이면 $\log x$의 정수부분은 $n-1$이므로 $[\log x]=n-1$

$x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\Rightarrow[\log x]=0\ \Rightarrow\ 9\times0=0$

$x=10,\ 11,\cdots,99\Rightarrow[\log x]=1\Rightarrow\ 90\times1=90$

$x=100,\ 101,\ 102,\ \cdots,\ 999$

$\Rightarrow\ [\log x]=2\ \Rightarrow\ 900\times2=1800$

$\therefore [\log1]+[\log2]+[\log3]+\ \cdots\ +[\log999]$

$=0+90+1800=1890$

04 답 ⑤

$75(0.997)^{n}=80(0.995)^{n}$

$n(\log 0.997-\log 0.995)=\log 80-\log 75$

$n(-1+0.999+1-0.998)=5\log 2-\log 3-1$

$0.001\times n=0.028\qquad\therefore\ n=28$

발전

01 답 ⑤

두 물체 A, B를 통과하여 나오는 X선의 세기를 각각 $I_A,\ I_B$라 하면

$3=\frac{2.3}{2.3}(\log I_0-\log I_A)$

$4.6=\frac{2.3}{2.5}(\log I_0-\log I_B)$

$\therefore\ \log I_A=\log I_0-3,\ \log I_B=\log I_0-5$

따라서 $\log I_A-\log I_B$

$=(\log I_0-3)-(\log I_0-5)=2$

이므로 $\log\frac{I_A}{I_B}=2$

$\frac{I_A}{I_B}=10^{2}=100\qquad\therefore\ I_A=100I_B$

따라서 물체 A를 통과하여 나오는 X선의 세기는 물체 B를 통과하여 나오는 X선의 세기의 100배이다. $\therefore\ k=100$

02 답 103.01dB

합쳐진 소리의 크기를 xdB이라고 하면

$x=10\log(10^{\frac{100}{10}}+10^{\frac{100}{10}})$

$=10\log(2\cdot10^{10})$

$=10\log2+10\cdot10\log10$

$=10\times0.3010+100=103.01$

따라서 합쳐진 소리의 크기는 103.01dB이다.

I-1. 지수와 로그

01 ④	**02** ②, ⑤	**03** ③	**04** ④
05 ④	**06** ⑤	**07** ②	**08** $\frac{5}{2}$
09 3	**10** 2.51배	**11** 10	**12** (1) $\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{5}$
13 ①	**14** ②	**15** $\sqrt{10}$	**16** ③
17 ②	**18** ④	**19** ①	**20** ②
21 $\frac{5}{8}$	**22** 3분	**23** $0<p<1$ 또는 $1<p<2$	**24** 4

01 $x^4=16$을 만족하는 x의 개수는 4이므로 $a=4$
$x^n=-8$을 만족하는 x의 개수는 b이므로 $b=n$
$a+b=4+n=13$, 즉 $n=9$

02 ① $x^3=8$에서 $x^3-8=0$,
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$이므로
$x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$, 즉 3개이다.
② $(-1)^3=-1$이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.
③ $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$이므로
$\sqrt{(-3)^2}=3$의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.
④ $x^4=-81<0$이므로 -81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없다.
⑤ $x^n=5$에서 n이 홀수일 때, 실수인 x는 한 개이다.

03 $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}+\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[5]{2\cdot16}+\sqrt[4]{\dfrac{48}{3}}$
$=\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[4]{2^4}=4$

04 ① $a^2\div a^{-3}\times a^4=a^{2-(-3)+4}=a^9$
② $(a^{-2})^3\times(a^{-4})^2=a^{-6}\times a^{-8}=a^{-14}$
③ $\dfrac{a^3\times a^{-2}}{a^{-4}\times a^2}=\dfrac{a}{a^{-2}}=a^{1-(-2)}=a^3$
④ $\dfrac{(a^3)^{-3}}{a^{-2}\times a^5}=\dfrac{a^{-9}}{a^3}=a^{-9-3}=a^{-12}$
⑤ $\dfrac{a^{-2}\times a^4}{a^{-5}\times a^2}=\dfrac{a^2}{a^{-3}}=a^{2-(-3)}=a^5$

05 $9^{-\frac{3}{2}}\times16^{\frac{1}{4}}\div\sqrt{81^{-3}}$
$=(3^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^4)^{\frac{1}{4}}\div(3^4)^{-\frac{3}{2}}$
$=3^{-3-(-6)}\times2=3^3\times2=54$

06 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{7}}}=\sqrt[16]{7}\times\sqrt[24]{7}$
$=7^{\frac{1}{16}+\frac{1}{24}}=7^{\frac{5}{48}}=7^{\frac{k}{48}}$
$\dfrac{5}{48}=\dfrac{k}{48}$이므로 $k=5$

07 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(3^6)^{\frac{1}{12}}=729^{\frac{1}{12}}$
$\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$
$\sqrt[6]{13}=13^{\frac{1}{6}}=(13^2)^{\frac{1}{12}}=169^{\frac{1}{12}}$
따라서 $\sqrt[4]{5}<\sqrt[6]{13}<\sqrt{3}$

08 $x^3=(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3$
$=(2^{\frac{1}{3}})^3+(2^{-\frac{1}{3}})^3+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$
$=2+2^{-1}+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$
$=2+\dfrac{1}{2}+3x\ \ (x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})=\dfrac{5}{2}+3x$
즉, $x^3=\dfrac{5}{2}+3x$이므로 $x^3-3x=\dfrac{5}{2}$

09 $27^x=a$에서 $(27^x)^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{x}}$이므로 $a^{\frac{1}{x}}=27$
$3^y=a$에서 $(3^y)^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{y}}$이므로 $a^{\frac{1}{y}}=3$
이때 $a^{\frac{1}{x}}\div a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=27\div3=9$에서
$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2$이므로 $a^2=9$
그런데 $a>0$이므로 $a=3$

10 n등성의 밝기가 $(n+1)$등성의 밝기의 a배라고 하면 1등성의 밝기는 6등성의 밝기의 a^5배이므로 $a^5=100$,
따라서 $a=100^{\frac{1}{5}}=10^{\frac{2}{5}}=10^{0.4}=2.51$
즉, 5등성의 밝기는 6등성의 밝기의 2.51배이다.

11 $\left[\left\{\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{9}{4}}\right\}^{\frac{8}{3}}\right]^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{9}{4}\times\frac{8}{3}\times\frac{1}{m}}$

$=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{6}{m}}=(2^{-8})^{\frac{6}{m}}=2^{-\frac{48}{m}}$ …… ㉠

이므로 ㉠이 자연수가 되도록 하는 모든 정수 m의 값은 $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -6,\ -8,\ -12,\ -16,\ -24,\ -48$ ∴ 개수는 10이다.

12 (1) $2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=3$이므로

$(2^x+2^{-x})^2=5$

따라서 $2^x+2^{-x}=\sqrt{5}$ $(2^x+2^{-x}>0)$

(2) $2^x+2^{-x}=\sqrt{5}$이므로

$2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

13 $\log_x 125=-3$에서 $125=x^{-3}$

$5^3=x^{-3}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=x^{-3}$, 즉 $x=\frac{1}{5}$

14 $\log_3 9+4\log_3\sqrt{3}-\log_3 81$

$=\log_3 3^2+4\log_3 3^{\frac{1}{2}}-\log_3 3^4=2+4\times\frac{1}{2}-4$

$=0$

15 해결 과정 $\log x$와 $\log\frac{1}{x}$의 소수부분이 같으므로

$\log x-\log\frac{1}{x}=\log x^2=2\log x$는 정수

▸ 3점

$1<x<10$이므로

$0<\log x<1$, $0<2\log x<2$ …… ㉠ ▸ 3점

답 구하기 ㉠으로부터 $2\log x=1$이므로,

$\log x=\frac{1}{2}$에서 $x=10^{\frac{1}{2}}$ ∴ $x=\sqrt{10}$ ▸ 2점

16 $\log_{10}2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$

$=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2$

17 이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 두 근이 $\log_{10}a$, $\log_{10}b$이므로 근과 계수의 관계에서

$\log_{10}a+\log_{10}b=6$, $\log_{10}a\cdot\log_{10}b=-3$

$\log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_{10}b}{\log_{10}a}+\frac{\log_{10}a}{\log_{10}b}=\frac{(\log_{10}a)^2+(\log_{10}b)^2}{\log_{10}a\cdot\log_{10}b}$

$=\frac{(\log_{10}a+\log_{10}b)^2-2\log_{10}a\cdot\log_{10}b}{\log_{10}a\cdot\log_{10}b}$

$=\frac{6^2-2\times(-3)}{-3}=-14$

18 $\log x=1.3412$이므로

$\log x^3+\log\sqrt{x}$

$=3\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{7}{2}\log x$

$=\frac{7}{2}\times1.3412=4.6942$

19 $3^{40}=a\times10^n$에서 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{40}=\log(a\times10^n)=n+\log a$ …… ㉠

$1\le a<10$이므로 $0\le\log a<1$

이때 $\log 3^{40}=40\log 3=40\times0.4771=19.084$

이므로 ㉠에서 $n=19$, $\log a=0.084$

따라서 $\log a$의 소수 부분은 0.084이다.

20 $2\le\log x<3$에서 $\log x$의 정수 부분은 2이므로 $[\log x]=2$

즉, $\log x-[\log x]=\log 2$에서

$\log x=2+\log 2=\log 100+\log 2=\log 200$

따라서 $x=200$

21 해결 과정 $a^2b^3=1$, $a^8b^{12}=(a^2b^3)^4=1$ ▸ 3점

또, $a^2b^3=1$에서 $\log_a a^2b^3=\log_a 1=0$

즉, $\log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=0$이므로

$2+3\log_a b=0$ 즉, $\log_a b=-\frac{2}{3}$ ▸ 3점

답 구하기 $a^8b^{12}+\log_b\sqrt[4]{a}=1+\frac{1}{4}\log_b a$

$=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\log_a b}=1+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}$ ▸ 2점

22
$$\log\frac{T-T_s}{T_0-T_s}=kt \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에 $T_0=96$, $T_s=6$, $T=36$, $t=3$을 대입

하면 $\log\frac{36-6}{96-6}=\log\frac{30}{90}=\log\frac{1}{3}=3k$

즉, $-\log 3=3k$이므로 $\quad k=-\frac{1}{3}\log 3$

따라서 ㉠에 $T_0=36$, $T_s=6$, $T=16$,

$k=-\frac{1}{3}\log 3$을 대입하면

$\log\frac{16-6}{36-6}=\log\frac{1}{3}=-\frac{t}{3}\log 3$

즉, $-\log 3=-\frac{t}{3}\log 3$이므로 $\quad t=3$

따라서 달걀을 16 °C까지 식히려면 3분이 더 지나야 한다.

23
해결 과정 밑의 조건에 의해 $\quad 2-p>0$,

$2-p\neq 1$ 즉, $p<2$, $p\neq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠ ▸ 3점

또, 진수의 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2px+3p>0$

$\frac{D}{4}=p^2-3p<0$, $p(p-3)<0$이어야 하므로

$0<p<3$ $\cdots\cdots$ ㉡ ▸ 3점

답 구하기 ㉠, ㉡에서

$0<p<1$ 또는 $1<p<2$ ▸ 2점

24
해결 과정 $n+\alpha=\frac{12}{5}$ ▸ 3점

이때 n은 정수, $0\leq\alpha<1$이므로

$n=2$, $\alpha=\frac{2}{5}$ ▸ 3점

답 구하기 $\frac{k}{5}=n\cdot\alpha=\frac{4}{5}$, 즉 $\quad k=4$ ▸ 2점

Ⅰ-2. 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수

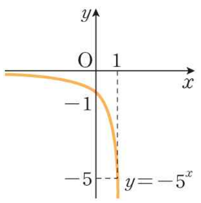
기본

01 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 8

02 답 (1) 0 (2) 1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) -1

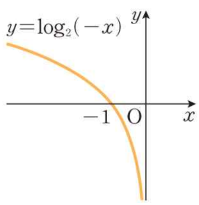
03 답 해설 참조

(1)



점근선의 식: $y=0$

(2)



점근선의 식: $x=0$

04 답 (1) $\sqrt[3]{4}<\sqrt[5]{16}<(\sqrt{2})^3$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}3<0<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$

표준

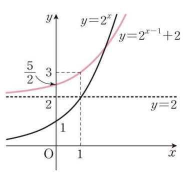
01 답 해설 참조

(1) 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 지수함수$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

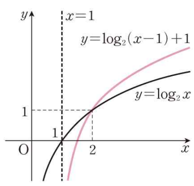
따라서 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 다음 그림[1]과 같고, 그래프의 점근선의 식은 $y=2$이다.

(2) 함수 $y=\log_2(x-1)+1$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_2(x-1)+1$의 그래프는 다음 그림[2]와 같고, 그래프의 점근선의 식은 $x=1$이다.



[그림1]



[그림2]

02 답 $a=-1$, $b=-1$

03 답 ㄱ, ㄷ

04 답 (1) 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{4}{9}$

(2) 최댓값 : -2, 최솟값 : -6

발전

01 답 ②

함수 $f(x)=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하고 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식이 $g(x)$이므로 $g(x)=a^{-(x-m)}$

조건 (가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(1)=g(1)$

즉, $a=a^{-(1-m)}$, $1=-1+m$이므로 $m=2$

또한 조건 (나)에서 $f(3)=16g(3)$이므로

$a^3=16a^{-3+m}$

$a^3=16a^{-1}$, $a^4=16$

이때, 함수 $f(x)=a^x$에서 $a>0$, $a\neq1$이므로

$a=2$

$\therefore\ a+m=4$

02 답 ②

두 로그함수 $y=\log_3 x$, $y=\log_3(x-a)+b$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(a+3^{-b},0)$이고

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times1\times(a+3^{-b}-1)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+3^{-b}=\frac{7}{3}$ …… ㉠

두 로그함수 $y=\log_3 x$, $y=\log_3(x-a)+b$의 그래프의 교점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(3,1)$이므로 점 C는 함수 $y=\log_3(x-a)+b$의 그래프 위의 점이다.

즉, $1=\log_3(3-a)+b$

$\therefore\ 3-a=3^{1-b}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=1$

$\therefore\ a+b=3$

Ⅰ-2. 지수함수와 로그함수

02 지수함수와 로그함수활용

기본

01 답 (1) $x=4$ (2) $x=-3$
(3) $x=2$ (4) $x=9$

02 답 (1) $x>\frac{5}{2}$ (2) $x \le 3$
(3) $x \le 9$ (4) $x>0.01$

03 답 (1) $x>3$ (2) $x \le \frac{1}{2}$ (3) $x>-3$

04 답 (1) $0<x<\frac{1}{8}$ (2) $4<x \le 85$

표준

01 답 ④

02 답 16

03 답 ①

04 답 7일

발전

01 답 400

(ⅰ) $0 \le x<2$일 때, $f(x)=5$에서

$3^x=5 \quad \therefore x=\log_3 5$

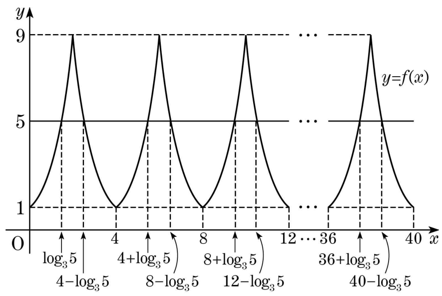
(ⅱ) $2 \le x<4$일 때, $f(x)=5$에서

$3^{-x+4}=5,\ -x+4=\log_3 5$

$\therefore x=4-\log_3 5$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 닫힌구간 $[0,40]$에서 방정식 $f(x)=5$를 만족시키는 x의 값을 차례대로 구하면 다음과 같다.

$\log_3 5,\ 4-\log_3 5,\ 4+\log_3 5,\ 8-\log_3 5,$
$8+\log_3 5,\ 12-\log_3 5,\ 12+\log_3 5,\ \cdots,$
$40-\log_3 5$



따라서 구하는 방정식 $f(x)-5=0$의 모든 실근의 합은

$\{\log_3 5+(4-\log_3 5)\}+\{(4+\log_3 5)$
$\quad +(8-\log_3 5)\}$
$+\cdots+\{(36+\log_3 5)$
$\quad +(40-\log_3 5)\}$
$=4+12+20+\cdots+76$
$=\frac{10\times(4+76)}{2}=400$

02 답 $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

$P(8)=100\left(1+a^{-\frac{1}{5}}\right),\ P(4)=100\left(1+a^{-\frac{1}{10}}\right)$

$P(8)=\frac{13}{15}P(4)$이므로

$15\left(1+a^{-\frac{1}{5}}\right)=13\left(1+a^{-\frac{1}{10}}\right)$

$15\cdot a^{-\frac{1}{5}}-13\cdot a^{-\frac{1}{10}}+2=0$

이때 $a^{-\frac{1}{10}}=X\,(X>0)$로 놓으면

$15X^2-13X+2=0$

$(3X-2)(5X-1)=0$

$\therefore X=\frac{2}{3}$ 또는 $X=\frac{1}{5}$

즉, $a^{-\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}$ 또는 $a^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{5}$이므로

$a=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 또는 $a=5^{10}$

그런데 $0<a<100$이므로 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

Ⅰ-2. 지수함수와 로그함수

01 ④ **02** ① **03** ③ **04** ⑤ **05** ⑤
06 ③ **07** ③ **08** ② **09** ④ **10** ④
11 ② **12** ① **13** ③ **14** ④
15 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$
16 4 **17** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **18** ①
19 17.6년 **20** $-3<x<1$ **21** ②
22 (1) $\log x_0=4$, $\log x_1=4.8$ (2) 2.1
23 $0<a\le\dfrac{1}{10000}$ **24** 1

01 $f(-2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=(\sqrt{2})^2=2$

02 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{f(3)}=\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}}3}$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 3\times\dfrac{-2}{\log_2 3}=-1$

03 ①은 옳다. 밑이 1보다 작은 지수함수와 로그함수는 감소함수이다.
②도 옳다. 지수함수의 그래프는 x축 위쪽에 있고, 로그함수의 그래프는 y축 오른쪽에 있다.
③은 옳지 않다. 지수 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 점 $(0,1)$을 지난다.
④는 옳다. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 $y=3^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.
⑤도 옳다. 밑이 같은 지수함수와 로그함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

04 $(\sqrt{8})^x=2^{\frac{3}{2}x}$, $4\sqrt{2}=2^{\frac{5}{2}}$이므로
$\dfrac{3}{2}x=\dfrac{5}{2}$, $x=\dfrac{5}{3}$

05 로그의 진수는 양수이므로 $x>0$

$\log_{\sqrt{2}}x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}=2\log_2 x=\log_2 x^2$

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}=\dfrac{\log_2\sqrt{3}}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2\sqrt{3}=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 $x^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

06 ① 그래프는 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다. (거짓)
② $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (거짓)
③ 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (참)
④ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.(거짓)
⑤ 역함수는 $y=\log_a x$ 이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ③이다.

07 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{8})+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하려면 $x=0$일 때, $y\ge 0$이어야한다.
즉, $y=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8}+k=-\dfrac{3}{2}+k\ge 0$, $k\ge\dfrac{3}{2}$
따라서 상수 k의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

08 점근선의 식이 $x=-3$이므로 $a=-3$
함수의 그래프가 점 $(0,\ b)$를 지나므로
$b=3-\log_{\frac{1}{2}}3=3+\log_2 3$
함수의 그래프가 점 $(c,\ 0)$을 지나므로
$0=3-\log_{\frac{1}{2}}(c+3)$, $c=-\dfrac{23}{8}$
따라서 $(a+b)\times c=-\dfrac{23}{8}\log_2 3$

09 주어진 그래프에서 $10^a=2$, $10^b=4$, $10^c=5$이므로
$a=\log 2$, $b=\log 4$, $c=\log 5$
$\therefore 2a+b+4c=2\log 2+\log 4+4\log 5$
$=\log(2^2\times 4\times 5^4)=\log 10000=4$

10 $8^{2-\sqrt{6-x}}=2^{6-3\sqrt{6-x}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$이고,

밑 2는 1보다 크므로

$6-3\sqrt{6-x}>-\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{6-x}<\dfrac{13}{6}$

$0<6-x<\dfrac{169}{36}$, $\dfrac{47}{36}<x<6$

따라서 이를 만족하는 정수 x의 개수는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

11 $\log_{4-x}\sqrt[3]{9}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{2}{3}\log_{4-x}3=\dfrac{1}{2}$

$\log_{4-x}3=\dfrac{3}{4}$, $\log_3(4-x)=\dfrac{4}{3}$

$4-x=3^{\frac{4}{3}}$, $x=4-3\sqrt[3]{3}$

12 주어진 식에 $x=9$와 $x=\dfrac{1}{3}$을 각각 대입하면

$(\log_3 9)\cdot\left(\log_3\dfrac{a}{9}\right)=b$, $\left(\log_3\dfrac{1}{3}\right)\cdot(\log_3 3a)=b$

$\therefore\ 2\log_3\dfrac{a}{9}=b\cdots\cdots$㉠, $-\log_3 3a=b\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 b를 소거하면 $2\log_3\dfrac{a}{9}=-\log_3 3a$

$\log_3\left(\dfrac{a}{9}\right)^2=\log_3\dfrac{1}{3a}$, $\left(\dfrac{a}{9}\right)^2=\dfrac{1}{3a}$, $a^3=27$

$\therefore\ a=3$이 값을 ㉡에 대입하면 $b=-2$

$\therefore\ a+b=3+(-2)=1$

13 로그의 진수는 양수이므로 $x<10$

$\log_{\frac{1}{2}}(10-x)>-2$에서

$\log_2(10-x)<2$, $x>6$

따라서 $6<x<10$이므로 구하는 자연수 x의 개수는 7, 8, 9의 3개다.

14 로그의 진수는 양수이므로 $x<4$

이때 m은 자연수이므로 1, 2, 3이다.

(ⅰ) $m=1$일 때, $0<n\le\log_{\sqrt{2}}12$이고

$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{128}<\log_{\sqrt{2}}12<\log_{\sqrt{2}}\sqrt{256}$

즉, $7<\log_{\sqrt{2}}12<8$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(ⅱ) $m=2$일 때, $0<n\le\log_{\sqrt{2}}8=6$이므로

$(\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6\ )$

(ⅲ) $m=3$일 때, $0<n\le\log_{\sqrt{2}}4=4$이므로

$(\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4\ )$

이상에서 주어진 집합의 원소의 개수는

$7+6+4=17$

15 (ⅰ) 밑이 같으면 지수도 같다.

$x^2-2x=3x-6$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

(ⅱ) $x=1$은 항상 해가 된다.

(ⅲ) $x=0$을 대입하면 우변이 0^{-6}으로 수가 아니다.

(ⅳ) $x=-1$을 대입하면 좌변은 $(-1)^3=-1$, 우변은 $(-1)^{-9}=-1$로 같다.

$\therefore x=2$또는 $x=3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$

16 $y=2^x-\sqrt{2^{x+4}}+3=(\sqrt{2})^{2x}-4(\sqrt{2})^x+3$

이때 $(\sqrt{2})^x=t$로 놓으면

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

한편, $\sqrt{2}>1$이므로 지수함수 $t=(\sqrt{2})^x$은 x의 값이 증가하면 t의 값도 증가한다.

한편, $-2\le x\le 4$일 때, $\dfrac{1}{2}\le t\le 4$이므로 함수 y의 최댓값은 $t=4$, 즉 $x=4$일 때 $y=3$이고, 최솟값은 $t=2$, 즉 $x=2$일 때 $y=-1$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3-(-1)=4$

17 함수 $y=\log_a(x-a)+b$는 $x=a+\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지므로

$\log_a\dfrac{1}{2}+b=12$, $b=12+\log_a 2$

또, $x=\dfrac{1}{2}(a+1)^2$일 때 최솟값을 가지므로

$\log_a\left\{\dfrac{1}{2}(a+1)^2-a\right\}+12+\log_a 2=10$

$\log_a\{(a+1)^2-2a\}=-2$, $a^4+a^2-1=0$

이때 $0<a^2<1$이므로

$a^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

18 $2^x = t$로 치환하면

$t^2 - 6t - 16 < 0$, $(t-8)(t+2) < 0$

$t = 2^x > 0$이므로 $t+2 > 0$ $\quad \therefore t-8<0$

즉, $2^x < 2^3$이므로 $x < 3$

$\therefore$ $x<3$은 자연수의 합은 $1+2=3$이다.

19 문제 이해 이 방사성 물질의 초기 질량을 a라고 하면 t년 후의 질량 y는 $y = a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{24}}$ ▸ 3점

해결 과정 초기 질량의 60 %가 되는 때는

$a \times \frac{60}{100} = a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{24}}$, $\frac{3}{5} = 2^{-\frac{t}{24}}$ ▸ 3점

답 구하기 $\log\frac{3}{5} = -\frac{t}{24}\log 2$

$t = \frac{24(\log 5 - \log 3)}{\log 2} = \frac{24(1-\log 2 - \log 3)}{\log 2}$

$= \frac{24(1-0.3-0.48)}{0.3} = 17.6$ ▸ 2점

20 로그의 진수는 양수이므로

$x+5>0$, $1-x>0$

즉, $-5<x<1$ ······ ㉮

주어진 부등식을 정리하여 풀면

$\log_2(x+5)^2 > \log_2(1-x)$

$(x+5)^2 > 1-x$, $(x+8)(x+3)>0$

즉, $x<-8$ 또는 $x>-3$ ······ ㉯

따라서 구하는 해는 $-3<x<1$ ······ ㉰

21 주어진 함수의 식을 정리하면

$y = 2^{x+2} \cdot 3^{-x} = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

이때 $0 < \frac{2}{3} < 1$이므로 $-2 \le x \le 1$에서

$x=-2$일 때, y는 최대이고

최댓값은 $4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 9$

$x=1$일 때, y는 최소이고

최솟값은 $4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{3}$

$\therefore 9 + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$

22 (1) 답 구하기 $\log x_0 = 4$, $\log x_1 = 4.8$

▸ 4점

(2) 해결 과정 지진의 세기를 나타내는 규모 y는 지진의 최대 진폭 x μm(마이크로미터)에 대하여 $y = \log x$로 정의되므로 ▸ 2점

답 구하기 $\log\left(50\frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt[3]{x_1}}\right)$

$= \log 50 + \frac{1}{2}\log x_0 - \frac{1}{3}\log x_1$

$= 2 - \log 2 + \frac{1}{2}\times 4 - \frac{1}{3}\times 4.8$

$= 2.4 - \log 2 = 2.1$

▸ 2점

23 문제 이해 $x^{\log x} \ge ax^4$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} \ge \log ax^4$, $(\log x)^2 \ge \log a + 4\log x$

$\therefore (\log x)^2 - 4\log x - \log a \ge 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - 4t - \log a \ge 0$ ▸ 3점

이 부등식이 모든 실수 t에 대하여 항상 성립해야 하므로

해결 과정 t에 대한 이차방정식

$t^2 - 4t - \log a = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 4 + \log a \le 0$, $\quad \log a \le -4$

▸ 3점

답 구하기 $\log a \le \log 10^{-4}$

$\therefore 0 < a \le \frac{1}{10000}$ $(\because a>0)$ ▸ 2점

24 해결 과정 $\left(\frac{1}{2}\right)^d = c$, $\left(\frac{1}{2}\right)^a = e$에서

$a = -\log_2 e$, $d = \log_2 e$이므로

$a+d=0$ ▸ 3점

$\log_2 e = d$에서 $2^d = e$

$\therefore ce = \left(\frac{1}{2}\right)^d \cdot 2^d = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^d = 1$ ▸ 3점

답 구하기 $\therefore a+d+c\times e = 0+1=1$ ▸ 2점

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01 ④	**02** ②	**03** 11	**04** 15	**05** ③
06 ④	**07** ④	**08** ⑤	**09** 3	**10** ③
11 ①	**12** ③	**13** ③	**14** ④	**15** 3
16 ②	**17** 973	**18** ③	**19** ①	**20** 1
21 12	**22** 24	**23** 16	**24** 228	**25** 45

09 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$(\log x-1)\log x=2$,

$(\log x)^2-\log x-2=0$

근과 계수의 관계에 의해

$\log\alpha+\log\beta=1$, $\log\alpha\cdot\log\beta=-2$

$\therefore \left(\log\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$

$=(\log\beta-\log\alpha)^2$

$=(\log\alpha+\log\beta)^2-4\log\alpha\cdot\log\beta$

$=1-4\times(-2)=9$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\log\alpha<\log\beta$이므로

$\log\dfrac{\beta}{\alpha}=\log\beta-\log\alpha>0$ $\quad\therefore \log\dfrac{\beta}{\alpha}=3$

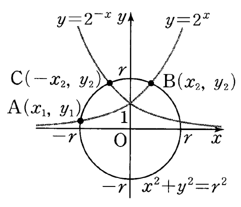
10 동물 B의 표준대사량을 $E_{\mathrm{B}}=kW^{\frac{3}{4}}$이라 하면, 동물 A의 표준대사량 E_{A}는

$E_{\mathrm{A}}=k(100W)^{\frac{3}{4}}=100^{\frac{3}{4}}E_{\mathrm{B}}$

이때 동물 A의 표준대사량은 동물 B의 표준대사량의 a배이므로 $100^{\frac{3}{4}}E_{\mathrm{B}}=a\cdot E_{\mathrm{B}}$

$\therefore a=100^{\frac{3}{4}}\quad\therefore a^{\frac{4}{3}}=100$

12 지수함수 $y=2^x$의 그래프와 원 $x^2+y^2=r^2\,(r>1)$의 교점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 또, 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}(-x_2,\ y_2)$라 하면 점 C는 지수함수 $y=2^{-x}$의 그래프와 원 $x^2+y^2=r^2$의 교점이다.



ㄱ. $|x_1|>|-x_2|=|x_2|$이고

$x_1<0$, $x_2>0$이므로 $x_1+x_2<0$이다.(참)

ㄴ. 두 점 A, B는 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=r^2$, $x_2^2+y_2^2=r^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}$

$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2}$

$=\sqrt{2r^2-2x_1x_2-2y_1y_2}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}>0$ 이므로

$\sqrt{2r^2-2x_1x_2-2y_1y_2}>0$에서

$2r^2-2x_1x_2-2y_1y_2>0$

$\therefore\ x_1x_2+y_1y_2<r^2$ (거짓)

ㄷ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

이때 $x_2-x_1>0$이므로

$y_2-y_1<x_2-x_1$

$\therefore\ x_1-y_1<x_2-y_2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

20 해결 과정 (ⅰ) $0<a<1$일 때,

진수 조건에서

$y>0$, $\log_x y>0$, $0<y<1$

$\log_x(\log_x y)<0$에서

$\log_x y>1\quad\therefore y<x$

따라서 $0<x<1$, $0<y<1$, $y<x$이므로

좌표평면에 나타내면 영역 A이다. ▸ 3점

(ⅱ) $1<x<2$일 때,

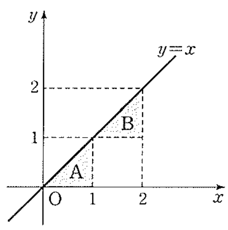
진수 조건에서

$y>0$, $\log_x y>0$,

즉 $y>1$

$\log_x(\log_x y)<0$에서

$\log_x y<1\quad\therefore y<x$



따라서 $1<x<2$, $y>1$, $y<x$이므로

좌표평면에 나타내면 영역 B이다. ▸ 3점

그러므로 구하는 영역의 넓이는

답 구하기 $\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)=1$ ▸ 2점

21 문제 이해 $a^x+a^{-x}=t$로 놓으면

$t=a^x+a^{-x}=a^x+\frac{1}{a^x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot \frac{1}{a^x}}=2$

$\therefore\ t \geq 2$ ▸ 2점

해결 과정

$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x)^2+(a^{-x})=(a^x+a^{-x})^2-2$

$=t^2-2$

$\therefore\ y=-t^2+4t+2+k$

$=-(t-2)^2+k+6\ (t \geq 2)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $t=2$일 때, y는 최댓값 $k+6$을 가진다.

$k+6=18 \qquad \therefore\ k=12$ ▸ 2점

22 문제 이해 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표는 $[\log n]$이고 가수를 α라 하면

해결 과정 $\log n=[\log n]+\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$ ⋯ ㉠

$\log n-[\log n]=\alpha$이므로 조건 (가)에 의하여

$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡ ▸ 2점

㉠에서 $3\log n=3[\log n]+3\alpha$,

㉡에서 $\frac{3}{2}<3\alpha<2$이므로 $3\log n$의 지표는 $3[\log n]+1$이다.

$\therefore\ [3\log n]=3[\log n]+1$ ▸ 2점

또, ㉠에서 $2\log n=2[\log n]+2\alpha$이고,

㉡에서 $1<2\alpha<\frac{4}{3}$이므로 $2\log n$의 지표는

$2[\log n]+1 \qquad \therefore\ [2\log n]=2[\log n]+1$

▸ 2점

답 구하기 조건 (나)에서

$[3\log n]+[2\log n]$

$=3[\log n]+1+2[\log n]+1$

$=5[\log n]+2$

$=122$

이므로 $5[\log n]=120$

$\therefore\ [\log n]=24$

▸ 2점

23 문제 이해 함수 $y=2^x$와 직선 $x=t$가 만나는 점은 $(t,\ 2^t)$, 함수 $y=-2^{-x+1}$와 직선 $x=t$가 만나는 점은 $(t,\ -2^{-x+1})$이므로

해결 과정 $l_t=2^t-(-2^{-t+1})=2^t+2^{-t+1}$

$2^t>0,\ 2^{-t+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$l_t=2^t+2^{-t+1} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{-t+1}}=2\sqrt{2}$

이때 $2^t=2^{-t+1}$일 때 등호가 성립하므로

$t=-t+1 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 l^t는 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

$\therefore \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=2\sqrt{2} \qquad \therefore \frac{\beta^2}{\alpha}=16$ ▸ 3점

24 문제 이해 방사성 원소 X의 처음의 양은 a,

해결 과정 반감기가 n번 지난 후 남아 있는 방사성 원소의 양은 $a\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ⋯⋯ ㉠

이때 타다만 곡식 한 알에 포함되어 있는 방사성 원소 x의 양이 처음 방사성 원소의 양의 6.25%이므로 $a\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.0625a$

$0.0625=\frac{625}{10000}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$이므로 ▸ 3점

답 구하기 $a\left(\frac{1}{2}\right)^n=a\left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad \therefore\ n=4$ ⋯⋯ ㉡

따라서 반감기 57년이 4번 지났으므로 228년 전에 수확한 것으로 추정 할 수 있다 ▸ 3점

25 해결 과정 $\overline{AB}=\log_2 k-\log_{\frac{1}{4}} k$

$=\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=\frac{3}{2}\log_2 k=6$

이므로

$\frac{3}{2}\log_2 k=6$에서 $\log_2 k=4 \qquad \therefore\ k=16$

이때 점 P의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 ▸ 3점

답 구하기 $\triangle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot 6 \cdot (16-1)=45$

▸ 3점

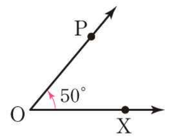
Ⅱ-1. 삼각함수

01 일반각과 호도법

기본

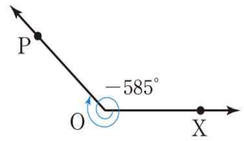
01 답 해설 참조

(1)



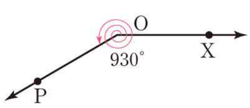
$360^\circ \times n + 50^\circ$

(2)



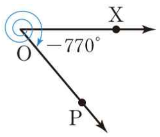
$360^\circ \times n + 135^\circ$

(3)



$360^\circ \times n + 210^\circ$

(4)



$360^\circ \times n + 310^\circ$

02 답 (1) 제1사분면의 각 (2) 제2사분면의 각
(3) 제3사분면의 각 (4) 제4사분면의 각

03 답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (2) $2n\pi + \pi$
(3) $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$ (4) $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

04 답 ⑤

표준

01 답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$ (3) 150°
(4) $\frac{7}{6}\pi$ (5) 240° (6) $\frac{5}{3}\pi$

02 답 ⑤

03 답 ①

호의 길이 (l)과 중심각 (α)의 크기는 비례하고, 원의 둘레는 $2\pi r$이므로 $l : \alpha = 2\pi r : 360^\circ$

$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ 여기에 $l = r$을 대입하면

$\frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ $\therefore \alpha^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \boxed{\frac{180^\circ}{\pi}}$

04 답 $18\ \text{cm}^2$

부채꼴 OAB의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$

새롭게 만들어진 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{3}{4}r$이고, 중심각의 크기는 $\frac{8}{5}\theta$이다.

새롭게 만들어진 부채꼴의 넓이 S'은

$S' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}r\right)^2 \cdot \frac{8}{5}\theta = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2}r^2\theta = 0.9S$

따라서 넓이는 10% 줄어든다.

그러므로 변화된 부채꼴의 넓이는 $18\ \text{cm}^2$이다.

발전

01 답 ①

α, β의 두 동경이

ㄱ. 일치 $\Leftrightarrow$ $\alpha - \beta = 360^\circ \times n$

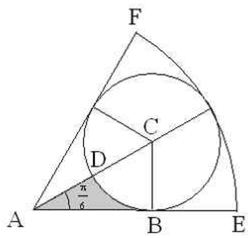
ㄴ. x축에 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta = 360^\circ \times n$

ㄷ. y축에 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta = 360^\circ \times n + 180^\circ$

ㄹ. 원점에 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha - \beta = 360^\circ \times n + 180^\circ$

이므로 옳은 것은 ㄴ와 ㄹ이다.

02 답 16



부채꼴 AEF의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 2r$, $\overline{AB} = \sqrt{3}r$이고

$2r + r = 3r = 6$에서 $r = 2$

위의 그림에서 어두운 부분의 넓이는

(삼각형 ABC의 넓이)−(부채꼴 BCD의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$

따라서 구하는 어두운 부분의 넓이는

$12\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = 24\sqrt{3} - 8\pi$

$\therefore p + q = 24 - 8 = 16$

Ⅱ-1. 삼각함수

02 삼각함수

기본

01 답 해설 참조

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

02 답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

03 답 제2사분면의 각

04 답 $\sin\theta=-\frac{15}{17}$, $\tan\theta=\frac{15}{8}$

표준

01 답 (1) $\overline{DF}$ (2) $\overline{OD}$ (3) $\overline{CG}$

02 답 (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\frac{11}{16}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, 즉 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

03 답 $\frac{91}{2}$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

즉, $\cos^2 0^\circ+\cos^2 90^\circ=1$,

$\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ=1$, $\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ=1$,

$\cdots$이므로

$\cos^2 0^\circ+\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 45^\circ$

$+\cdots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=1+1+1+\cdots+1+\cos^2 45^\circ=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$

04 답 0

발전

01 답 ⑤

$x=\sin\theta+3\cos\theta$, $y=3\sin\theta-\cos\theta$의 양변을 각각 제곱하면

$x^2=\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+9\cos^2\theta$

$y^2=9\sin^2\theta-6\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

변끼리 더하면

$x^2+y^2=10(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=10$

따라서 점 (x, y)가 그리는 자취는 중심이 원점, 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 길이는

$2\pi\cdot\sqrt{10}=2\sqrt{10}\pi$

02 답 ②

$\triangle ABP\equiv\triangle BCQ$이므로 $\triangle ABR=\square PCQR$

$\therefore \triangle BRP : \triangle ABP=1:9$

한편, $\theta+\angle BPR=90^\circ$에서 $\angle PRB=90^\circ$이므로

$\triangle BRP\sim\triangle ABP$

$\overline{BP}:\overline{RP}=3:1$, $\frac{\overline{RP}}{\overline{BP}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{3}$ $\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

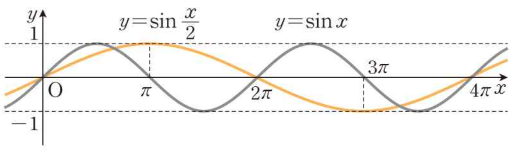
Ⅱ-1. 삼각함수

03 삼각함수의 그래프

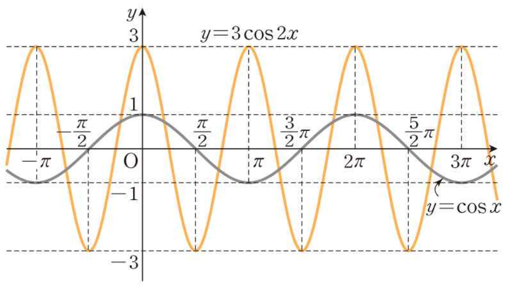
기본

01 답 해설 참조

(1) 주기 4π



(2) 주기 π



02 답 (1) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

(2) $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

(3) $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

(4) $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

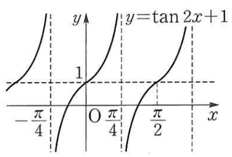
03 답 (1) $0\le x<\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi<x<2\pi$

(2) $\dfrac{3}{4}\pi\le x\le\dfrac{5}{4}\pi$

(3) $\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi\le x<\dfrac{3}{2}\pi$

04 답 해설 참조

$y=\tan 2x+1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$배한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{n}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4}$($n$은 정수)이다.

표준

01 답 ①

02 답 $\dfrac{5}{2}\pi$

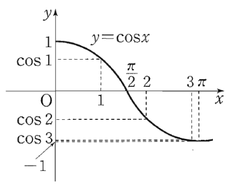
03 답 ③

$\pi\fallingdotseq 3.14$이므로

$1<\dfrac{\pi}{2}<2<3<\pi$

따라서 오른쪽 그래프에서

$\cos 3<\cos 2<\cos 1$

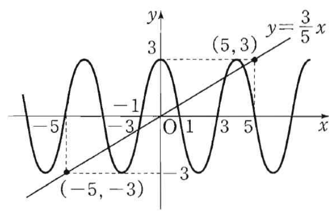


04 답 ①

발전

01 답 5개

$y=3\cos\dfrac{\pi}{2}x$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고 최댓값과 최솟값이 각각 3, -3이므로 그래프는 오른쪽과 같다.



직선 $y=\dfrac{3}{5}x$는 두 점 $(5,\ 3)$, $(-5,\ -3)$을 지나므로 위의 그림에서 교점의 개수는 5개다.

02 답 0

$y=\sin\dfrac{1}{2}x$의 그래프는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

$b=2\pi-a,\ c=2\pi+a,\ d=4\pi-a,$

$e=4\pi+a,\ f=6\pi-a$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f=18\pi$

$\tan(a+b+c+d+e+f)=\tan 18\pi=0$

Ⅱ-1. 삼각함수

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 ②
06 ⑤	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 ③
11 ①	12 $\frac{1}{3}\pi$	13 ④	14 ④	
15 ②	16 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$	17 1	18 $-\frac{5}{2}$	
19 0	20 $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5}{4}\pi$		21 2	
22 $-\sqrt{2}$	23 4π	24 $\frac{9}{4}$		

01 부채꼴의 호의 길이를 l, 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라고 하면

$l+2r=12$ ⋯⋯ ㉠

$l=r\theta=r\cdot 1=r$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3r=12$이므로 $r=4$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 4^2\times 1=8$

02 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{y}{\overline{OP}}=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{x}{\overline{OP}}=-\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$

03 θ가 제2사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수)라 하면

$\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{3}$

(ⅰ) $n=3k$ (k는 정수)라 하면

$2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{3}$이므로 제1사분면의 각이다.

(ⅱ) $n=3k+1$ (k는 정수)라 하면

$2k\pi+\frac{5}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

(ⅲ) $n=3k+2$ (k는 정수)라 하면

$2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{5}{3}\pi$이므로 제4사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\frac{\theta}{3}$가 나타내지 않는 사분면은 제3사분면이다.

04 점 P의 좌표를 $(3, -1)$이라고 하면

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{10}$

05 $\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$

$\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$ 이므로

$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 70^\circ$

$=\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 20^\circ$

$=(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)$

$+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)=2$

06 $f(x)=4\tan 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1$

① 주기는 $\frac{\pi}{2}$

② $y=f(x)$의 그래프는 $y=4\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

③ $x\ne\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합에서만 정의된다.

④ 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (n정수)

07 t초 동안의 움직인 각의 크기를 θ라고 하면

$t:\theta=2:2\pi$이므로 $\theta=\pi t$

따라서 t초 후의 점 P의 좌표는

$(\cos\pi t, \sin\pi t)$

08 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

따라서 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(\pi+\theta)$

$+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(\pi-\theta)$

$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta=-1$

09 ㄱ. $f_1(x)=\sin(\sin x)$라 하면

$f_1(-x)=\sin(\sin(-x))=\sin(-\sin x)$

$=-\sin(\sin x)=-f_1(x)$

ㄴ. $f_2(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$라 하면

$f_2(-x)=-\sin(-x)=\sin x=-f_2(x)$

ㄷ. $f_3(x)=2\tan(\pi+x)=2\tan x$라 하면

$f_3(-x)=2\tan(-x)=-2\tan x=-f_3(x)$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 점 A의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면 $\cos\theta=x$

이때 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-x$이고, 점 C의 좌표가 $(-x,\ -y)$이므로 $\cos(\pi-\theta)$는 점 C의 x좌표와 같다.

11 ㄱ. $y=\cos|x|=\cos x$

$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

이므로 두 그래프는 일치한다.

ㄴ. $y=\sin|x|=\begin{cases}\sin x & (x\ge 0)\\ -\sin x & (x<0)\end{cases}$

$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x & (\sin x\ge 0)\\ -\sin x & (\sin x<0)\end{cases}$

이므로 두 그래프는 일치하지 않는다.

ㄷ. $y=|\cos x|=\begin{cases}\cos x & (\cos x\ge 0)\\ -\cos x & (\cos x<0)\end{cases}$

이므로 두 그래프는 일치하지 않는다.

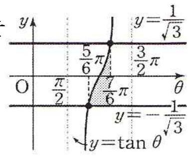
따라서 서로 일치하는 것은 ㄱ뿐이다.

12 문제 이해 x에 대한 방정식

$x^2-2x+9\tan^2\theta-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-9\tan^2\theta+2>0$ ▸ 3점

해결 과정 $\tan^2\theta<\dfrac{1}{3}$ $\therefore$ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는



$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{7}{6}\pi$

▸ 3점

답 구하기 $\therefore$ $\dfrac{7}{6}\pi-\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{3}\pi$ ▸ 2점

13 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 따라서 $f(p)=f(0)$

$f(p)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

14 $\sin(-x)=-\sin x$이므로 $f(-x)=-f(x)$

$\cos(-x)=\cos x$이므로 $g(-x)=g(x)$

ㄱ. $f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$

이므로 $y=f(f(x))$는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $f(g(-x))=f(g(x))$

이므로 $y=f(g(x))$는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $g(g(-x))=g(g(x))$

이므로 $y=g(g(x))$는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 y축에 대하여 대칭인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 주어진 함수의 그래프의 최댓값과 최솟값은 각각 4, -4이고 $a>0$이므로 $a=4$

주기는 $\dfrac{7}{8}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore$ $b=2$

또한, $x=\dfrac{-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3}{8}\pi}{2}=\dfrac{\pi}{8}$일 때 $y=4$이므로

$4\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{8}-c\right)=4$,

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-c\right)=\cos\left(c-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{4}<c-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$

이므로 $c-\dfrac{\pi}{4}=0$ $\therefore$ $c=\dfrac{\pi}{4}$

세 상수 a, b, c의 곱 $abc=4\times2\times\frac{\pi}{4}=2\pi$

16 $\pi\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$이므로 $\tan\theta>0$

$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$이므로

$\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}-1=8$

$\cot\theta>0$이므로 $\cot\theta=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이고

$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$\tan\theta+\cot\theta=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

17 $y=\sin2x$의 주기를 T라고 하면 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

주어진 그래프에서 $y=2\sin ax$의 주기는

$y=\sin2x$의 주기의 2배이므로

$\frac{2\pi}{a}=2T=2\pi$에서 $a=1$

18 주어진 함수의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

또 함수 $f(x)=a\tan\frac{1}{2}x+2$가 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$을 만

족시키므로 $a\tan\frac{\pi}{4}+2=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore a-b=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

19 $|\sin x|=\begin{cases}\sin x & (0\le x\le\pi)\\ -\sin x & (\pi<x\le2\pi)\end{cases}$

(ⅰ) $0\le x\le\pi$일 때

$\sin x+|\sin x|=2\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

(ⅱ) $\pi<x\le2\pi$ 일 때

$\sin x+|\sin x|=\sin x-\sin x=0\ne1$

따라서 근이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$\left(\text{또는 } \alpha=\frac{5}{6}\pi,\ \beta=\frac{\pi}{6}\right)$

이므로 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

20 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$

주어진 부등식의 해는 $y=\sin x$의 그래프가

$y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의

범위이므로 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$

21 문제 이해 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하고 넓이가 일정하므로 a라 하면

$\frac{1}{2}rl=a$, $rl=2a$ ▸ 3점

해결 과정 이때 $r>0$, $l>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 부채꼴의 둘레의 길이

$2r+l$은 $2r+l\ge2\sqrt{2rl}=4\sqrt{a}$ (단, 등호는 $2r=l$일 때 성립) ▸ 3점

답 구하기 따라서 둘레의 길이가 최소일 조건은

$2r=l$이므로 $\theta=\frac{l}{r}=2$ ▸ 2점

22 $a>0$이므로 $-a\le a\sin b(x-1)\le a$

이때 그래프에서 $-2\le a\sin b(x-1)\le2$

이므로 $a=2$

주어진 그래프에서 주기는 $2(5-1)=8$이므로

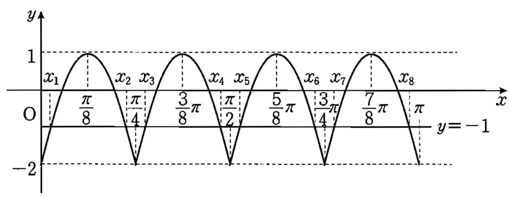
$\frac{2\pi}{b}=8$에서 $b=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=2\sin\frac{\pi}{4}(x-1)$이므로

$f(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}$

$=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

23 해결 과정 함수 $f(x)=|3\sin4x|-2$의 그래프는 다음과 같다.



이때 두 함수 $y=f(x)$와 $y=-1$이 만나는

교점의 x좌표 중에서 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_8이라 하면 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{8},\ \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{3}{8}\pi,$$

$$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{5}{8}\pi,\ \frac{x_7+x_8}{2}=\frac{7}{8}\pi$$ ▸ 4점

답 구하기 $\therefore\ x_1+x_2+\ \cdots\ +x_8$

$$=2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{8}\pi+\frac{5}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi\right)=4\pi$$ ▸ 4점

24 문제 이해 $\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)=\cos^2 x$,

$\cos(4\pi-x)=\cos x$,

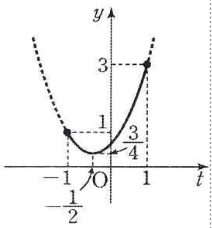
▸ 3점

해결 과정 $y=\cos^2 x+\cos x+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

▸ 3점



답 구하기 따라서 $t=1$일 때

최댓값은 3, $t=-\frac{1}{2}$일 때

최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

즉 $M=3$, $m=\frac{3}{4}$이므로

$Mm=\frac{9}{4}$ ▸ 2점

Ⅱ-2. 삼각함수의 활용

01 사인법칙

기본

01 답 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

02 답 60° 또는 120°

03 답 1

04 답 24

$\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \dfrac{1}{2}=24$

표준

01 답 6

$C=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$이므로 사인법칙

에 의하여 $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}\times\sin 30^\circ=\dfrac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=6$

2 답 3 : 5 : 7

$a-2b=-c$, $3a+b=2c$에서 두 식을 연립하면

$a=\dfrac{3}{7}c$, $b=\dfrac{5}{7}c$

$\therefore\ \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$=\dfrac{3}{7}c : \dfrac{5}{7}c : c = 3 : 5 : 7$

03 답 ④

($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$ABD의 넓이)+($\triangle$ACD의 넓이) …… ㉠

이고 $\angle BAD=\angle CAD=30^\circ$이다.

($\triangle$ABC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \sin 60^\circ=24\sqrt{3}$

$\overline{AD}=x$하면 $\angle BAD=\angle CAD=30^\circ$이므로

($\triangle$ABD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot \sin 30^\circ=2x$

($\triangle$ACD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot x\cdot \sin 30^\circ=3x$

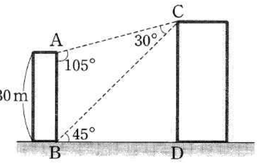
이므로 ㉠에 의해 $24\sqrt{3}=2x+3x$에서

$5x=24\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$

04 답 ④

발전

01 답 ④



$\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ}=\dfrac{30}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ \overline{BC}=\dfrac{30\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=60\cos 15^\circ$

$(\because\ \sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ)$

$=60\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=15(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\triangle$CBD에서

$\overline{CD}=\overline{BC}\sin 45^\circ$

$=15(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=15(\sqrt{3}+1)(\text{m})$

02 답 ②

$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$ 에서

$\angle A+\angle B=\pi-\angle C$, $\angle A+\angle C=\pi-\angle B$

$c\sin(A+B)=b\sin(A+C)$에 대입하면

$c\sin(\pi-C)=b\sin(\pi-B)$

$c\sin C=b\sin B$ …… ㉠

사인법칙에 의해

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$c\cdot\dfrac{c}{2R}=b\cdot\dfrac{b}{2R}$, $b^2=c^2$

$\therefore\ b=c\ (\because\ b>0,\ c>0)$

따라서 구하는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

Ⅱ-2. 삼각함수의 활용

02 코사인법칙

기본

01 답 3

02 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

03 답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

04 답 $b=c$인 이등변삼각형

표준

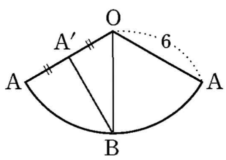
01 답 ①

02 답 ③

03 답 $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

04 답 $3\sqrt{3}$

옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



부채꼴의 호의 길이는 4π이므로

$\angle \mathrm{AOA'} : 2\pi = 4\pi : 12\pi$에서 $\angle \mathrm{AOA'} = \dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore\ \angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

이때 점 P가 움직인 최단 거리는 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B}}^2 = 3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos\dfrac{\pi}{3}=27$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B}}=3\sqrt{3}$

발전

01 답 ④

$2c\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$

$=a\cos\left(\dfrac{C-A-B}{2}\right)$에서

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\sin A$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$이고

$C=\pi-A-B$이므로 주어진 식에 대입하면

$2c\times\sin A\times\cos B$

$=c\cos\left(\dfrac{\pi-2(A+B)}{2}\right)$

$=c\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(A+B)\right)=c\sin(A+B)$

$=c\sin(\pi-C)=c\sin C$

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이고

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

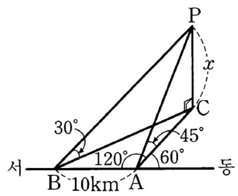
$2c\times\dfrac{a}{2R}\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\dfrac{c}{2R}$

$\therefore\ a^2+c^2-b^2=c^2$

$\therefore\ a^2=b^2 \qquad \therefore\ a=b\ (\because a,\ b>0)$

따라서 $a=b$인 이등변삼각형이다.

02 답 1분



$\overline{\mathrm{PC}}=x$라 하면

$\tan 45^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{x}{\overline{\mathrm{AC}}}=1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=x$

$\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{x}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}x$

$\triangle\mathrm{ACB}$에서 $\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$이므로 코사인법칙에 따라

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cos(\angle\mathrm{BAC})$

$3x^2=10^2+x^2-2\cdot10\cdot x\cdot\cos120^\circ$

$3x^2=100+x^2+10x$

$x^2-5x-50=0$, $(x-10)(x+5)=0$

$\therefore\ x=10\ (\because\ x>0)$

따라서 지면으로부터 물체가 있는 P지점까지의 높이는 10 km이다.

$\therefore$ 시간 $=\dfrac{\text{거리}}{\text{속력}}=\dfrac{10}{600}=\dfrac{1}{60}$시간, 즉 1분이다.

Ⅱ-2. 삼각함수의 활용

01 ④	**02** $3\sqrt{2}$	**03** $\frac{\sqrt{39}}{3}$	**04** ①
05 ③	**06** ③	**07** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$	**08** $\sqrt{10}$
09 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	**10** ④	**11** ②	**12** ⑤
13 $120\sqrt{3}$	**14** $45°$	**15** $120°$	
16 $2:1:4$		**17** 57	
18 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	**19** ②	**20** $108+36\sqrt{3}$	
21 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		**22** $\frac{25\sqrt{2}}{3}$	
23 $\frac{12}{11}$	**24** 3		

01 사인법칙에서 $\frac{b}{\sin B}=2R$이므로

$\frac{10}{\sin 30^o}=2R$ 에서

$2R\sin 30^o=10,\ 2R\times\frac{1}{2}=10 \qquad \therefore\ R=10$

02 $A+B+C=180°$ 이므로

$C=180°-(105°+30°)=45°$

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 30°}=\frac{6}{\sin 45°}$ 이므로

$b\sin 45°=6\sin 30°$

$\frac{\sqrt{2}}{2}b=6\cdot\frac{1}{2} \qquad \therefore\ b=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

03 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60°=13$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{13}$

△ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60°}=2R \qquad \therefore\ R=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

04 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{1}{2}$

05 $\angle ACB=180°-\angle ACD=135°$

△ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{AC}}{\sin 30°}=\frac{18\sqrt{2}}{\sin 135°}$

$\therefore\ \overline{AC}=\frac{18\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 135°}=\frac{18\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=18$

06 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:\sqrt{5}:1$

$a=2k,\ b=\sqrt{5}k,\ c=k(k>0)$라고 하면

$\frac{a^2+b^2+3c^2}{2ac}=\frac{(2k)^2+(\sqrt{5}k)^2+3k^2}{2\cdot 2k\cdot k}$

$=\frac{4k^2+5k^2+3k^2}{4k^2}=\frac{12k^2}{4k^2}=3$

07 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b$라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},$

$\sqrt{3}\sin A=\sin B$에서 $\sqrt{3}a=b$ …… ㉠

$\angle C=90°$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+(\sqrt{3}a)^2=10^2,\ 4a^2=100,\ a^2=25$

$\therefore\ a=5,\ b=5\sqrt{3}$ ($\because$ ㉠)

따라서 △ABC의 넓이는

$\therefore\ \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

08 $\overline{CD}=1$이므로 $\overline{BD}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\angle A=45°$이므로 △ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45°}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10} \quad \therefore\ R=\sqrt{10}$

09 $\square ABCD=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 120°$

$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$

이것을 주어진 식 $\dfrac{\sin A}{b}=\dfrac{\sin B}{a}$,

$a\sin A=b\sin B$에 대입하면

$a\cdot\dfrac{a}{2R}=b\cdot\dfrac{b}{2R}$, $a^2=b^2$

$\therefore\ a=b$ ($\because\ a>0,\ b>0$)

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

11 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ······ ㉠

$a^2=b^2-bc+c^2$을 ㉠에 대입하면

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-b^2+bc-c^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ A=60^\circ$ ($\because\ 0^\circ<A<180^\circ$)

$\therefore \sin A=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12 $(a+b):(b+c):(c+a)=5:7:6$에서 양수 k에 대하여

$a+b=5k$ ······ ㉠

$b+c=7k$ ······ ㉡

$c+a=6k$ ······ ㉢

라고 하면 ㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=18k$ $\therefore\ a+b+c=9k$······ ㉣

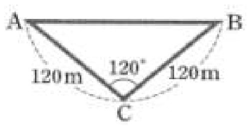
㉣$-$㉡에서 $a=2k$, ㉣$-$㉢에서 $b=3k$

㉣$-$㉠에서 $c=4k$

따라서 코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$\cos A=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 4k}=\dfrac{7}{8}$

13 주어진 그림을 간단히 나타내면 그림과 같다.



이때, 두 지점 A, B사이의 거리는 그림의 $\overline{AB}$ 의 길이이므로

$\triangle$ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos C$

$=120^2+120^2-2\times120\times120\times\cos120^\circ$

$=120^2+120^2-2\times120^2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\times120^2$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{3\times120^2}=120\sqrt{3}$ ($\because\ \overline{AB}>0$)

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $120\sqrt{3}$

14 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$12=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot8\cdot\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

θ는 예각이므로 $\theta=45^\circ$

15 길이가 가장 긴 변의 대각이 최대각이므로 최대각의 크기를 θ라 하면 코사인의 법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=120^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<180^\circ$)

16 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{5}=\dfrac{c+a}{6}=k$ $(k>0)$라 하면

$a+b=3k,\ b+c=5k,\ c+a=6k$ ······ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=14k$ $\therefore\ a+b+c=7k$······ ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=2k,\ b=k,\ c=4k$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C$

$=a:b:c=2k:k:4k=2:1:4$

17 문제 이해 세 원 A, B, C 의 반지름의 길이가 각각 $r_1,\ r_2,\ r_3$이라 하면

$r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{2}:2\sqrt{2}$

$r_1=k,\ r_2=\sqrt{2}k,\ r_3=2\sqrt{2}k$ $(k>0)$라면

$\overline{AB}=r_1+r_2=(1+\sqrt{2})k$

$\overline{BC}=r_2+r_3=3\sqrt{2}k$

$\overline{CA}=r_3+r_1=(2\sqrt{2}+1)k$ ▸ 3점

해결 과정 코사인법칙에 의하여

$\cos A$

$=\dfrac{\{(1+\sqrt{2})k\}^2+\{(2\sqrt{2}+1)k\}^2-(3\sqrt{2}k)^2}{2\cdot(1+\sqrt{2})k\cdot(2\sqrt{2}+1)k}$

$=\dfrac{-6+6\sqrt{2}}{2(5+3\sqrt{2})}=\dfrac{-33+24\sqrt{2}}{7}$ ▸ 3점

답 구하기 $b-a=24-(-33)=57$ ▸ 2점

18 $\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{12}{6\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\sin^2A+\cos^2A=1$에서

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 = 1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

$$\therefore\ \sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}\ (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

19 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+b \geq 2\sqrt{ab},\ 20 \geq 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab} \leq 10$

$\therefore ab \leq 100$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 1 = 50$

20 중심각의 크기는 각각

$2\pi\times\frac{3}{12}=\frac{\pi}{2},\quad 2\pi\times\frac{4}{12}=\frac{2}{3}\pi,$

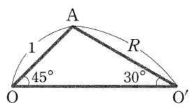
$2\pi\times\frac{5}{12}=\frac{5}{6}\pi$

따라서 삼각형 ABC의 넓이

$$S=\frac{1}{2}\times12\times12\times\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times12\times12\times\sin\frac{2}{3}\pi +\frac{1}{2}\times12\times12\times\sin\frac{5}{6}\pi$$

$$=72+36\sqrt{3}+36=108+36\sqrt{3}$$

21 문제 이해 $\angle AOO'=45^\circ,\ \angle AO'O=30^\circ$이므로 $\triangle AOO'$에 사인법칙에 적용하면 $\frac{1}{\sin30^\circ}=\frac{R}{\sin45^\circ}$ ∴



$R=\frac{\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=\sqrt{2}$ ▸ 3점

해결 과정 사각형 $AOBO' = \triangle OAB + \triangle O'AB$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin60^\circ$ ▸ 3점

답 구하기 $=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ▸ 2점

22 문제 이해 $\triangle ABQ$에서

$\angle A+\angle B+\angle Q=180^\circ$이므로

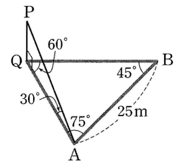
$\angle Q = 180-(\angle A+\angle B)$

$=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

$\triangle PQA$에서 $\angle PQA=90^\circ$이므로

$\angle QPA=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$ ▸ 2점

해결 과정 따라서 $\triangle ABQ$에서 사인법칙에 의하여



$\frac{25}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{AQ}}{\sin45^\circ}$

$25\times\sin45^\circ=\overline{AQ}\sin60^\circ$

$25\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{AQ}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{AQ}=25\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{6}}{3}$ ▸ 2점

이때 $\triangle PQA$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AQ}}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{PQ}}{\sin30^\circ}$

$\overline{PQ}\sin60^\circ=\overline{AQ}\sin30^\circ$

$\overline{PQ}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{AQ}\times\frac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{1}{2}\times\frac{25\sqrt{6}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{2}}{3}(\mathrm{m})$

▸ 2점

답 구하기 기둥의 높이는 $\frac{25\sqrt{2}}{3}$ m이다. ▸ 2점

23 문제 이해 삼각형 PAC의 넓이는 삼각형 PAB의 넓이의 합과 같으므로

해결 과정 $\frac{1}{2}\cdot4\cdot a\cdot\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot a\cdot\sin30^\circ$

▸ 3점

$\sqrt{3}a=2+\frac{a}{2},\quad 2\sqrt{3}a=4+a,$

$(2\sqrt{3}-1)a=4$

$\therefore a=\frac{4}{2\sqrt{3}-1}=\frac{4(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{8\sqrt{3}+4}{11}$ ▸ 3점

답 구하기 $p=\frac{8}{11},\ q=\frac{4}{11}$이므로 $p+q=\frac{12}{11}$

▸ 2점

24 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,$

$\overline{AB}=c$라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R라

하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이때 $a+b+c=24$, $R=4$ 이므로

$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{24}{2\cdot 4}=3$$

Ⅱ 삼각함수

01 4 **02** ④ **03** 제2, 3, 4사분면
04 ③ **05** ③ **06** ③ **07** ② **08** ②
09 $\frac{11}{16}$ **10** ⑤ **11** ① **12** ⑤ **13** ④
14 ③ **15** ④ **16** ② **17** ④ **18** ②
19 5 개 **20** 1 **21** 8 **22** $\frac{400\sqrt{91}}{91}$
23 -3 **24** 0 **25** $\frac{161\sqrt{3}}{4}$

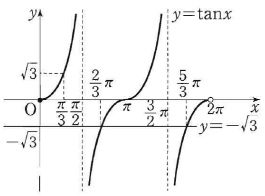
10 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ 에서

$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$,

$\tan x=-\sqrt{3}$

방정식

$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$ 의 해



는 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.
그래프의 주기성을 이용하면 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$ 의 교점의 x좌표는

$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 와 $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$ 이다.

$\therefore\ x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{7}{3}\pi=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

13 그래프에서 최댓값과 최솟값이 각각 3, -3 이므로 $a=3$, 주기는 $\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ b=4$

또, 주어진 그래프는 $y=3\sin 4x$의 그래프를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로 $y=3\sin 4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$

$\therefore\ c=\frac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore\ abc=3\times4\times\frac{2}{3}\pi=8\pi$

14 부등식 $x^2-2(2\cos\theta-1)x+4>0$ 이 항상 성립하려면
이차방정식 $x^2-2(2\cos\theta-1)x+4=0$에서

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta-1)^2-4<0$

$4\cos^2\theta-4\cos\theta-3<0$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-3)<0$

$2\cos\theta-3<0$ 이므로 $2\cos\theta+1>0$

$\therefore\ \cos\theta>-\frac{1}{2}$

$0\le\theta\le2\pi$ 이므로

$0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta\le2\pi$

따라서 θ 의 값이 될 수 없는 것은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

16 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
$2\sin B\cdot\cos C+\sin C=\sin A+\sin B$

$2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}$

$a^2+b^2-c^2+ac=a^2+ab$

$b^2-c^2+ac-ab=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$

$(b+c-a)(b-c)=0$

이때 $b+c>a$이므로 $b=c$
따라서 $\triangle ABC$는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

18 $-2\le\cos2x-1\le0$ 에서
$0\le|\cos2x-1|\le2$이므로
$0\le a|\cos2x-1|\le2a$ ($\because\ a>0$)
$\therefore\ b\le a|\cos2x-1|+b\le2a+b$
이때 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로
$b=-2,\ 2a+b=6$
$\therefore\ a=4$ $\quad\therefore\ ab=-8$

20 해결 과정 (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\sin^2\theta-2\right)-\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+\tan^2\theta-2\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos^2\theta-2\right)$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta\right)-2$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)-2$$

▸ 4점

답 구하기

$=1+1+1-2=1$ ▸ 2점

21

문제 이해 $\sin(x+\pi)=-\sin x$,

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$이므로 ▸ 2점

해결 과정 $f(x)=2\sin(x+\pi)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$=-2\sin x-\cos^2 x=-2\sin x-(1-\sin^2 x)$

$=\sin^2 x-2\sin x-1$

$\sin x=t$ $(-1\le t\le 1)$로 놓으면

$g(t)=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$ ▸ 2점

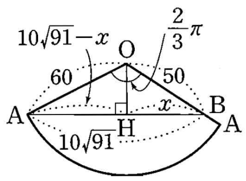
답 구하기 $M=g(-1)=2$, $m=g(1)=-2$

$\therefore$ $M^2+m^2=2^2+(-2)^2=8$ ▸ 2점

22

문제 이해 $l=r\theta$이므로

오른쪽 그림에서



$\theta=\frac{l}{r}=\frac{40\pi}{60}=\frac{2}{3}\pi$

▸ 2점

해결 과정 따라서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=60^2+50^2-2\times60\times50\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=9100$ $\quad\therefore$ $\overline{AB}=10\sqrt{91}$ ▸ 2점

점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HB}$가 내리막길이므로 $\overline{HB}=x$로 놓으면

답 구하기 $\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2=\overline{OB}^2-\overline{HB}^2$

에서 $60^2-(10\sqrt{91}-x)^2=50^2-x^2$ ▸ 2점

$\therefore$ $x=\frac{400}{\sqrt{91}}=\frac{400\sqrt{91}}{91}$ ▸ 2점

23

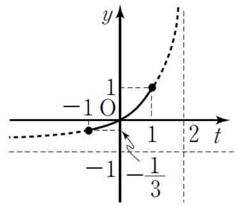
문제 이해 $\cos x=t$로 치환하면

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\quad -1\le t\le1$

▸ 2점

해결 과정 $y=\frac{t}{-t+2}=-\frac{2}{t-2}-1$ ▸ 2점

$-1\le t\le1$에서 이 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 구하기 $t=1$일 때 최댓값은 $M=1$

$t=-1$일 때 최솟값은

$m=-\frac{1}{3}$

$9Mm=9\times1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$ ▸ 2점

24

문제 이해 $f(x)=\sin 2kx$는 주기가 $\frac{2\pi}{2k}=\frac{\pi}{k}$인

함수이다. ▸ 2점

해결 과정 따라서

$\beta=\frac{\pi}{2k}-\alpha$, $\gamma=\frac{\pi}{2k}+\alpha$, $\delta=\frac{\pi}{k}-\alpha$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{4\pi}{2k}=\frac{2\pi}{k}$ ▸ 2점

답 구하기

$\therefore$ $f\left(\frac{2\pi}{k}\right)=\sin\left(2k\times\frac{2\pi}{k}\right)=\sin4\pi=0$

▸ 2점

25

문제 이해 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\therefore$ $\angle A=180^\circ-\angle C=120^\circ$ ▸ 2점

해결 과정 $\overline{BD}$를 긋고 $\triangle BCD$, $\triangle ABD$에서 제이코사인법칙을 적용하면

$\overline{BD}^2=7^2+15^2-2\cdot7\cdot15\cdot\cos60^\circ=169$

$\overline{BD}^2=7^2+\overline{AD}^2-2\cdot7\cdot\overline{AD}\cos120^\circ$

$=\overline{AD}^2+7\overline{AD}+49$

에서 $169=\overline{AD}^2+7\overline{AD}+49$

$\overline{AD}^2+7\overline{AD}-120=0$

$(\overline{AD}+15)(\overline{AD}-8)=0$

$\therefore$ $\overline{AD}=8$ $(\because\ \overline{AD}>0)$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore$ ($\square$ABCD의 넓이)

$=$($\triangle$BCD의 넓이)$+$($\triangle$ABD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot15\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\sin120^\circ$

$=\frac{105\sqrt{3}}{4}+\frac{56\sqrt{3}}{4}=\frac{161\sqrt{3}}{4}$ ▸ 2점

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

01 수열

기본

01 답 (1) 49 (2) 1

02 답 (1) 81 (2) 14

(1) $a_n = 3^{n-1}$ 에서 $a_5 = 3^{5-1} = 3^4 = 81$

(2) $a_n = 3n-1$에서 $a_5 = 3\times5-1 = 14$

03 답 (1) $a_n = n(n+1)$ (2) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

(3) $a_n = (-1)^n$

(1) $a_1 = 1\cdot2 = 1\cdot(1+1)$, $a_2 = 2\cdot3 = 2\cdot(2+1)$,

$a_3 = 3\cdot4 = 3\cdot(3+1)$, $\cdots, a_n = n(n+1)$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$, $a_2 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{2+1}$,

$a_3 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{3+1}$, $\cdots, a_n = \dfrac{n}{n+1}$

(3) $a_1 = -1 = (-1)^1$, $a_2 = -1 = (-1)^2$,

$a_3 = -1 = (-1)^3$, $a_4 = 1 = (-1)^4$,

$a_5 = -1 = (-1)^5$, $\cdots, a_n = (-1)^n$

04 답 $\dfrac{7}{30}$

수열 $a_1 = \dfrac{3}{1\cdot2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{2\cdot3}$,

$a_4 = \dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{4\cdot5}$, $\cdots$을 $\{a_n\}$이라 하고,

각 항에서 규칙을 찾아보면

$a_1 = \dfrac{3}{1\cdot2} = \dfrac{1+2}{1\cdot(1+1)}$, $a_2 = \dfrac{4}{2\cdot3} = \dfrac{2+2}{2\cdot(2+1)}$

$a_3 = \dfrac{5}{3\cdot4} = \dfrac{3+2}{3\cdot(3+1)}$, $a_4 = \dfrac{6}{4\cdot5} = \dfrac{4+2}{4\cdot(4+1)}$,

$\cdots$ 따라서 수열의 일반항 a_n은

$a_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ $\quad\therefore a_5 = \dfrac{5+2}{5(5+1)} = \dfrac{7}{30}$

표준

01 답 5

$a_{n+1} = a_n + 2n$에서 $a_1 = 1$이므로

$a_2 = a_1 + 2 = 1+2 = 3$

$a_3 = a_2 + 4 = 3+4 = 7$

$a_4 = a_3 + 6 = 7+6 = 13$

$a_5 = a_4 + 8 = 13+8 = 21$

$a_6 = a_5 + 10 = 21+10 = 31$ $\quad\therefore n = 5$

02 답 $a_n = n\cdot(n^2+1)$

수열 $a_1 = 1\cdot2 = 1(1^2+1)$, $a_2 = 2\cdot(2^2+1)$,

$a_3 = 3\cdot(3^2+1)$, $\cdots, a_n = n\cdot(n^2+1)$

03 답 16

자연수 중에서 2의 배수와 3의 배수를 크기순으로 나열하여 적당히 묶으면

(2, 3, 4, 6), (8, 9, 10, 12),

(14, 15, 16, 18), $\cdots$ 이때, $a_{11} = 16$이다.

04 답 2

$a_{13} = a_{9+4} = a_9$, $a_9 = a_{5+4} = a_5$,

$a_5 = a_{1+4} = a_1$,

$a_n = \dfrac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 2n$에서

$\therefore a_{13} = a_1 = 2$

발전

01 답 $a_n = \dfrac{1}{9}(10^{n+1}-1)$

수열 $11, 111, 1111, 11111, \cdots$을 $\{a_n\}$이라 하고, 각 항에서 규칙을 찾아보면

$a_1 = 11 = \dfrac{1}{9}\cdot99 = \dfrac{1}{9}(100-1) = \dfrac{1}{9}(10^2-1)$

$a_2 = 111 = \dfrac{1}{9}\cdot999 = \dfrac{1}{9}(1000-1) = \dfrac{1}{9}(10^3-1)$

$a_3 = 1111 = \dfrac{1}{9}\cdot9999 = \dfrac{1}{9}(10000-1)$

$= \dfrac{1}{9}(10^4-1)$

$a_4 = 11111 = \dfrac{1}{9}\cdot99999 = \dfrac{1}{9}(100000-1)$

$= \dfrac{1}{9}(10^5-1)$

$\vdots$

따라서 수열의 일반항 a_n은

$a_n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$

02 답 (15, 225)

점 P_n은 곡선 $y = x^2$위를 움직이므로

(a_n, a_n^2),

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기가 $4n$이므로

$\frac{{a_{n+1}}^2 - {a_n}^2}{a_{n+1} - a_n} = a_{n+1} + a_n = 4n$

$a_{n+1} = 4n - a_n$

$a_1 = 1$이므로

$a_2 = 4\times1 - a_1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = 4\times2 - a_2 = 8 - 3 = 5$

$a_4 = 4\times3 - a_3 = 12 - 5 = 7$

$a_5 = 4\times4 - a_4 = 16 - 7 = 9$

$a_6 = 4\times5 - a_5 = 20 - 9 = 11$

$a_7 = 4\times6 - a_6 = 24 - 11 = 13$

$a_8 = 4\times7 - a_7 = 28 - 13 = 15$

$\therefore \mathrm{P}_8(15, 15^2) = (15, 225)$

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

02 등차수열

기본

01 답 (1) 18　(2) 16

(1) 공차: 6, $\square = 18$

(2) 공차: -4, $\square = 16$

02 답 (1) $a_n = 5n-2$,　(2) $a_n = -3n+5$

(3) $a_n = 6n-5$,　(4) $a_n = -2n+1$

03 답 21

b는 1과 13의 등차중항이므로

$2b = a+c = 14$　　$\therefore\ b = 7$

$\therefore\ a+b+c = 14+7 = 21$

04 답 (1) 370　(2) -132

표준

01 답 22

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = 10$에서

$a+2d = 10$　　…… ㉠

또, $a_2 + a_5 = 24$에서 $(a+d)+(a+4d) = 24$

$2a+5d = 24$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2$, $d = 4$

$\therefore\ a_6 = 22$

02 답 ②

4와 16 사이의 원의 반지름을 r_1, r_2, $\cdots$, r_{11}이라 하면 4, r_1, r_2, $\cdots$, r_{11}, 16은 등차수열이다. 모든 동심원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi(4+r_1+r_2+\cdots+r_{11}+16)$

$= 2\pi\cdot\dfrac{13(4+16)}{2} = 260\pi$

03 답 첫째항: 1, 공차: 2

첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_4 = 16$, $S_9 = 81$이므로

$S_4 = \dfrac{4(2a+3d)}{2} = 16$　　…… ㉠

$S_9 = \dfrac{9(2a+8d)}{2} = 81$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $2a+3d = 8$, $a+4d = 9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 1$, $d = 2$

따라서 등차수열의 첫째항은 1, 공차는 2이다.

04 답 18

$\overline{AD} = a-d$, $\overline{CD} = a$, $\overline{AB} = a+d$라 하면

$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$이므로

$(a+d)^2 = (a-d)(2a-d)$

$a^2 = 5ad$　　$\therefore\ a = 5d\ (\because\ a>0)$

이때 $\overline{AC} = 9d$, $\overline{BC} = 6\sqrt{5}$, $\overline{AB} = 6d$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$81d^2 = 36d^2 + 180$　　$\therefore\ d = 2\ (\because\ d>0)$

$\therefore\ \overline{AC} = 18$

발전

01 답 48

$\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{2n+1}{n+3}$

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$S_n = kn(2n+1)$, $T_n = kn(n+3)$ (k는 상수)

$S_1 = 3k = a_1 = 6$ 이므로 $k = 2$

$T_n = 2n(n+3)$, $b_1 = 8$

수열 $\{b_n\}$은 $b_1 = 8$, 공차 4인 등차수열이다.

$\therefore\ b_{11} = 48$

02 답 ③

$P_{20}(1+2+4+\cdots+20,\ 1-(3+5+\cdots+19)$

$P_{20}\left(1+\dfrac{10(2+20)}{2},\ 1-\dfrac{9(3+19)}{2}\right)$

$\therefore\ a+b = 13$

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

03 등비수열

기본

01 답 (1) $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ (2) $-\dfrac{1}{2}$

(3) 0.001 (4) -27, 1

02 답 (1) $a_1=54$, $r=9$ (2) $a_1=2$, $r=\dfrac{1}{4}$

03 답 (1) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

(2) $a_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$

04 답 (1) $\dfrac{2}{3}(4^5-1)$ (2) $\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

표준

01 답 6

02 답 10

03 답 ⑤

세 수 $a+3$, 3, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항에 의하여

$6=a+3+b$, $a+b=3$ ……㉠

세 수 $\dfrac{2}{b}$, 1, $\dfrac{2}{a+3}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항에 의하여

$1=\dfrac{4}{(a+3)b}$, $(a+3)b=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$), $b=3-\sqrt{5}$

$\therefore\ b-a=3-2\sqrt{5}$

04 답 $\sqrt{2}$

등비수열$\{a_n\}$의 첫째항을a, 공비를 r $(r>0)$ 첫째항부터 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=2$ …… ㉠

$S_{20}-S_{10}=64$이므로

$S_{20}=S_{10}+64=66$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=66$ …… ㉡

㉡÷㉠ 을 하면 $r^{10}+1=33$, $r^{10}=32$

$\therefore\ r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

발전

01 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a\cdot ar=ar^9$

$a>0$, $r>0$이므로 $a=r^8$ ……㉠

$a_1+a_9=20$에서 $a+ar^8=20$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a+a^2=20$, $a^2+a-20=0$

$(a+5)(a-4)=0$이므로

$a=4$ ($\because a>0$)

㉠에 $a=4$를 대입하면

$r^8=4$, $r^4=2$이므로

$r^{20}=(r^8)^2r^4=4^2\times 2=32$

따라서

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

$=\dfrac{a\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\cdot\dfrac{a\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r^2}\cdot\dfrac{a(1+r^{10})}{1+r^2}=\dfrac{a^2(1-r^{20})}{1-r^4}$

$=\dfrac{4^2(1-32)}{1-2}=16\times 31=496$

02 답 8.82 g

공기청정기에 n번 통과할 때 걸러지는 미세먼지의 양은 첫째항이 $10\times 0.3=3$(g), 남아있는 양 은 0.7g, 공비가 $1-0.3=0.7$인 등비수열이다. 따라서 미세먼지 10g이 포함된 공기가 공기청정 기를 연속하여 6번 통과할 때 걸러지는 미세먼 지의 양은 첫째항이 3g, 공비가 0.7인 등비수열 의 첫째항부터 제6 항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{3(1-0.7^6)}{1-0.7}=\dfrac{3(1-0.118)}{0.3}=8.82$(g)

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

01 ③	**02** ⑤	**03** ③	**04** ④	**05** 192
06 ②	**07** ④	**08** ②	**09** ②	**10** ④
11 13	**12** 2	**13** ③	**14** 16	**15** ①
16 83	**17** 3069		**18** 126	
19 288		**20** ④	**21** ②	**22** 43
23 21π		**24** 60		

01 ③ $1,\ \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{1}{3^2},\ \dfrac{1}{4^2},\ \cdots$이므로 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$

02 $a_n=3n+a$, $b_n=4n+b$ (a, b는 상수) 꼴이므로 $a_n+b_n=7n+(a+b)$
따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 공차가 7인 등차수열이다.

03 5의 배수를 작은 수부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 $a_n=5n$이고 $a_{10}=50$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{10(5+50)}{2}=275$
7의 배수를 작은 수부터 차례대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $b_n=7n$이고 $b_7=49$이므로
$b_1+b_2+\cdots+b_7=\dfrac{7(7+49)}{2}=196$
35의 배수를 작은 수부터 차례대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라고 하면 $c_n=35n$, $c_1=35$
따라서 $275+196-35=436$

04 $a_n=a+(n-1)d$로 놓으면
$a_5-a_3=(a+4d)-(a+2d)=2d=6$에서
$d=3$, $a_2+a_3=(a+d)+(a+2d)=2a+3d$
$=2a+9=11$에서 $a=1$
따라서 $a_n=1+3(n-1)=3n-2$이므로
$a_{10}=28$이다.

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r로 놓으면 $a_1=3$,
$a_n=3\cdot r^{n-1}$
$a_2:a_5=3r:3r^4=1:8$에서 $r^3=8$
따라서 $r=2$이므로 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이다.
$\therefore\ a_7=3\cdot 2^6=192$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d로 놓으면
$a_{100}-a_{98}=2d=-6$에서 $d=-3$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이다.
$\therefore\ a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{30}=S_{30}-S_{10}$
$=\dfrac{30(2\times2-29\times3)}{2}-\dfrac{10(2\times2-9\times3)}{2}$
$=-1245-(-115)=-1130$

07 $S_n=S_{n-1}+a_n\ (n\ge2)$이므로
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2-52n)-\{2(n-1)^2-52(n-1)\}$
$=2n^2-52n-(2n^2-4n+2-52n+52)$
$=4n-54$
$4n-54<0$에서 $n<13.5$이므로 구하는 자연수 n의 최댓값은 13이다.

08 첫째항을 a라 하면
$a_1+a_2=a+ar=a(1+r)=12$ …… ㉠
$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2$
$=a(1+r+r^2)=62$ …… ㉡
㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{1+r}{1+r+r^2}=\dfrac{12}{62}=\dfrac{6}{31}$
$6r^2-25r-25=0$, $(6r+5)(r-5)=0$
$r>0$이므로 $r=5$
$r=5$를 ㉠에 대입하면 $a=2$
따라서 $a_1=2$, $a_n=2\cdot5^{n-1}\ (n\ge2)$이므로
$a_4=2\cdot5^3=250$

09 첫째항부터 제5항까지의 합은
$\dfrac{a\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=\dfrac{244a}{4}=244$, $a=4$

10 $1+i+i^2+\cdots+i^{2014}=\dfrac{1-i^{2015}}{1-i}$
$=\dfrac{1+i}{1-i}=i=a+bi$
따라서 $a=0$, $b=1$이므로
$a+b=1$

11 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_5 = a+4d = 25$ …… ㉠

$a_{15} = a+14d = 95$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=7$

즉 $a_n = -3+(n-1)\cdot 7 = 7n-10$

$10 \le 7n-10 < 100$에서 $\frac{20}{7} \le n < \frac{110}{7}$이므로 $2.857\cdots \le n < 15.714\cdots$ 이고 구하는 자연수 n은 3, 4, …, 15의 13개이다.

12 $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$이다.

$f(-1)=a$, $f(1)=a+2$, $f(2)=a+6$이므로 세 수 a, $a+2$, $a+6$이 이 순서로 등비수열을 이룬다. 따라서 $(a+2)^2 = a(a+6)$에서

$a^2+4a+4 = a^2+6a$ $\therefore a=2$

13 세 근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에서

$(a-d)+a+(a+d)=3$ …… ㉠

$a(a-d)+a(a+d)+(a-d)(a+d)=-6$ …… ㉡

$a(a-d)(a+d)=-k$ …… ㉢

㉠에서 $3a=3$, $a=1$

㉡에서

$(1-d)+(1+d)+(1-d^2)=-6$, $d^2=9$

㉢에서 $-k=1-d^2=-8$ $\therefore k=8$

14 수열의 첫 째 항을 -6이라 하고 공차를 x라 하면

$-6+5x=14$, $5x=20$ $\therefore x=4$

$\therefore a_n = -6+(n-1)4 = 4n-10$

$\therefore a=8-10=-2$, $b=12-10=2$

$c=16-10=6$, $d=20-10=10$

이므로 $a+b+c+d=-2+2+6+10=16$

15 $a_4a_7<0$이고 $|a_3|=|a_8|$이므로 두 항 a_3, a_8은 절댓값이 같고 부호가 서로 다르다.

그런데 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 a_4와 a_7, a_5와 a_6도 각각 절댓값이 같고 부호가 서로 달라야 한다.

이때 $a_5=1$이므로 $a_6=-1$

16 주어진 수열의 공차를 d로 놓으면

$27=3+(m+1)d$ …… ㉠

$900=\frac{(m+2)(3+27)}{2}$ …… ㉡

㉡에서 $30(m+2)=1800$, $m+2=60$

$\therefore m=58$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $24=59d$에서 $d=\frac{24}{59}$

이므로 $p+q=59+24=83$이다.

17 (i) $r=1$이면 주어진 조건을 만족하지 않으므로 $r>1$

(ii) $S_{2m}=\frac{a(r^{2m}-1)}{r-1}=\frac{a(r^m-1)(r^m+1)}{r-1}$

$=S_m(r^m+1)=21(r^m+1)=189$

따라서 $r^m=8$이므로 $r=2$ $(r>1)$

$r=2$를 조건에 대입하면 $a=3$

따라서 $S_{10}=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3069$

18 $a_n = 2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$이므로

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{21}$

$=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_{21})$

$=\log_2\{2^{21}\cdot(\sqrt{2})^{0+1+2+\cdots+20}\}$

$=\log_2\left(2^{21}\cdot 2^{\frac{210}{2}}\right)=\log_2 2^{21+105}$

$=\log_2 2^{126}=126$

19 문제 이해 공차를 d라 하면

$a_1=-23$, $d=2$이므로

$a_n=-23+(n-1)\cdot 2=2n-25$

$a_n<0$ 에서 $2n-25<0$, $n<\frac{25}{2}$이므로

$n\le 12$ 이면 $a_n<0$이고,

$n\ge 13$이면 $a_n>0$이다. ▸ 3점

해결 과정 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{12}|$

$=23+21+19+\cdots+1$

$|a_{13}|+|a_{14}|+|a_{15}|+\cdots+|a_{24}|$

$=1+3+5+\cdots+23$ ▸ 3점

답 구하기 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{24}|$

$= 2(1+3+5+\cdots+23) = 2\times\dfrac{12(1+23)}{2}$

$= 12\times 24 = 288$ ▸ 2점

20 2021년 4월 말에 지급받는 적립 총액은

$a\times 1.005 + a\times 1.005^2 + a\times 1.005^3 + \cdots$

$+ a\times 1.005^{40} = 2211$(만원)

$\dfrac{a\times 1.005\times(1.005^{40}-1)}{1.005-1} = 2211$

$a\times 201\times 0.22 = 2211 \qquad \therefore\ a = 50$

따라서 영미가 매월 적립하는 금액은 50만 원이다.

21 $f(f(x)) = \{f(x)\}^{20} + \{f(x)\}^{19} + \{f(x)\}^{18}$

$+ \cdots + \{f(x)\}^2 + f(x) + 2$

$= (x^{20}+x^{19}+\cdots+x+2)^{20}$

$+ (x^{20}+x^{19}+\cdots+x+2)^{19} + \cdots$

$+ (x^{20}+x^{19}+\cdots+x+2)^{2}$

$+ (x^{20}+x^{19}+\cdots+x+2) + 2$

$= g(x) + (2^{20}+2^{19}+\cdots+2^2+2+2)$

따라서 구하는 상수항은

$2^{20}+2^{19}+\cdots+2^2+2+2 = \dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1}+2$

$= 2^{21}$

22 해결 과정 $S_n = 2n^2+n+1$에서

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 4$ ▸ 3점

$n\ge 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n^2+n+1) - \{2(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$= (2n^2+n+1) - (2n^2-3n+2) = 4n-1$

$a_n = 4n-1$ ▸ 3점

답 구하기 $\therefore\ a_1 + a_{10} = 4+39 = 43$ ▸ 2점

23 문제 이해 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면 넓이가 π이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{\pi}{2} = 4\pi$

$\therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$ ▸ 3점

해결 과정 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = r\cdot\dfrac{\pi}{2} = 2\pi,\ \overset{\frown}{\mathrm{A_1B_1}} = \dfrac{1}{20}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$이고, 20개의 호 $\mathrm{A_1B_1},\ \mathrm{A_2B_2},\ \cdots,\ \mathrm{AB}$의 길이는 등차수열이다. ▸ 3점

답 구하기 호의 길이의 총합은

$\dfrac{20\left(\dfrac{2\pi}{20}+2\pi\right)}{2} = 21\pi$ ▸ 2점

24 문제 이해 x축의 양의 부분 x_k (단, $k=1, 2, 3, \cdots, 10$)에서 y축에 평행하도록 직선을 그었을 때, 두 곡선과 만나서 생기는 선분의 길이를 l_k라 하면

해결 과정 $l_k = (x_k+a)(x_k+b) - {x_k}^2$

$= (a+b)x_k + ab$

따라서 l_k는 x_k에 대한 일차식이 된다. 이때 x_k가 등차수열을 이루므로 l_k도 등차수열을 이룬다. ▸ 3점

답 구하기 $\therefore\ l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_{10}$

$= \dfrac{10}{2}(l_1 + l_{10})$ ▸ 3점

$= \dfrac{10}{2}(2+10) = 60$ ▸ 2점

Ⅲ-2. 수열의 합

01 합의 기호 $\sum$

기본

01 답 해설 참조

(1) $\sum_{k=1}^{5} 2k = 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5$

$=2+4+6+8+10$

(2) $\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$

$=2+4+8+16+32$

(3) $\sum_{k=1}^{5}(4k+2) = 4\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}2$

$=4\cdot(1+2+3+4+5)+(2+2+2+2+2)$

02 답 (1) $\sum_{k=1}^{5}4$ (2) $\sum_{k=1}^{5}2^k$

(3) $\sum_{k=1}^{20}(3k-1)$ (4) $\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$

03 답 ④

04 답 11

표준

01 답 28

$\sum_{k=1}^{5}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}4$

$=20-4\times3+4\times5=28$

02 답 180

$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{3}i^2k\right)$

$=\sum_{i=1}^{4}\left(i^2\sum_{k=1}^{3}k\right)$

$=\sum_{i=1}^{4}(i^2\cdot(1+2+3))=\sum_{i=1}^{4}6i^2=6\sum_{i=1}^{4}i^2$

$=6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)=180$

03 답 11

04 답 ②

발전

01 답 ③

ㄱ. $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=0,$

$a_6=1,\ a_7=2,\ a_8=3,\ a_9=4,$

$a_{10}=0,\ a_{11}=1,\ \cdots$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=2(1+2+3+4)=20$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{10}ka_k=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot4$

$+6\cdot1+7\cdot2+8\cdot3+9\cdot4$

$=(1+4+9+16)+(6+14+24+36)$

$=30+80=110$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{k=1}^{10}a_k\right)=\sum_{k=1}^{10}(k\cdot20)$ ($\because$ ㄱ)

$=20\sum_{k=1}^{10}k$

$=20\cdot\frac{10\cdot11}{2}=1100$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 ⑤

$\mathrm{A}_n(n,\ 0)$이므로 $\mathrm{A}_{n+1}(n+1,\ 0)$

또 겹쳐지는 삼각형도 정삼각형이고 한 변의 길이는 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}=2n-(n+1)=n-1$

$\therefore\ S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}(n-1)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(n^2-2n+1)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{3}\frac{\sqrt{3}}{4}(k^2-2k+1)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{3}(k^2-2k+1)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{3}(k^2-2k+1)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sum_{k=1}^{3}k^2-2\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}1\right)$

$=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

Ⅲ-2. 수열의 합

02 여러 가지 수열의 합

기본

01 답 (1) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (2) $\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

02 답 (1) $\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ (2) 9

03 답 (1) $\log(n+1)$ (2) $\log 51-2$

04 답 ③

표준

01 답 92

$\log_{10}1=0$, $\log_{10}10=1$, $\log_{10}100=2$이므로

$1\le k<10$일 때,

$\log_{10}k=0.\times\times\times$ $\therefore [\log_{10}k]=0$

$10\le k<100$일 때,

$\log_{10}k=1.\times\times\times$ $\therefore [\log_{10}k]=1$

$\therefore$ (준식)

$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{\text{제 1항부터 제 9항까지}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{제 10항부터 제 99항까지}}+2=92$

02 답 $\dfrac{10}{69}$

$S_n=n^2+2n$이므로 $a_1=S_1=3$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1\ (n\ge 2)$

이때 $a_n=2n+1$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

$\therefore\ a_n=2n+1\ (n\ge 1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{23}\right)=\frac{10}{69}$$

03 답 -115

04 답 $\dfrac{200}{101}$

주어진 수열의 k번째 항은

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$

$$\therefore\ (\text{준식})=\sum_{k=1}^{100}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{101}\right)=\frac{200}{101}$$

발전

01 답 $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

$a_k=k(n-k)$이고, 항의 개수는 $(n-1)$개.

$$\therefore\ (\text{준식})=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)$$

$$=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

02 답 715

$$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_{2n-1}=\frac{(2n-1)2n}{2}=2n^2-n$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=2\times\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-\frac{10\cdot 11}{2}$$

$$=715$$

Ⅲ-2. 수열의 합

01 ⑤	**02** 385	**03** ④	**04** 10	**05** ④
06 ⑤	**07** ⑤	**08** 351	**09** ③	**10** ②
11 ②	**12** ③	**13** ④	**14** ⑤	**15** ④
16 ⑤	**17** 6	**18** 90	**19** ⑤	**20** ②

21 ③ **22** $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

23 (1) $a_n=\begin{cases} 0 & (n \le 2) \\ \dfrac{n(n-2)}{4} & (n \ge 3) \end{cases}$ (2) 116

24 1705

01 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+5)$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{10}a_k-3\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}5$

$=2\cdot 15-3\cdot 10+5\cdot 10=50$

02 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{5}(2k)^2$

$=(1^2+3^2+\cdots+9^2)+(2^2+4^2+\cdots+10^2)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times 11\times 21}{6}=5\times 11\times 7=385$

03 ①, ②는 옳지 않다.
곱하기나 나누기는 분리할 수 없다.
③도 옳지 않다. 변수는 앞으로 나올 수 없다.
⑤도 옳지 않다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{13}a_k+\sum_{k=14}^{n}a_k$

04 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=2n$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=2\times 5=10$

05 $a_{n+1}-a_n=2$이므로

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k-a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{-2}$

$=-\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_{40}}-\sqrt{a_{41}})\}$

$=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{41}})$

$a_{41}=2\times 41-1=81$이므로

(주어진 식)$=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{1}-\sqrt{81})$

$=-\dfrac{1}{2}(1-9)=4$

06 $S_n=n^2+2n$이므로 $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=n^2+2n-(n^2-1)=2n+1$

이때 $a_1=S_1=3$이므로 $a_n=2n+1$ $(n\ge 1)$

$\therefore$ $a_{2k-1}=2(2k-1)+1=4k-1$

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)$

$=4\times\dfrac{10\times 11}{2}-10=210$

07 주어진 수열의 홀수 번째 항만 나열하면 1, 3, 5, 7, 9, 11, $\cdots$이므로 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이 된다. $\therefore a_n=2n-1$
또, 주어진 수열의 짝수 번째 항만 나열하면 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$이므로 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이 된다. $\therefore a_n=2^n$
따라서 구하는 수열의 합을 S_{12}라고 하면

$\displaystyle S_{12}=\sum_{k=1}^{6}\{(2k-1)+2^k\}$

08 $f(2)=-1-\dfrac{-2\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}=341$

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=-10$

따라서 $f(2)-(f\circ f)(0)=351$

09 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=S_n$이라 하면

$a_1 = S_1 = 1^2(1+1) = 2$

$na_n = S_n - S_{n-1} = n^2(n+1) - (n-1)^2 n$

$= 3n^2 - n \ (n \ge 2)$

$\therefore \ a_n = 3n - 1$

$\therefore \ a_{n+1} - a_n = 3$

10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = 70$

$n(n+1)(n+2) = 70 \times 3 = 5 \times 6 \times 7$

$\therefore n = 5$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{80} \log_3 \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{80} \log_3 \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{2} \log_3 \frac{n+1}{n}$

$= \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{80} \{\log_3(n+1) - \log_3 n\}$

$= \dfrac{1}{2}\{(\log_3 2 - \log_3 1) + (\log_3 3 - \log_3 2) + \cdots + (\log_3 81 - \log_3 80)\}$

$= \dfrac{1}{2}(-\log_3 1 + \log_3 81) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$

12 주어진 수열의 제 k항을 a_k라 하면

$a_k = 10^k - 1$

$\therefore S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1)$

$= \dfrac{10(10^{10}-1)}{10-1} - 10 = \dfrac{10^{11} - 100}{9}$

$\therefore 9S = 10^{11} - 100$

$a + b = 11 + 100 = 111$

13 (주어진 식)$= \displaystyle\sum_{k=1}^{20} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{20} (2k^2 + k)$

$= 2\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k$

$= 2 \cdot \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \dfrac{20 \cdot 21}{2}$

$= 5740 + 210 = 5950$

14 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (2a_k - c)^2 = \sum_{k=1}^{20} (4{a_k}^2 - 4ca_k + c^2)$

$= 4\displaystyle\sum_{k=1}^{20} {a_k}^2 - 4c\sum_{k=1}^{20} a_k + 20c^2$

$= 80 - 40c + 20c^2 = 560$

$20c^2 - 40c - 480 = 0$ 에서 $c^2 - 2c - 24 = 0$

$(c-6)(c+4) = 0$

$\therefore c = 6 \ (\because c > 0)$

15 $\displaystyle\sum_{m=1}^{5} \left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l} 3\right)\right\} = \sum_{m=1}^{5}\left(\sum_{l=1}^{m} 3l\right)$

$= \displaystyle\sum_{m=1}^{5} 3 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{5}(m^2 + m)$

$= \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \dfrac{5 \cdot 6}{2}\right) = 105$

16 자연수 n은 $2k-1$, $2k$ (k는 자연수)

$n = 2k-1$일 때,

$n^2 = (2k-1)^2 = 4(k^2 - k) + 1$

$n = 2k$ 일 때, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$

이므로 $a_{2k-1} = 1$, $a_{2k} = 0$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{2018} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2018}$

$= 1 + 0 + 1 + \cdots + 0 = 1 \cdot 1009 = 1009$

17 해결 과정 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x - 2k)^2$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x^2 - 4xk + 4k^2) = 5x^2 - 60x + 220$

$= 5(x-6)^2 + 40$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 $x = 6$일 때,

$f(x)$는 최솟값 40을 갖는다. ▸ 4점

18 문제 이해 $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$,

$\log_{10} 100 = 2$임을 착안한다.

해결 과정 $1 \le k < 10$일 때,

$\log_{10} k = 0.\times\times\times \quad \therefore \ [\log_{10} k] = 0$

▸ 3점

$10 \le k \le 99$일 때, $\log_{10} k = 1.\times\times\times$

$\therefore \ [\log_{10} k] = 1$ ▸ 3점

답 구하기 $\therefore$ (주어진 식)

$$= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{\text{제 1항부터 제 9항까지}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{제 10항부터 제 99항까지}} = 90$$

▸ 2점

19 $\dfrac{1}{\sum_{l=1}^{k} l} = \dfrac{1}{1+2+\cdots+k} = \dfrac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$= \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

주어진 식은 첫째항부터 제 1999 항까지의 합이므로

$2\sum_{k=1}^{1999}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= 2\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{1999}-\dfrac{1}{2000}\right)\right\}$

$= 2\left(1-\dfrac{1}{2000}\right) = \dfrac{1999}{1000}$

20 $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$

$= (1+2+3+\cdots+10)$

$\quad +(2+3+4+\cdots+10)$

$\quad +(3+4+\cdots+10)+\cdots+10$

$= 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots+10\cdot10$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2$

21 (주어진 식) $= \sum_{k=2}^{10} \dfrac{1}{(k-1)(k+1)}$

$= \sum_{k=2}^{10} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\right.$

$\quad \left.+\cdots+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right) = \dfrac{36}{55}$

22 (준식)$= \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)$

$= n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$

$= n\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$= \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

23 (1) 해결 과정 (i) $n \le 2$이면 겹치는 부분이 존재하지 않으므로 $a_1 = a_2 = 0$

(ii) $n \ge 3$이면

$a_n = \left\{\dfrac{3n}{2} - (n+1)\right\} \times \left\{\left(\dfrac{3n}{2}+1\right) - (n+1)\right\}$

$= \dfrac{n(n-2)}{4}$

(i), (ii)에서

답 구하기 $a_n = \begin{cases} 0 & (n \le 2) \\ \dfrac{n(n-2)}{4} & (n \ge 3) \end{cases}$ ▸ 4점

(2) 해결 과정 $45\sum_{k=3}^{10} \dfrac{1}{a_k} = 45\sum_{k=3}^{10} \dfrac{4}{(k-2)k}$

$= 90\sum_{k=3}^{10}\left(\dfrac{1}{k-2} - \dfrac{1}{k}\right)$ ▸ 2점

답 구하기 $= 90\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right) = 116$

▸ 2점

24 문제 이해 $a_1 = 1$

$a_2 = 2+2\times2$

$a_3 = 3+2\times3+3\times3$

$a_4 = 4+2\times4+3\times4+4\times4$

$\vdots$ ▸ 3점

해결 과정

$a_n = n+2n+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} kn = n\sum_{k=1}^{n} k$

$= n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(n^3+n^2)$ ▸ 3점

답 구하기

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{2}(k^3+k^2) = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{10\cdot11}{2}\right)^2 + \dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}(3025+385) = 1705$ ▸ 2점

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의

기본

01 답 (1) 13 (2) 256

02 답 (1) 125 (2) $\frac{1}{11}$

03 답 1

$a_1=19$이므로

$a_2=\frac{1}{3}\times19=\frac{19}{3}$, $a_3=\frac{3}{5}\times\frac{19}{3}=\frac{19}{5}$,

$a_4=\frac{5}{7}\times\frac{19}{5}=\frac{19}{7}$, $a_5=\frac{7}{9}\times\frac{19}{7}=\frac{19}{9}$,

$a_6=\frac{9}{11}\times\frac{19}{9}=\frac{19}{11}$, $a_7=\frac{11}{13}\times\frac{19}{11}=\frac{19}{13}$,

$a_8=\frac{13}{15}\times\frac{19}{13}=\frac{19}{15}$, $a_9=\frac{15}{17}\times\frac{19}{15}=\frac{19}{17}$,

$a_{10}=\frac{17}{19}\times\frac{19}{17}=1$

따라서 $a_{10}=1$이다.

04 답 -1

표준

01 답 $10\cdot9^{10}$

10개의 세포를 n회 배양하였을 때의 세포의 개수를 a_n이라고 하면

$a_1=10\times(1-0.1)\times10=90$,

$a_{n+1}=a_n\times(1-0.1)\times10=9a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 90, 공비가 9인 등비수열이다.

$a_1=90$, $a_n=90\cdot9^{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

구하는 세포의 개수는 수열 $\{a_n\}$의 제10항과 같으므로 $a_{10}=90\cdot9^9=10\cdot9^{10}$

02 답 ③

03 답 28

04 답 33

$a_2=2a_1=2\times1$, $a_3=3a_2=3\times2\times1$

$a_4=4a_3=4\times3\times2\times1$

$a_5=5a_4=5\times4\times3\times2\times1$

$\vdots$

$a_{100}=100a_{99}=100\times99\times98\times\cdots\times1$

그런데 $a_5=5\times4\times3\times2\times1=120$은 60의 배수이므로 a_6, a_7, $\cdots$, a_{100}은 모두 60의 배수이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$을 60으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 60으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$1+2+6+24=33$

발전

01 답 11

(가)에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로 $a_2=p$라 하면

$a_1=7$, $a_2=p$, $a_3=a_1-4=3$,

$a_4=a_2-4=p-4$, $a_5=a_3-4=-1$,

$a_6=a_4-4=p-8$

(나)에서 $a_{n+6}=a_n$이므로

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=8\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2=25p-17=258$$

$25p=275$ $\quad\therefore\ p=11$

02 답 ③

$a_n=3^{n-1}$, $b_n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$

$1\le n\le4$일 때, $a_n\ge b_n$이므로 $c_n=b_n$

$n\ge5$일 때, $a_n<b_n$이므로 $c_n=a_n$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	1	3	9	27	81	$\cdots$
b_n	1	2	6	24	120	$\cdots$
c_n	1	2	6	24	81	$\cdots$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{50}2c_n=2\left\{(1+2+6+24)+\sum_{n=5}^{50}3^{n-1}\right\}$$

$$=2\left\{1+2+6+24+\frac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$$

$$=3^{50}-15$$

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

02 수학적 귀납법

기본

01 답 $1,\ 1,\ 2^k-1,\ 2^k-1,\ k+1$

02 답 해설 참조

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

① $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

② $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2}{4}\{k^2+4(k+1)\}\\&=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

①, ②에서 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

03 답 ④

04 답 해설 참조

$4^n-1=3m$(m은 자연수) $\cdots\cdots ㉠$

① $n=1$일 때, $4^1-1=3$이므로 등식 ㉠이 성립한다.

② $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$4^k-1=3l$ (l은 자연수) $\cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 4를 곱하면

$4^{k+1}-4=12l$

$4^{k+1}-1=12l+3=3(4l+1)$

이때 l은 자연수이므로 $4l+1$도 자연수이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

①, ②에서 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

표준

01 답 (1) 해설 참조 (2) 5 (3) 해설 참조

(1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	102
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	10

(2) 위 (1)의 표에서 $n\ge 5$일 때, 부등식 $2^n>n^2$은 항상 성립함을 추측할 수 있다.

따라서 자연수 m의 최솟값은 5이다.

(3) 위 (2)의 추측이 맞는지를 확인하려면 수학적 귀납법 등을 이용하여 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n>n^2$이 성립함을 증명해야 한다.

02 답 ①

03 답 해설 참조

$3^n>3n+7 \quad \cdots\cdots ㉠$

① $n=3$일 때,

(좌변)$=3^3=27$, (우변)$=3\cdot 3+7=16$

따라서 $n=3$일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

② $n=k(k\ge 3)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면 $3^k>3k+7 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 3을 곱하면 $3^k\cdot 3>(3k+7)\cdot 3$

그런데

$3(3k+7)-\{3(k+1)+7\}=6k+11>0$

에서 $3(3k+7)>3(k+1)+7$이므로

$3^{k+1}=3^k\cdot 3>(3k+7)\cdot 3>3(k+1)+7$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식 ㉠이 성립한다. ①, ②에서 부등식 ㉠은 $n\ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

04 답 ①

발전

01 답 ④

(가) $\frac{1}{2}$

(나) $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

(다) $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

02 답 ⑤

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{\sqrt{2}}<2=$(우변)이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$$

$n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-2\sqrt{k+1}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-2\sqrt{k+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$$

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

01 ②	02 ④	03 ④	04 ④	05 ①
06 121	07 ⑤	08 ③	09 ③	10 ⑤
11 ④	12 ②	13 8	14 3	15 ④
16 29	17 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조			
18 ③	19 ②	20 ②	21 21	
22 풀이 참조	23 풀이참조			
24 풀이참조				

01 조건 (나)에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$이므로
수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
따라서 조건 (다)에서 $a_5=9$이므로
$1+4d=9$, $d=2$
따라서 $a_6=a_5+d=9+2=11$

02 $a_2=a_1+2=1+2=3$
$a_3=a_2+3=(1+2)+3=6$
$a_4=a_3+4=(1+2+3)+4=10$
$\vdots$
$a_{10}=a_9+10=(1+2+3+\cdots+9)+10$
$=\dfrac{10(1+10)}{2}=55$

03 $a_{n+1}=a_n+2$에서 $a_{n+1}-a_n=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다. 이때 첫째항이 2이므로 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$
$\therefore a_{50}=2\times50=100$

04 $\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2$에서
$a_{n+1}=2(n+1)-\dfrac{n+1}{n}a_n$이므로
$a_2=2\cdot2-\dfrac{2}{1}a_1=2\cdot2-2=2$
$a_3=2\cdot3-\dfrac{3}{2}a_2=2\cdot3-3=3$
$a_4=2\cdot4-\dfrac{4}{3}a_3=2\cdot4-4=4$
$\vdots$
따라서 $a_{2014}=2014$

05 $a_2=a_1+2=1+2=3$
$a_3=2a_2=2\times3=6$
$a_4=a_3+2=6+2=8$
$a_5=2a_4=2\times8=16$
$a_6=a_5+2=16+2=18$
따라서 $a_5+a_6=16+18=34$

06 $a_{n+1}=3a_n$, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 3, $a_n=3^{n-1}$ $\therefore S_5=\dfrac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=121$

07 제품 a_n을 만드는 데 걸리는 시간을 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면
$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 a_5를 구하면
$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3$
$a_3=2a_2+2=2\cdot3+2=8$
$a_4=2a_3+3=2\cdot8+3=19$
$a_5=2a_4+4=2\cdot19+4=42$

08 ① $p(1)$이 참이면 $p(1+3)=p(4)$도 참이다.
② $p(2)$가 참이면 $p(2+3)=p(5)$도 참이다.
③ $p(3)$이 참이면
$p(3+3)=p(6)$, $p(6+3)=p(9)$,
$p(9+3)=p(12)$, $\cdots$
도 참이므로 명제 $p(3k)$는 항상 참이다.
④ 명제 $p(4)$가 참이면
$p(4+3)=p(7)$, $p(7+3)=p(10)$,
$p(10+3)=p(13)$, $\cdots$
도 참이므로 명제 $p(3k+1)$은 항상 참이다.
⑤ 명제 $p(5)$가 참이면
$p(5+3)=p(8)$, $p(8+3)=p(11)$,
$p(11+3)=p(14)$, $\cdots$
도 참이므로 명제 $p(3k+2)$는 항상 참이다.

09 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열
$a_1=2$, $\dfrac{a_2}{a_1}=2$이므로 첫째항이 2, 공비가 2
$\therefore a_n=2\cdot(2)^{n-1}=2^n$ $a_k=2^{15}$에서 $2^k=2^{15}$
$\therefore k=15$

10 ① $n=1$이면 $n^3+3n^2+2n=\boxed{6}$

② $(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$

$=(k+1)\{(k^2+2k+1)+(3k+3)+2\}$

$=(k+1)\{(k^2+2k)+3(k+2)\}$

$=(k^3+3k^2+2k)+\boxed{3}(k+1)(k+\boxed{2})$

이므로 □ 안에 알맞은 수는 각각 6, 3, 2이다.

따라서 $6+3+2=11$

11 ① $n=1$이면 (우변)$=2\sqrt{2\cdot 1}=\boxed{2\sqrt{2}}$

② $2\sqrt{2k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}-2\sqrt{2(k+1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2k(k+1)}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{k+1}}$ 한편,

$\{2\sqrt{2k(k+1)}+1\}^2-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$

$=4\sqrt{2k(k+1)}-8k-7$

$=4\sqrt{2k\cdot(k+1)}-4\sqrt{2k\cdot 2k}-7<0$

이고, $2\sqrt{2k(k+1)}+1>0$,

$2\sqrt{2}(k+1)>0$이므로

$2\sqrt{2k(k+1)}+1-2\sqrt{2}(k+1)<0$ 따라서

$2\sqrt{2k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}-2\sqrt{2(k+1)}\ \boxed{<}\ 0$

12 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots, (n-1)$을 대입하여

각 변을 모두 더하면

$\therefore a_n$

$=2+\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\}$

$+\{\ \cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\}=1+\sqrt{n}$

$\therefore a_{100}=1+\sqrt{100}=11$

13 $a_2=\dfrac{1}{2}a_1+2=34+2=36$

$a_3=\dfrac{1}{2}a_2+2=18+2=20$

$a_4=\dfrac{1}{2}a_3+2=10+2=12$

$a_5=\dfrac{1}{2}a_4+2=6+2=8$

14 $a_2=2-a_1=2-(-1)=3$

$a_3=2-a_2=2-3=-1$

$a_4=2-a_3=2-(-1)=3$

$a_5=2-a_4=2-3=-1$

⋮

따라서 $a_{2n}=3$, $a_{2n+1}=-1$이므로

$a_{2014}=3$

15 $a_{n+2}\cdot a_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_1=1$, $a_2=2$이므로

$a_3=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{1}=2$, $a_4=\dfrac{2}{2}=1$, $a_5=\dfrac{1}{2}$,

$a_6=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}$, $a_7=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$, $a_8=2$,

$a_9=2$, $a_{10}=1$, $a_{11}=\dfrac{1}{2}$, $a_{12}=\dfrac{1}{2}$, $\cdots$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이 성립한다. $160=6\times 26+4$, $167=6\times 27+1$ 이므로 $a_{160}=a_4=1$, $a_{163}=a_1=1$

$\therefore\ a_{160}+a_{163}=2$

16 ② $a_{k+1}=a_k+3=(3k-2)+3=3k+1$

$=3(k+1)-2$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$10p-q=10\times 3-1=29$

17 (1)

n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	부등호	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n	부등호	3^n
1	$\frac{1}{3}$	$<$	$\frac{1}{2}$	2	$<$	3
2	$\frac{1}{9}$	$<$	$\frac{1}{4}$	4	$<$	9
3	$\frac{1}{27}$	$<$	$\frac{1}{8}$	8	$<$	27

따라서 $0<a<b$일 때, $a^n<b^n$과 같이 추측할 수 있다.

(2) ① $n=1$일 때, $a^1=a<b=b^1$이므로 성립한다.

② $n=k$일 때, 성립한다고 가정하면,

즉, $a^k < b^k$이면

$a^{k+1} = a^k \cdot a < a^k \cdot b < b^k \cdot b = b^{k+1}$

따라서 $a^{k+1} < b^{k+1}$이므로

$n = k+1$일 때도 성립한다.

①, ②에 의해 모든 자연수 n에 대하여

$0 < a < b$일 때, $a^n < b^n$이 성립한다.

18 $a_{n+1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ $\cdots$ ㉠

㉠의 n대신에 $n-1$을 대입하면

$a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_{n+1} - a_n = na_n$

$\therefore a_{n+1} = (n+1)a_n$ 즉, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \sum_{k=1}^{10}(k+1) = \frac{10 \times 11}{2} + 10 = 65$$

19 $(a_n + a_{n+1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 9n^2$에서

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 9n^2$

$\therefore a_{n+1} - a_n = 3n$ $(\because a_{n+1} > a_n)$

$$\therefore a_{20} = a_1 + \sum_{k=1}^{19} 3k = 1 + 3 \times \frac{19 \times 20}{2} = 571$$

20 $a_n + a_{n+1} = n$에서

$a_1 + a_2 = 1,\ a_3 + a_4 = 3,\ a_5 + a_6 = 5,\ \cdots,$

$a_{49} + a_{50} = 49$이므로 각 변끼리 더하면

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{25}(2k-1) = 25^2 = 625 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a_2 + a_3 = 2,\ a_4 + a_5 = 4,\ a_6 + a_7 = 6,$

$\cdots,\ a_{48} + a_{49} = 98$

이므로 각 변끼리 더하면

$$\sum_{k=2}^{49} a_k = \sum_{k=1}^{24} 2k = 2 \times \frac{24 \cdot 25}{2} = 600 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면 $a_1 + a_{50} = 25$

21 문제 이해 $(n+2)$개의 계단을 올라가는 방법은 a_{n+2}이고

(i) $(n+2)$개의 계단 중 먼저 한 계단을 올라가고 나머지 $(n+1)$개의 계단을 올라가는 방법은 a_{n+1}이다.

(ii) $(n+2)$개의 계단 중 먼저 두 계단을 올라가고 나머지 n개의 계단을 올라가는 방법은 a_n이다. ▸ 3점

해결 과정 즉, $(n+2)$개의 계단을 올라가는 방법은 (i), (ii) 중 어느 하나에 속하므로

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ▸ 3점

답 구하기 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,$

$a_5 = 8,\ a_6 = 13$에서

$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$이다. ▸ 2점

22 (1) 해결 과정 $a_1 = a = 2 - 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$

$a_3 = 1 + 2 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$

$a_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15 = 2^4 - 1$

$\vdots$ ▸ 2점

답 구하기 이므로 $a_n = 2^n - 1$로 추론된다. ▸ 2점

(2) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ $\cdots$㉠이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하자.

해결 과정 (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1$,

(우변)$= 2 - 1 = 1$이므로 성립한다. ▸ 2점

(ii) $n = k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$이므로

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k$

$= 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ ▸ 2점

답 구하기 즉, $n = k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2^n - 1$

23 문제 이해 이 카페가 오픈한 지 n개월 되는 달 초의 회원 수를 a_n이라 하면

해결 과정 $a_1 = 40,\ a_{n+1} = 2(a_n - 18)$ ▸ 3점

$a_{n+1} = 2a_n - 36$에서 $a_{n+1} - 36 = 2(a_n - 36)$

이므로

수열 $\{a_n - 36\}$은 첫째항이 $a_1 - 36 = 4$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_n - 36 = 4 \cdot 2^{n-1}$

즉, $a_n = 2^{n+1} + 36$이고, $a_n > 2000$에서

$2^{n+1} > 1964$이다. ▸ 3점

답 구하기 $2^{10} = 1024,\ 2^{11} = 2048$이므로 월 초에 이 카페의 회원이 2000명보다 많아지는 달은

오픈한 지 10개월째 되는 달이다.
따라서 3년 동안 회원의 수가 2000명 이상을 유지했던 달은 모두 27개월이다. ▸ 2점

24 해결 과정 (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$,
(우변)$=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$이므로 등식이 성립한다.
▸ 2점

(ⅱ) $n=k\ (k\geq1)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면 ▸ 2점

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$ ▸ 2점

이므로 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

답 구하기 따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. ▸ 2점

Ⅲ 수열

01 20	**02** ④	**03** ③	**04** ③	**05** ④
06 105	**07** ④	**08** ④	**09** ②	**10** ③
11 ⑤	**12** ①	**13** ②	**14** ⑤	**15** 60
16 ③	**17** ⑤	**18** 31	**19** ④	**20** 156
21 10	**22** 77	**23** 64		
24 (1) $80 \cdot 9^{n-1}$		(2) $k=-3$		**25** -50

08 주어진 이차방정식의 두 근이 α_n, β_n 이므로

$\alpha_n+\beta_n=-4$, $\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

09 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-5)\}}{2}=-\frac{5}{2}(n^2-21n)$$

$-\frac{5}{2}(n^2-21n)<0$에서 $n(n-21)>0$

$\therefore n>21$ ($\because n>0$)

따라서 첫째항부터 제22항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

11 $a_n-a_{n-1}=n^2$ $(n\geq2)$이므로

$a_2-a_1=2^2$, $a_3-a_2=3^2$, $a_4-a_3=4^2$, $\cdots$,

$a_{20}-a_{19}=20^2$

각 변끼리 더하면

$a_{20}-a_1=2^2+3^2+4^2+\cdots+20^2$

$$\therefore a_{20}=a_1+2^2+3^2+4^2+\cdots+20^2$$

$$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}=2870$$

12 $b^2=ac$이므로

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\log_x a+\log_x c=\log_x ac$$

$$=\log_x b^2=2\log_x b=\frac{2}{\log_b x}$$

13 처음 개체의 수를 a, 매일 증가하는 비율을 $p\,\%$라 하면 20일간 44% 증가하였으므로

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}=1.44a,\ \left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}=1.44$$

또, 10일 후의 개체의 수는 $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$이므로 $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}=a\sqrt{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}}=1.2a$

즉, 10일 후의 개체의 수는 $1.2a$가 되었으므로

증가율은 $(1.2-1)\times100=20$ (%)

17 (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=2-1=1$,

(우변)$=1^2=1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ ……㉠

㉠의 양변에 $2k+1$을 더해 주면

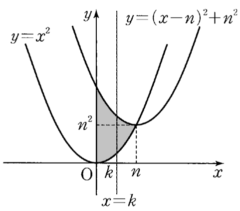
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

20 문제 이해 두 이차함수의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분(경계선 포함)은 다음 그림과 같이 색칠한 부분이다.



이때 직선 $x=k$ $(0\leq k\leq n$인 자연수) 위에 있는 격자점의 개수를 N_k라 하면

해결 과정 $N_k=(k-n)^2+n^2-k^2+1$

$=-2nk^2+2n^2+1$ ▸ 2점

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}N_k=\sum_{k=0}^{n}(-2nk+2n^2+1)$$

$$=-2n\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)(2n^2+1)$$

$=-2n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)(2n^2+1)$

$=n^3+n^2+n+1$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore\ a_5=5^3+5^2+5+1=156$ ▸ 2점

21 문제 이해 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$a_n=1000\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1000}{2^{n-1}}$ ▸ 2점

해결 과정 이때, $a_k>1$이면 $\log_2 a_k>0$이고

$0<a_k<1$ 이면 $\log_3 a_k<0$ 이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는

자연수 n 의 값은 $\log_2 a_n>0$, 즉 $a_n>1$ 을

만족하는 자연수 n 의 최댓값과 같다. ▸ 2점

답 구하기 $a_n=\frac{1000}{2^{n-1}}>1$ 에서

$1000>2^{n-1}$ 이므로

$n-1\le 9 \qquad \therefore\ n\le 10$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 10 이다. ▸ 2점

22 문제 이해 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=S_n$ 이라 하자.

해결 과정 $n=1$ 일 때,

$1\cdot a_1=S_1=1^2\cdot 2^2$ 이므로 $a_1=4$ ▸ 2점

$n\ge 2$ 일 때

$na_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2$

$=n^2\{(n+1)^2-(n-1)^2\}$

$=n^2\cdot 4n=4n^3$

$\therefore\ a_n=4n^2\ (n\ge 1)$ ▸ 2점

답 구하기 $\therefore\ \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{10}4k^2=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=77$ ▸ 2점

23 문제 이해 곡선 $y=-x^3+6x^2+24x$와 직선

$y=k$의 교점의 x좌표는 방정식

$-x^3+6x^2+24x=k$의 실근이다. ▸ 2점

해결 과정 즉, 삼차방정식 $x^3-6x^2-24x+k=0$

의 서로 다른 세 실근을 $a,\ ar,\ ar^2$이라 하면

근과 계수와의 관계에 의해

$a+ar+ar^2=6$ ⋯ ㉠

$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=-24$ ⋯ ㉡

$a^3r^3=-k$ ⋯ ㉢ ▸ 2점

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=-24$,

$ar\times 6=-24 \qquad \therefore\ ar=-4$

답 구하기 이것을 ㉢에 대입하면

$(-4)^3=-k, \qquad \therefore\ k=64$ ▸ 2점

24 (1) 해결 과정 (i) $n\ge 2$ 일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=10\cdot 9^n-10-(10\cdot 9^{n-1}-10)$

$=80\cdot 9^{n-1}$

⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$ 일 때,

$a_n=S_1=10\cdot 9-10=80$

답 구하기 이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=80\cdot 9^{n-1}$ ▸ 3점

(2) 해결 과정 (i) $n\ge 2$ 일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\cdot 2^n+k-(3\cdot 2^{n-1}+k)=3\cdot 2^{n-1}$

⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=3\cdot 2+k=6+k$

⋯⋯ ㉡

답 구하기 이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로 $6+k=3 \qquad \therefore k=-3$ ▸ 3점

25 문제 이해 방정식 $x^{10}-2x+5=0$의 근이

$x_k\ (k=1,2,3,\ \dots\ ,10\ )$이므로

해결 과정 $x_k^{\ 10}-2x_k+5=0$ ▸ 2점

$x_k^{\ 10}=2x_k-5$

$\sum_{k=1}^{10}x_k^{\ 10}=\sum_{k=1}^{10}(2x_k-5)=2\sum_{k=1}^{10}x_k-\sum_{k=1}^{10}5$

$=2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_{10})-5\cdot 10$ ▸ 2점

답 구하기 $=2\cdot 0-50=-50$ ▸ 2점