III 수열

1 등차수열과 등비수열

01 수열 121~122쪽

준비하기 (1) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ (2) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

생각 열기 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

문제 1 (1) 1, 4, 7, 10 (2) 2, 8, 26, 80
(3) 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$

문제 2 (1) $a_n=\frac{1}{n^3}$ (2) $a_n=n(n+1)$

생각 넓히기 ❶ 16 ❷ $a_n=(n+1)^2$

02 등차수열 123~129쪽

준비하기 30

생각 열기 ❶ 제7회 ❷ 2024년

문제 1 (1) 8 (2) $\frac{1}{2}$, -1

함께하기 $a_n=a+(n-1)d$

문제 2 (1) $a_n=3n-4$ (2) $a_n=-6n+11$

문제 3 (1) 34 (2) 제20항

문제 4 $a_n=3n+2$

문제 5 (1) $a_n=-2n+87$ (2) 제44항

문제 6 $a_n=pn+q$, $a_{n+1}=p(n+1)+q=pn+p+q$
이므로

$$a_{n+1}-a_n=(pn+p+q)-(pn+q)=p \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

따라서 주어진 수열은 공차가 p인 등차수열이다.

문제 7 (1) $x=4$, $y=16$ (2) $x=8$, $y=3$, $z=-2$

문제 8 (1) 431.4 (2) 400 (3) 1.25 m

생각 열기 ❶ $2S=10100$ ❷ 5050

문제 9 (1) 750 (2) -660

문제 10 (1) 442 (2) -120

문제 11 3725

문제 12 (1) $S_n=-3n^2+52n$ (2) $n=9$

생각 넓히기 ❶ $a_n=-6n+7$
❷ $a_{n+1}-a_n=-6$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -6인 등차수열이다.
❸ $a_n=S_n-S_{n-1}=2pn-p+q$이므로
$$a_{n+1}-a_n=2p$$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $2p$인 등차수열이다.

03 등비수열 130~136쪽

준비하기 (1) a^8 (2) a^3

생각 열기 ❶ 4, $\frac{16}{5}$, $\frac{64}{25}$, $\cdots$
❷ 바로 앞의 항에 $\frac{4}{5}$를 곱한 값이 그다음 항이 된다.

문제 1 (1) 4 (2) 1, $\frac{1}{27}$

함께하기 $a_n=ar^{n-1}$

생각톡톡 첫째항이 1, 공차가 0인 등차수열이기도 하고, 첫째항이 1, 공비가 1인 등비수열이기도 하다.

문제 2 (1) $a_n=-5\times3^{n-1}$ (2) $a_n=3\times(-4)^{n-1}$

문제 3 (1) 4 (2) 제9항

문제 4 $a_n=\frac{1}{8}\times(-10)^{n-1}$

문제 5 (1) $a_n=2^{n-1}$ (2) 제13항

문제 6 (1) $x=6$, $y=24$ (2) $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $y=7$, $z=14\sqrt{7}$

문제 7 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 문제 8 $\frac{242}{81}$

문제 9 $\frac{171}{256}$ 문제 10 3069

문제 11 (1) $a_n=2\times3^n$
(2) $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

문제 12 306만 원

생각 넓히기 ❶ $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{16},\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

❷ 5번째

Ⅲ-1 중단원 마무리하기 138~141쪽

01 (1) $\frac{1}{14}$ (2) 7

02 (1) $a_n=3n+4$ (2) $a_n=2n-3$

03 (1) $a_n=5^{n-1}$ (2) $a_n=2\times\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

04 (1) 1 (2) -4 또는 4 **05** (1) -91 (2) 254

06 (1) 55 (2) -33 **07** 제24항

08 $a=17,\ b=23,\ c=29$

09 문제 이해 제3항과 제5항이 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_3+a_5=0$ ▶ 30 %

해결 과정 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$(9+2d)+(9+4d)=0$

$18+6d=0$

$d=-3$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공차가 -3인 등차수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\{2\times9+(10-1)\times(-3)\}}{2}=-45$ ▶ 40 %

10 29 **11** 1050

12 (1) -81 (2) 320 **13** 6

14 $a=1,\ b=-2$ **15** $1, -3, 9$

16 156 **17** -9

18 $A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \cdots\}$,
$B=\{3, 8, 13, 18, 23, 28, \cdots\}$
이므로

$A\cap B=\{8, 23, 38, \cdots\}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 15인 등차수열이므로

$a_n=8+(n-1)\times15=15n-7$

$a_k>100$에서 $15k-7>100$

$15k>107,\quad k>7.\times\times\times$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 처음으로 100보다 커지는 항은 제8항이다.

19 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_5=S_{11}$에서

$\frac{5\{2\times30+(5-1)d\}}{2}$

$=\frac{11\{2\times30+(11-1)d\}}{2}$

$45d=-180,\quad d=-4$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30, 공차가 -4인 등차수열이므로

$S_n=\frac{n\{2\times30+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+32n=-2(n-8)^2+128$

즉, S_n의 최댓값은 128이다.

20 해결 과정 $S_n=kn^2+n,\ T_n=n^2+kn$이라 하면

$a_3=S_3-S_2=(9k+3)-(4k+2)$

$=5k+1$ ▶ 40 %

$b_5=T_5-T_4=(25+5k)-(16+4k)$

$=k+9$ ▶ 40 %

답 구하기 이때 $a_3=b_5$이므로

$5k+1=k+9$에서 $k=2$ ▶ 20 %

21 여과기를 n번 통과하였을 때의 유해 물질의 양을 a_n이라 하면

$a_n=100\times\left(1-\frac{20}{100}\right)^n=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$a_n\le10$에서 $100\times\left(\frac{4}{5}\right)^n\le10$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n\le\frac{1}{10}$

이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 4-\log 5)\le-1$

$n\{2\log 2-(1-\log 2)\}\le-1$

$n(3\log 2-1)\le-1$

$n(3\times0.3010-1)\le-1$

$n\ge\frac{1}{0.0970}=10.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다.

2 수열의 합

01 합의 기호 Σ 143~145쪽

준비하기 $a_n=n(n+2)$

생각 열기 ❶ $a_n=2n-1$ ❷ 제41항

문제 1 (1) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ (2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$

문제 2 (1) $13+17+21+\cdots+33$
(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

문제 3 (1) $12,\ 2k-7$
(2) 예시 $\sum_{k=1}^{225}(4k+104),\ \sum_{k=27}^{251}4k$

함께하기 ❶ $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$,
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
❷ $a_k,\ c$

문제 4 (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$

$$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_n-b_n)$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$

생각톡톡 성립하지 않는다.

문제 5 (1) 60 (2) 120

생각 넓히기 ❶ 10^n-n
❷ 제10항
❸ 11111111055

02 여러 가지 수열의 합 146~149쪽

준비하기 $a=1,\ b=-1$

생각 열기 빨간색 블록과 초록색 블록의 개수가 각각

$$1+2+3+4+5$$

이고 블록의 총개수가 5×6이므로

$$2(1+2+3+4+5)=5\times6$$

즉, $1+2+3+4+5=\frac{5\times6}{2}$

문제 1 (1) $(n+1)^4-1^4$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

(2) $4\sum_{k=1}^{n}k^3$

$$=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$
$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$
$$=(n+1)(n^3+n^2)$$
$$=n^2(n+1)^2$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

문제 2 (1) 819 (2) 14400

문제 3 (1) 1330 (2) 1260

문제 4 (1) 1480 (2) 9633

문제 5 (1) $\frac{n}{2n+1}$ (2) $\sqrt{n+1}-1$

생각 넓히기 ❶ 805
❷ 모두 $4^2+5^2+6^2+\cdots+13^2$으로 같다.
❸ 103600

탐구 & 융합 150쪽

탐구 ❶ [그림 1]에서 한 개의 정육면체의 부피를 1이라 하면 각 입체도형의 부피는

$$1^2+2^2+3^2+4^2$$

이므로 모든 입체도형의 부피는

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2) \quad \cdots\cdots ①$$

[그림 1]의 입체도형을 [그림 2]와 같이 붙이고 [그림 3]과 같이 [그림 2]의 맨 위층을 반으로 잘라 [그림 4]와 같이 붙여 보자.

이때 [그림 4]의 가장 큰 정육면체에서 부피가 1인 정육면체는 가로에 $(4+1)$개, 세로에 4개, 높이로 $\left(4+\frac{1}{2}\right)$개가 있으므로 가장 큰 정육면체의 부피는

$$4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$$

❷ ❶에서

$$1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)}{3}$$
$$=\frac{4(4+1)(2\times4+1)}{6}$$

따라서 같은 방법으로

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

임을 알 수 있다.

Ⅲ-2 중단원 마무리하기 151~153쪽

01 (1) $\sum_{k=1}^{9}3k$ (2) $\sum_{k=1}^{30}(2k+3)$ (3) $\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{(k+1)(k+2)}$

02 (1) -13 (2) 71

03 (1) 60 (2) 403 (3) 172 (4) 270

04 $\frac{25}{51}$ **05** 70

06 (1) 270 (2) 45 (3) 3080 (4) 119

07 문제 이해 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k$$ ▶ 40 %

해결 과정 즉, $\sum_{k=1}^{2n}a_k=2n^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{30}a_k=2\times15^2=450,\ \sum_{k=1}^{10}a_k=2\times5^2=50$$ ▶ 40 %

답 구하기 $\sum_{k=11}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k$

$$=450-50=400$$ ▶ 20 %

08 (1) $\frac{n}{3n+1}$ (2) $\frac{2n}{n+1}$

09 4

10 $\sum_{k=1}^{30}\log_5\{\log_{k+1}(k+2)\}$

$$=\log_5(\log_2 3)+\log_5(\log_3 4)+\log_5(\log_4 5)+\cdots+\log_5(\log_{31}32)$$
$$=\log_5(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{31}32)$$
$$=\log_5\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log 32}{\log 31}\right)$$
$$=\log_5\left(\frac{\log 32}{\log 2}\right)=\log_5(\log_2 32)$$
$$=\log_5(\log_2 2^5)=\log_5 5$$
$$=1$$

11 $\sum_{k=1}^{99}k(a_k-a_{k+1})$

$$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+99(a_{99}-a_{100})$$
$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}-99a_{100}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}a_k-99a_{100}=16-99\times\frac{1}{11}$$
$$=16-9$$
$$=7$$

12 문제 이해 수열 $1\times n,\ 2\times(n-1),\ 3\times(n-2),\ \cdots$의 제$k$항은

$$a_k=k\{n-(k-1)\}=k(n-k+1)$$ ▶ 40 %

해결 과정 이때 주어진 합은 수열 $\{a_k\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(nk-k^2+k)$$
$$=n\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 $a=1,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=1$이므로 $a+b=3$ ▶ 10 %

13 n행에 나열되는 수들의 합은 첫째항이 n, 공차가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_n=\frac{n\{2n+(n-1)\times n\}}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2+\frac{10\times 11\times 21}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(3025+385)$$
$$=1705$$

3 수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의 155~156쪽

준비하기 (1) -3 (2) 2

생각 열기 ❶ $9,\ 27,\ 81$ ❷ $a_{n+1}=3a_n$

문제 1 20

문제 2 (1) 91 (2) 2×5^{30}

문제 3 2

탐구 & 융합 157쪽

(1) $a_{n+1}=a_n+n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (2) 45

02 수학적 귀납법 158~161쪽

준비하기 $1+3a+3a^2+a^3$

생각 열기 ❶ $1,\ 2,\ 3,\ 4$ ❷ n

함께하기 $1,\ 1,\ k^2,\ (k+1)^2$

문제 1 (1) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $n=1$일 때

$(\text{좌변})=1\times 2=2$, $(\text{우변})=\dfrac{1\times 2\times 3}{3}=2$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$n=k+1$일 때

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

(2) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$=\frac{n}{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$
$$(\text{우변})=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{k}{k+1}$$

$n=k+1$일 때

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 2 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ …… ①

(ⅰ) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(\text{우변})=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

이때 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$이므로, $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$일 때

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$
$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

이때 $k\geq2$이므로

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

에서 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

즉, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

생각 넓히기 ❶

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64

❷ 5

❸ $2^n>n^2$ …… ①

(ⅰ) $n=5$일 때

$$(\text{좌변})=2^5=32$$
$$(\text{우변})=5^2=25$$

따라서 $n=5$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq5)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$2^k>k^2$$

$n=k+1$일 때

$$2^{k+1}=2\times2^k>2k^2 \quad \cdots\cdots ②$$

이때 $k\geq5$이므로

$$k^2\geq5k=2k+3k$$
$$>2k+1 \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③에서

$$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2$$
$$>k^2+2k+1=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

Ⅲ-3 중단원 마무리하기 163~165쪽

01 (1) 22 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 19 (4) 26

02 (가) 2 (나) 2 (다) k (라) $k(k+1)$

03 14

04 $a_1=110,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+30\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

05 -16

06 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{n}{2n+1}$ …… ①

(ⅰ) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$$

$$(\text{우변})=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다. ▶ 30 %

(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}$$

$n=k+1$일 때

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다. ▶ 70 %

07 (가) 2 (나) $k+4$ (다) $k+4$ (라) $k+1$

08 $a_1=1$

$a_2=9^1\times a_1=9^1$

$a_3=9^2\times a_2=9^2\times9^1=9^{1+2}$

$a_4=9^3\times a_3=9^3\times9^{1+2}=9^{1+2+3}$

$a_5=9^4\times a_4=9^4\times9^{1+2+3}=9^{1+2+3+4}$

⋮

$a_{10}=9^{1+2+3+\cdots+9}=9^{45}$

이므로

$$\log_3 a_{10}=\log_3 9^{45}=\log_3 (3^2)^{45}$$
$$=\log_3 3^{90}$$
$$=90$$

09 (1) (i) $n=1$일 때 $4^1-1=3$은 3의 배수이다.

따라서 $n=1$일 때 4^n-1은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때 4^k-1이 3의 배수라 가정하면

$4^k-1=3m$ (m은 자연수)

이므로 $4^k=3m+1$

$n=k+1$일 때

$$4^{k+1}-1=4\times4^k-1=4(3m+1)-1$$
$$=4\times3m+3$$
$$=3(4m+1)$$

이므로 $4^{k+1}-1$도 3의 배수이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 4^n-1은 3의 배수이다. ▶ 50 %

(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ …… ①

(i) $n=2$일 때

$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$

$(\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

$n=k+1$일 때

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때 $k\ge2$이므로

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$$

에서 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

즉,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다. ▶ 50 %

III 대단원 평가하기 166~169쪽

01 10 **02** ④

03 주어진 등차수열의 일반항은

$$a_n=31+(n-1)\times(-5)=-5n+36$$

$-5n+36<0$에서

$$n>\frac{36}{5}=7.2$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_7=-5\times7+36=1$이므로 S_n의 최댓값은

$$S_7=\frac{7\times(31+1)}{2}=112$$

04 3 **05** 7

06 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이가 9이므로
첫 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9\times\frac{8}{9}$$

두 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}=9\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{8}{9}=9\times\left(\frac{8}{9}\right)^3$$

⋮

n번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는 $9\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$
따라서 12번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

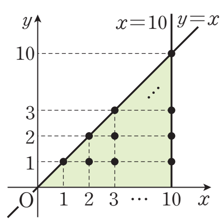
$$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^{12}=\frac{8^{12}}{9^{11}}$$

이므로 옳은 것은 ②이다.

07 68 **08** 4

09 20 **10** 100

11 주어진 부분에 속한 점 중에서 x, y좌표가 모두 자연수인 점을 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때,
(1, 1)의 1개
$x=2$일 때,
(2, 1), (2, 2)의 2개
$x=3$일 때,
(3, 1), (3, 2), (3, 3)의 3개
⋮
$x=10$일 때,
(10, 1), (10, 2), (10, 3), ⋯, (10, 10)의 10개
따라서 구하는 점의 개수는

$$1+2+3+\cdots+10=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times11}{2}=55$$

이므로 옳은 것은 ④이다.

12 ③ **13** $\frac{10}{21}$

14 192

15 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 영역이 생긴다.
즉, $(n+1)$개의 직선으로 나누어지는 영역은 n개의 직선으로 나누어지는 영역보다 $(n+1)$개가 많으므로

$$a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$a_3=7$이므로

$$a_4=a_3+3+1=7+4=11$$
$$a_5=a_4+4+1=11+5=16$$
$$a_6=a_5+5+1=16+6=22$$
$$a_7=a_6+6+1=22+7=29$$

16 ②

17 (가) $>$ (나) a^kb+ab^k

18 문제 이해 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$$ ▶ 20 %

해결 과정 주어진 식을 유리화하면

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{12}}+\sqrt{a_{13}}}$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}}{a_{13}-a_{12}}$$ ▶ 20 %

이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{13}-a_{12}=4$$

이다. 따라서

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}}{a_{13}-a_{12}}$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{4}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{4}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}}{4}$$ ▶ 30 %

답 구하기 $a_n=4n-3$에서

$$a_1=1,\ a_{13}=4\times13-3=49$$

이므로 주어진 식의 값은

$$\frac{\sqrt{49}-\sqrt{1}}{4}=\frac{7-1}{4}=\frac{3}{2}$$ ▶ 30 %

19 해결 과정 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=8$에서

$$a+ar+\cdots+ar^9=a(1+r+\cdots+r^9)$$
$$=8 \quad \cdots\cdots ①$$

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=24$에서

$$ar^{10}+ar^{11}+\cdots+ar^{19}=ar^{10}(1+r+\cdots+r^9)$$
$$=24 \quad \cdots\cdots ②$$

②÷①을 하면

$$r^{10}=3$$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}&=ar^{20}+ar^{21}+\cdots+ar^{29}\\&=ar^{20}(1+r+\cdots+r^9)\\&=a(1+r+\cdots+r^9)\times r^{20}\\&=8\times3^2\\&=72\end{aligned}$$ ▶ 60 %

20 문제 이해 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k+\beta_k=2k,\quad \alpha_k\beta_k=3k$$ ▶ 20 %

해결 과정

$$\begin{aligned}\alpha_k^2+\beta_k^2&=(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k\\&=(2k)^2-2\times3k\\&=4k^2-6k\end{aligned}$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}&\sum_{k=3}^{8}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\\&=\sum_{k=3}^{8}(4k^2-6k)\\&=\sum_{k=1}^{8}(4k^2-6k)-\sum_{k=1}^{2}(4k^2-6k)\\&=\left(4\times\frac{8\times9\times17}{6}-6\times\frac{8\times9}{2}\right)\\&\qquad-\left(4\times\frac{2\times3\times5}{6}-6\times\frac{2\times3}{2}\right)\\&=600-2\\&=598\end{aligned}$$ ▶ 50 %

21 (1) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$이므로

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5}$$

따라서 일반항은

$$a_n=\frac{n}{n+1}$$

으로 추측할 수 있다. ▶ 40 %

(2) $a_n=\frac{n}{n+1}$ ⋯⋯ ①

(ⅰ) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=a_1=\frac{1}{2}$$

$$(\text{우변})=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$a_k=\frac{k}{k+1}$$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}}\\&=\frac{k+1}{k+2}\\&=\frac{k+1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다. ▶ 60 %