p.01 [23] 좌표공간의 점 $A(2, 2, -1)$을 ❶ x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 $C(-2, 1, 1)$에 대하여

❷ 선분 BC의 길이는?

⇨ ❶ : $B(2, -2, 1)$

∴ ❷ $= \overline{BC} = \sqrt{16+9} = 5$

p.01 [24] ❶ 초점이 $F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 $x = -\frac{1}{3}$인 포물선이 ❷ 점 $(a, 2)$를 지날 때, a의 값은?

⇨ ❶ 포물선의 방정식 : $y^2 = 4 \times \frac{1}{3} \times x = \frac{4}{3}x$

❷ 점 $(a, 2)$: $4 = \frac{4}{3} \times a$

∴ $a = 3$

p.02 [25] ❶ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ❷ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 ❸ 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$일 때, ❹ 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.)

⇨ ❶&❷ $\times a^2b^2$: ① $4b^2+a^2=a^2b^2$

❷ 접방 : $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}=1 \Rightarrow$ ❸ $=-\dfrac{2b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ a^2=4b^2$

①에 대입 : $8b^2=4b^4 \Rightarrow \div 4b^2$: $b^2=2,\ a^2=8$

❶ 초점 : $c^2=a^2-b^2=8-2=6$ $\therefore\ c=\sqrt{6}$

$\therefore$ ❹ $=2c=2\sqrt{6}$

p.02 [26] 좌표평면에서 세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 8)$, $\vec{c}=(1,\ 0)$에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

❶ $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$, ❷ $\vec{q}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$ (t는 실수)를 만족시킬 때, ❸ $|\vec{p}-\vec{q}|$의 ❹ 최솟값은?

⇨ ❶ : $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP} \Rightarrow$ 점 P는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위의 점

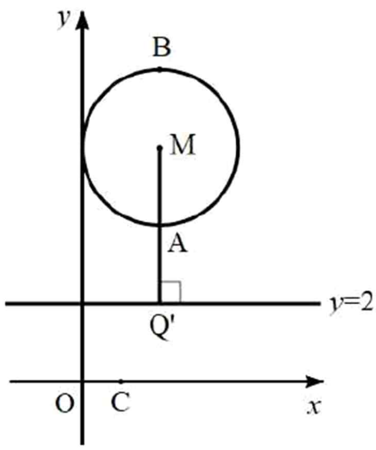
Let $\overline{AB}$의 중점 : $M(2,\ 6)$

❷ : $\vec{q}=(1,\ 2)+(t,\ 0)=(1+t,\ 2)$

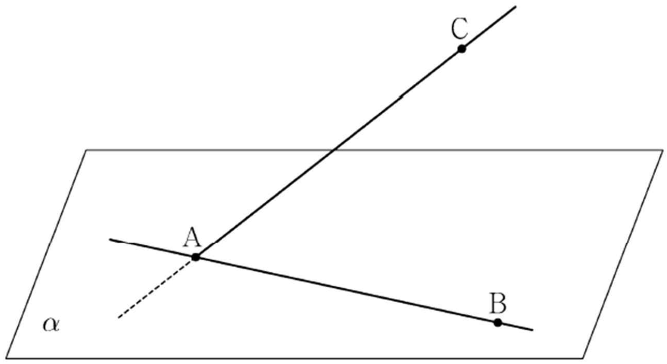
점 Q는 직선 $y=2$ 위의 점, $Q'(2,\ 2)$

Let $\overline{MQ'}\perp(y=2)$, $\overline{MQ'}\cap$(원) $=A$

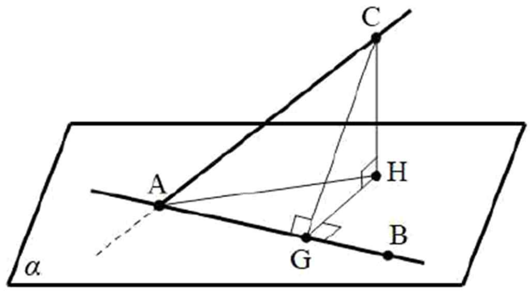
❸ $=|\overrightarrow{QP}|=\overline{PQ}\geq\overline{AQ'}=2$ $\therefore$ ❹ $=2$



p.03 [27] 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 ❶ 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때



$\sin\theta_1 = (4/5)$이고, ❷ 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $(\pi/2) - \theta_1$이다. ❸ 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, ❹ $\cos\theta_2$의 값은?



Let $\overline{CG} \perp \overline{AB}$, $\overline{CH} \perp \alpha \Rightarrow \overline{HG} \perp \overline{AB}$

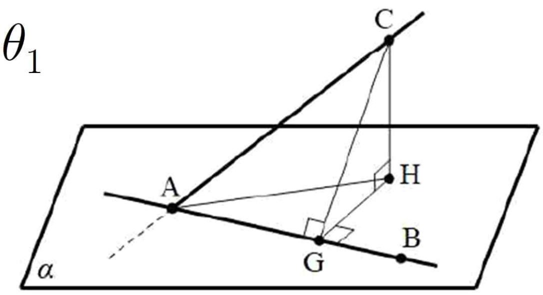
❶ : $\angle CAG = \theta_1$, Let $\overline{AC} = 5k$

$\overline{CG} = 4k$, $\cos\theta_1 = (3/5)$

p.03 [27] ❷ $\angle(\overline{AC}, \alpha) = (\pi/2) - \theta_1$

❸ $\angle(\triangle ABC, \alpha) = \theta_2$

❹ $\cos\theta_2$의 값은?



⇨ $\overline{AC} = 5k$, $\overline{CG} = 4k$, $\cos\theta_1 = (3/5)$

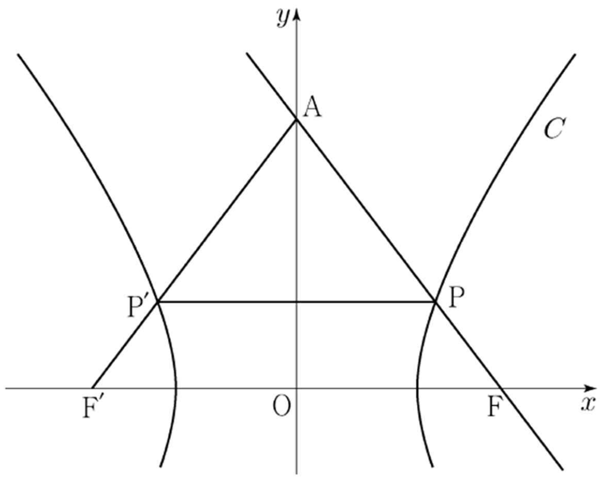
❷ : $\angle CAH = (\pi/2) - \theta_1$

$$\overline{CH} = \overline{AC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = 5k \times \cos\theta_1 = 5k \times \frac{3}{5} = 3k$$

$$\triangle CGH : \overline{CH} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{16k^2 - 9k^2} = \sqrt{7}k$$

❸ : $\angle CGH = \theta_2$ $\therefore$ ❹ $= \dfrac{\overline{CH}}{\overline{CG}} = \dfrac{\sqrt{7}k}{4k} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

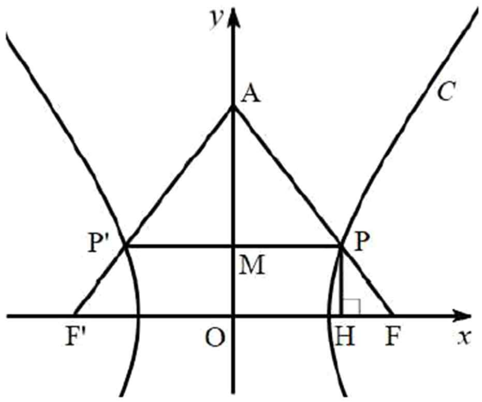
p.03 [28] 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자. ❶ 직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고 ❷ $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP'}}=5:6$, ❸ $\overline{\mathrm{PF}}=1$일 때, ❹ 쌍곡선 C의 ❺ 주축의 길이는?



⇨ Let $\overline{\mathrm{PH}}\perp(x축)$, $\overline{\mathrm{PP'}}\cap(y축)=\mathrm{M}$

❷ $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{MP}}=5:3$

❶ $\triangle\mathrm{AMP}$: $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MP}}}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{b}{a}$

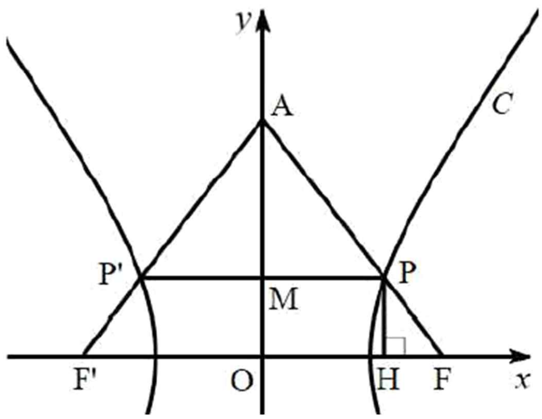


p.03 [28] $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$

❸ $\overline{\mathrm{PF}}=1$일 때, ❹ 쌍곡선 C의

❺ 주축의 길이는?

⇨ $\triangle\mathrm{AMP}$: $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MP}}}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{b}{a}$



Let $a=3k,\ b=4k$ $\Rightarrow$ ❹ 쌍곡선 : $\dfrac{x^2}{9k^2}-\dfrac{y^2}{16k^2}=1$

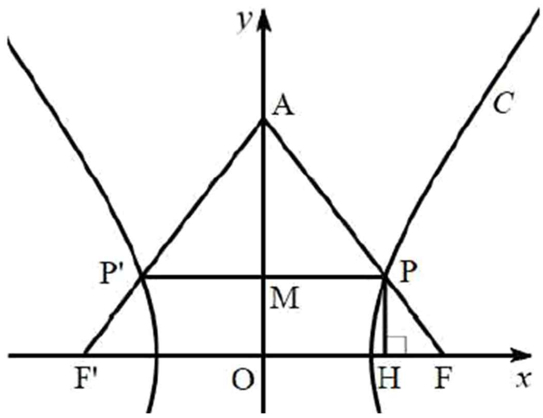
초점 : $c^2=9k^2+16k^2=25k^2$ $\therefore\ c=5k$

❸ : $\overline{\mathrm{HF}}=\dfrac{3}{5}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow$ 점 $\mathrm{P}\left(5k-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

❹에 대입 $\times 9k^2$: $25k^2-6k+\dfrac{9}{25}-\dfrac{9}{25}=9k^2$

p.03 [28] ❹ 쌍곡선 C의

❺ 주축의 길이는?



⇨ $a = 3k,\ b = 4k,\ c = 5k$

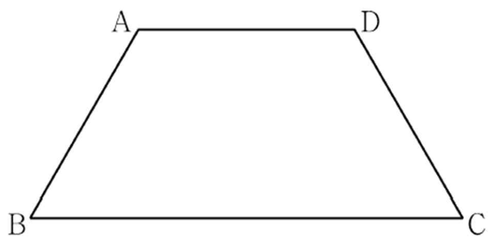
$$25k^2 - 6k + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} = 9k^2$$

$$16k^2 - 6k = 2k(8k-3) = 0$$

$$k > 0 \ : \ k = \frac{3}{8}$$

$\therefore$ ❺ $= 2a = 2 \times 3k = 6 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4}$

[29] 평면 α 위에 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$, $\angle ABC = \angle BCD = (\pi/3)$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 ❶ $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$의 값은?



(가) $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$	(나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$
(다) $2 \times \angle BQA = \angle PBQ < (\pi/2)$	

⇨ (가) : $2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

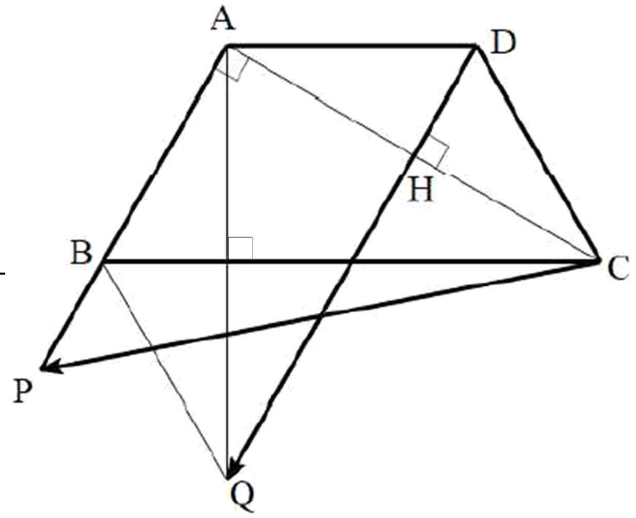
점 P는 $\overline{BA}$를 $1:3$으로 외분하는 점 $\Rightarrow$ $\overline{AP} = \frac{3}{2}\overline{AB} = 3$

$\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$

p.04 [29] (나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$

(다) $2 \times \angle BQA = \angle PBQ < (\pi/2)$

❶ $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$ 의 값은?



⇨ $\overline{AB} = 2$, $\overline{AP} = 3$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$

Let $\overline{QH} \perp \overline{AC}$

(나) $= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|$

$= 2\sqrt{3} \times \overline{AH} = 6 \quad \therefore \quad \overline{AH} = \sqrt{3}$

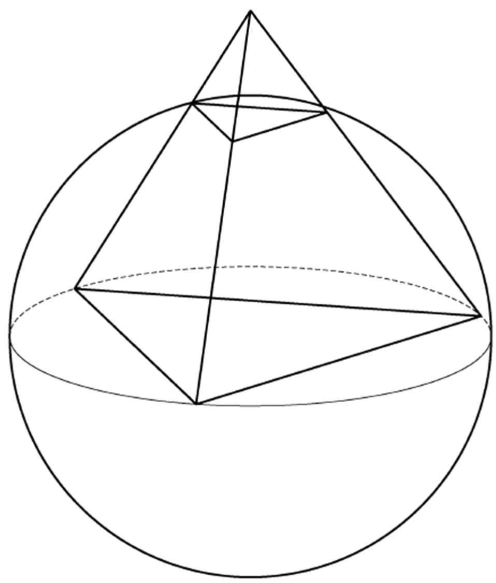
(다) $\Rightarrow \angle BAQ = \angle BQA \quad \therefore \quad \overline{AB} = \overline{BQ}$

$\triangle AQD$: $\overline{AD} = 2$, $\overline{AQ} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$

$\therefore$ ❶ $= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ}$

$= |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DQ}|\cos(\pi/2) + |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{DQ}|\cos 0 = 12$

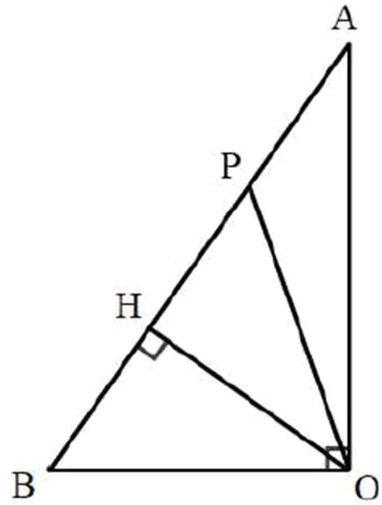
p.04 [30] 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 점삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자. 구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q, 구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자. ❶ 구 S의 반지름의 길이가 6일 때, ❷ 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값은?



⇨ Let 구 S의 중심, 즉 $\triangle BCD$의 외심 : O

$\triangle ABO$: $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$, $\overline{BO} = 6$, $\overline{AO} = 6\sqrt{2}$, ❶ : $\overline{OP} = 6$

p.04 [30] ❷ 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값은?



⇨ Let 구 S의 중심, 즉 $\triangle$BCD의 외심 : O

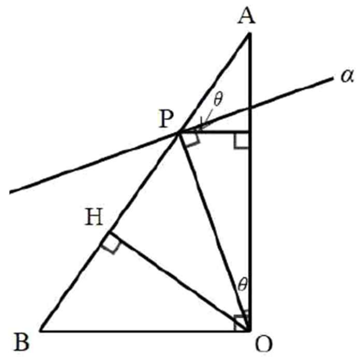
$\overline{AB} = 6\sqrt{3}$, $\overline{BO} = 6$, $\overline{AO} = 6\sqrt{2}$, $\overline{OP} = 6$

Let $\overline{OH} \perp \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABO \backsim \triangle OBH$

$\overline{BO} : \overline{AB} = \overline{BH} : \overline{OB} \Rightarrow 6 : 6\sqrt{3} = \overline{BH} : 6$

$\overline{BH} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = 6\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

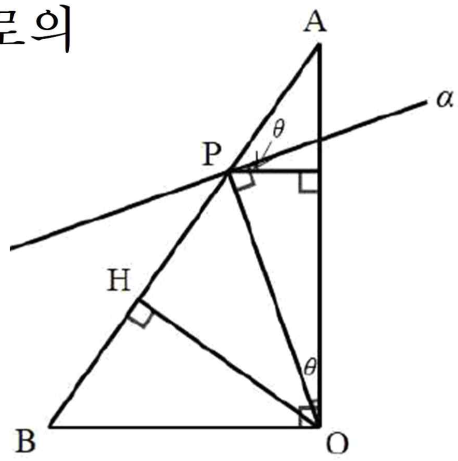
❷ : $\triangle PQR = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$



Let $\angle(\triangle PQR, \alpha) = \theta = \angle AOP$

$\triangle OBG$: $\sin(\angle BOH) = (1/\sqrt{3})$

p.04 [30] ❷ 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값은?



⇨ $\triangle PQR = 3\sqrt{3}$, $\angle(\triangle PQR, \alpha) = \theta$

$\triangle OBG$: $\sin(\angle BOH) = (1/\sqrt{3})$

$$\cos(\angle BOH) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \times \angle BOH\right) = \sin(2 \times \angle BOH)$$

$$= 2 \times \sin(\angle BOH) \times \cos(\angle BOH)$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$k = 3\sqrt{3} \times \cos\theta = 2\sqrt{6}$ $\therefore$ $k^2 = 4 \times 6 = 24$