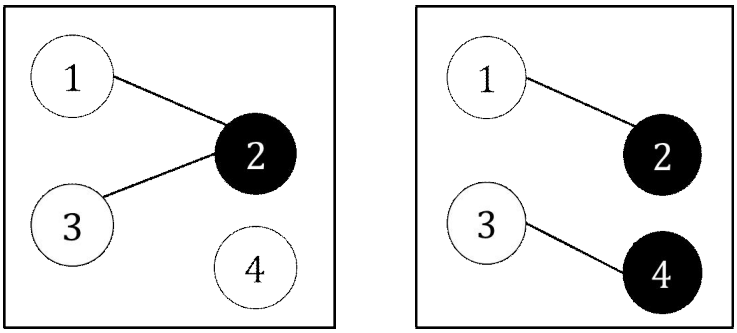
수학

※ 시작 전 반드시 쪽 번호를 확인하시오.

문제 1. 1 부터 n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n 개의 공과, k 개의 줄이 있다. (단, 줄은 구분하지 않는다.) 각각의 공을 검정색 또는 흰색으로 색칠하고 줄을 모두 이용하여 아래의 조건을 만족하도록 공들을 연결하는 경우의 수를 $a_{n,k}$ 라고 하자.

(i) 각각의 줄은 서로 다른 색깔의 한 쌍의 공만 연결한다.
(ii) 한 쌍의 공 사이에는 기껏해야 한 개의 줄만 연결된다.

예를 들어, $n=4, k=2$ 일 때는 아래와 같은 경우를 포함한다.



1-1. 경우의 수 $a_{n,k}$ 를 구하는 식을 찾으시오.

1-2. 문제 1-1 에서 구한 $a_{n,k}$ 개의 경우 중에서, 어떠한 공에서 출발해도 적절한 줄들을 따라가면 다른 모든 공에 도착할 수 있는 경우의 수를 $b_{n,k}$ 라고 하자. 이 때, $b_{6,6}$ 을 구하시오.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

문제 2. 직각삼각형 ABC (단, $\angle C = 90^\circ$)에서 $u = \overline{AC} / \overline{BC}$라고 하자. 삼각형 ABC의 내부와 그 경계를 T라 할 때, 삼각형 ABC의 한 변에 중심이 있고 절반이 T에 포함되는 원 중에서 가장 큰 것을 ω_1이라고 하자. 이제 원 $\omega_1, \cdots, \omega_n$이 만들어졌을 때, 다음 세 가지 조건을 만족하도록 원 ω_{n+1}을 만들자.

(i) ω_{n+1}의 절반은 T에 포함된다.
(ii) ω_{n+1}과 ω_n은 외접하고 각각의 중심은 삼각형 ABC의 서로 다른 두 변 위에 있다.
(iii) 점 B와 ω_n의 중심을 이은 선분은 ω_{n+1}과 만난다.

이렇게 만들어진 원 $\omega_1, \omega_2, \cdots$에 대하여, 원 ω_n의 반지름을 r_n이라고 하자.

2-1. $r_1 / \overline{BC}$를 u에 대한 식으로 표현하시오.

2-2. 모든 양의 정수 n에 대하여

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

을 u에 대한 식으로 표현하시오.

2-3. T에는 포함되나 어떠한 $n = 1, 2, \cdots$에 대해서도 원 ω_n의 내부에는 포함되지 않는 점들로 이루어진 영역을 X라고 하자. u의 값이 주어졌을 때

$$A = \frac{(X\text{의 넓이})}{(T\text{의 넓이})}$$

의 값을 계산할 수 있는 방법을 설명하시오.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

문제 3. 1 보다 큰 유리수 x 가

$$x = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{s-1} - \cfrac{1}{b_s}}}}$$ (단, $b_1, \cdots, b_s$ 는 1 보다 큰 자연수이다.)

로 표현되면, $x = \langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$로 나타내고 $\langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$를 x 의 계단식 이라고 하자.

예를 들어, $\frac{25}{9} = 3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{2}}$ 이므로 $\frac{25}{9}$ 의 계단식은 $\langle 3, 5, 2 \rangle$ 이다.

3-1. 자연수 $p > q$ 에 대하여 $\frac{p}{q}$ 의 계단식 $\langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$ 가 존재함을 보이시오.

3-2. 1 보다 큰 자연수 p 에 대하여 $\frac{p^2}{p-1}$ 의 계단식을 구하시오.

3-3. 문제 1-2 에서 구한 $\frac{p^2}{p-1}$ 의 계단식 $\langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$ 에 대하여,

유리수 $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{s+1}$ 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) $q_0 = 2,\ q_{s+1} = 1$

(ii) $q_{i-1} + q_{i+1} = b_i q_i \ (1 \le i \le s)$

이 때, q_1 을 구하시오.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

문제 4. 다음 부등식을 만족하는 좌표평면의 점 (x, y) 로 이루어진 집합을 X 라고 하자.

$$y \le 2x, \quad x \ge 1, \quad y \ge -x+2, \quad y \ge -1$$

4-1. 점 Q 가 X 에서 움직일 때, $\overline{OQ}$ 의 최솟값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

4-2. 점 (a, b) 가 X 에서 움직일 때 $\left| \dfrac{ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$ 의 최솟값을 $f(x, y)$ 라고 하자. (단, $(x, y) \neq (0, 0)$ 이다.)

점 (x, y) 가 원점을 제외한 좌표평면 위에서 움직일 때 $f(x, y)$ 의 최댓값을 구하시오.

문제 5. 집합 $S = \{1, -1, i, -i\}$ 가 있다고 하자. 원탁에 n 명의 학생들이 각각 한 장의 빈 종이를 들고 같은 간격으로 둘러앉아 있다. 그리고 학생들이 각자 S 에서 원소 하나를 골라 자신이 가지고 있는 종이에 썼다. (단, $i = \sqrt{-1}$ 을 뜻한다.)

5-1. 어떠한 이웃한 두 학생이 쓴 수의 합도 0 이 되지 않는 경우의 수를 구하시오. (예를 들어 $n = 5$ 일 때, 아래 그림 (i)과 (ii)는 허용되지만 그림 (iii)은 허용되지 않는다.)

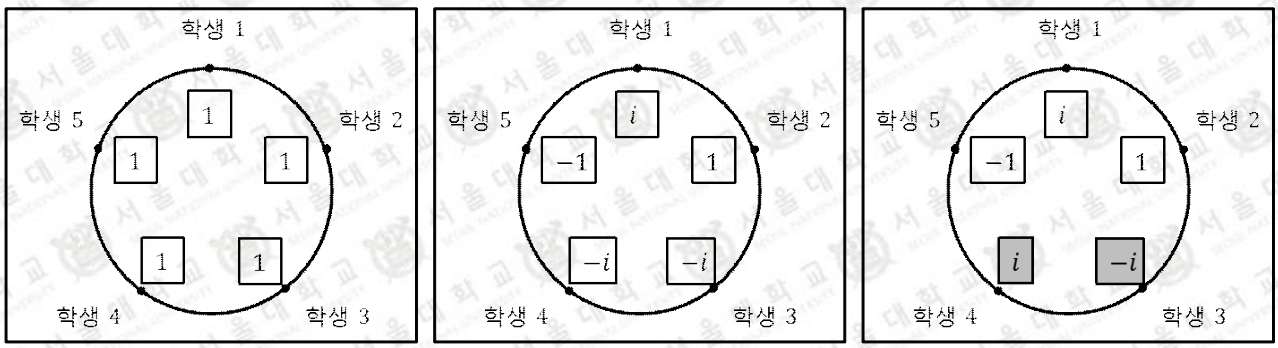


그림 (i) 그림 (ii) 그림 (iii)

5-2. 학생들이 문제 1-1의 조건을 만족하도록 원소들을 썼다고 하자. 각 $x \in S$ 에 대하여 A_x 와 B_x 를 다음과 같이 정의하자.

(i) 자신의 오른쪽에 있는 학생은 ix 를, 자신은 x 를 쓴 학생의 수는 A_x 이다.

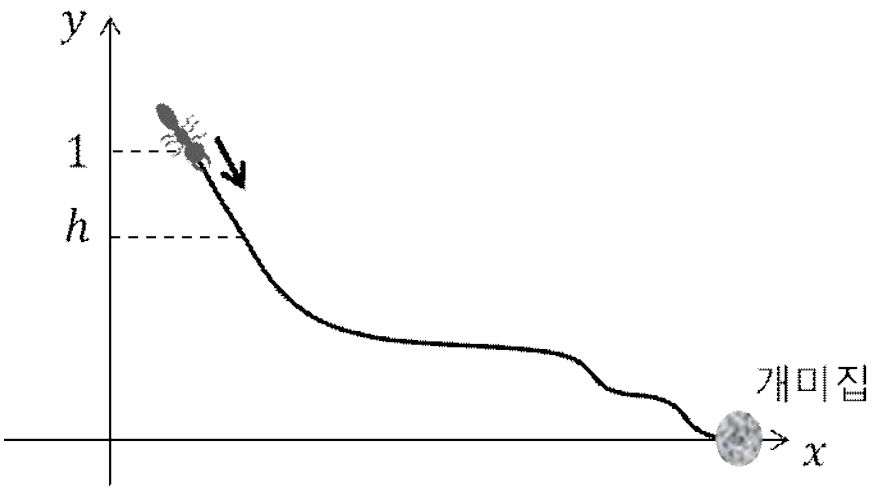
(ii) 자신의 왼쪽에 있는 학생은 ix 를, 자신은 x 를 쓴 학생의 수는 B_x 이다.

이 때, 다음 관계식이 성립함을 보이시오.

$$A_1 - B_1 = A_{-1} - B_{-1} = A_i - B_i = A_{-i} - B_{-i}$$

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

문제 6.



위 그림과 같이 좌표평면 위의 곡선을 따라 개미가 집으로 가고 있다. 이 곡선은 x 에 대해 미분가능한 감소함수의 그래프이며 x 축과 한 점(개미집)에서 만난다. 개미는 시각 $t=0$ 일 때 곡선의 y 좌표가 1 인 점에서 집을 향해 이동하기 시작하고, 집에 도착할 때까지 멈추지 않는다. 개미의 y 좌표가 h 인 점에서 집까지 곡선의 길이를 $S(h)$ 라고 하자.

6. 시각 $t>0$ 일 때 개미의 y 좌표 $y(t)$ 는 미분가능하며, $s(t)=(S\circ y)(t)$ 라고 하자.
개미의 운동에너지를 계산한 결과, 개미가 집에 도착할 때까지 다음 등식

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=y(t)^2-3y(t)+2$$

가 성립한다는 것을 알게 되었다.

$$A(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}S(1-y)\frac{2y+1}{(y^2+y)^{3/2}}dy$$

일 때, 개미가 $y=\frac{1}{3}$ 인 위치에서부터 집에 도착할 때까지 걸리는 시간을 $S(h)$ 와 $A(\alpha,\beta)$ 의 함숫값으로 나타내시오.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

활용 모집단위	활용 문항
사회과학대학 경제학부(오전), 경영대학, 농업생명과학대학 농경제사회학부 생활과학대학(소비자아동학부, 의류학과), 자유전공학부(수학1-오전)	[문제 1], [문제 2]
사회과학대학 경제학부(오후), 자유전공학부(수학 1-오후)	[문제 3], [문제 4]
자연과학대학(수리과학부, 통계학과), 공과대학, 사범대학 수학교육과	[문제 2], [문제 5], [문제 6]
농업생명과학대학(조경 · 지역시스템공학부, 바이오시스템 · 소재학부), 자유전공학부(수학 2)	[문제 2], [문제 5]

1.

[출제의도] 고교 교과과정에서 배우는 경우의 수에 관한 계산 능력 평가

[개념] 경우의 수의 합의 법칙과 곱의 법칙 및 조합

[출처] 김해경 외, "Ⅳ. 순열과 조합, 1-1. 경우의 수", 《고등학교 수학》, 더텍스트, 156쪽.
신항균 외, "Ⅷ. 순열과 조합, 1-(1) 경우의 수",《고등학교 수학》, 지학사, 288쪽.
신항균 외, "Ⅷ. 순열과 조합, 1-(3) 조합",《고등학교 수학》, 지학사, 297쪽.
허민 외, "Ⅶ. 순열과 조합, 1-1. 경우의 수",《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 303쪽.
허민 외, "Ⅶ. 순열과 조합, 1-3. 조합",《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 313쪽.

2-1, 2-2.

[출제의도] 삼각함수의 성질, 무한등비급수의 합, 외접하는 원의 성질을 이해하고 있는지 평가

[개념] 도형의 닮음, 삼각형의 내접원

[출처] 강신덕 외, "Ⅷ. 도형의 닮음, 2-3. 닮음의 응용", 《중학교 수학 2》, 교학사, 235쪽.
강신덕 외, "Ⅴ. 피타고라스의 정리, 2-1. 평면도형에의 활용", 《중학교 수학 3》, 교학사, 129쪽.
강신덕 외, "Ⅵ. 삼각비, 2-1. 길이 구하기", 《중학교 수학 3》, 교학사, 153쪽.
신항균 외, "Ⅲ. 식의 계산, 1-(1) 다항식의 사칙연산", 《고등학교 수학》, 지학사, 64쪽.
신항균 외, "Ⅲ. 식의 계산, 2-(2) 무리식과 그 계산", 《고등학교 수학》, 지학사, 93쪽.
허민 외, "Ⅱ. 식과 연산, 1-1. 다항식과 그 연산", 《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 53쪽.
허민 외, "Ⅴ. 함수, 3-2. 무리함수", 《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 244쪽.

2-3.

[출제의도] 삼각함수의 성질, 무한등비급수의 합, 외접하는 원의 성질을 이해하고 있는지 평가

[개념] 도형의 닮음, 등비수열, 무한등비급수

[출처] 이동원 외, "Ⅴ. 수열의 극한, 2-2. 무한등비급수", 《수학Ⅰ》, 법문사, 177쪽.
황석근 외, "Ⅴ. 수열의 극한, 2-2. 무한등비급수의 합", 《수학Ⅰ》, 교학사, 168쪽.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

3-1.

[출제의도] 자연수의 나눗셈에 대한 기본적인 성질을 이해하는지에 대한 평가

[개념] 자연수의 성질

[출처] 강신덕 외, "Ⅱ. 정수와 유리수, 2-3. 유리수의 사칙계산",《중학교 수학 1》, 교학사 79쪽.
신항균 외, "Ⅲ. 식의 계산, 2-(1) 유리식과 그 계산,《고등학교 수학》, 지학사, 88쪽.
허민 외, "Ⅱ. 식과 연산, 2-1. 유리식"《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 76쪽.

3-2.

[출제의도] 자연수의 나눗셈에 대한 기본적인 성질을 이해하는지에 대한 평가

[개념] 다항식과 그 연산

[출처] 김해경 외, "Ⅱ. 식의 계산, 1-1. 다항식과 그 연산",《고등학교 수학》, 더텍스트, 68쪽.
신항균 외, "Ⅲ. 식의 계산, 1-(1) 다항식의 사칙연산,《고등학교 수학》, 지학사, 64쪽.
허민 외, "Ⅱ. 식과 연산, 1-1. 다항식과 그 연산"《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 53쪽.

3-3.

[출제의도] 점화식 수열 또는 행렬 계산 능력 평가

[개념] 여러 가지 수열, 행렬의 곱셈

[출처] 최용준 외, "Ⅲ. 수열, 6-2. 계차수열",《수학Ⅰ》, 천재교육, 147쪽.
황석근 외, "Ⅳ. 수열, 2-2. 여러 가지 수열",《수학Ⅰ》, 교학사, 127쪽.
김해경 외, "Ⅲ. 수열, 2-2. 계차수열",《수학Ⅰ》, 더텍스트, 139쪽.
김해경 외, "Ⅰ. 행렬, 1-3. 행렬의 곱셈",《수학Ⅰ》, 더텍스트, 20쪽.
이강섭 외, "Ⅰ. 행렬과 그래프, 1. 행렬과 그 연산",《수학Ⅰ》, 지학사, 12쪽.

4-1.

[출제의도] 부등식의 영역을 이해하고, 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가

[개념] 부등식의 영역의 활용, 두 점 사이의 거리

[출처] 김해경 외, "Ⅴ. 좌표와 도형, 1-1. 두 점 사이의 거리",《고등학교 수학》, 더텍스트, 180쪽.
김해경 외, "Ⅴ. 좌표와 도형, 5-2. 부등식의 영역의 활용",《고등학교 수학》, 더텍스트, 238쪽.
신항균 외, "Ⅴ. 도형의 방정식, 1-(1). 두 점 사이의 거리",《고등학교 수학》, 지학사, 140쪽.
신항균 외, "Ⅴ. 도형의 방정식, 5-(2). 부등식의 영역에서의 최대, 최소",《고등학교 수학》, 지학사, 188쪽.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.

4-2.

[출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있고, 최댓값과 최솟값의 개념을 잘 이해하는지를 평가한다.

[개념] 점과 직선 사이의 거리

[출처] 김해경 외, "Ⅴ. 좌표와 도형, 2-3. 점과 직선 사이의 거리",《고등학교 수학》, 더텍스트, 202쪽.
신항균 외, "Ⅴ. 도형의 방정식, 2-(2) 두 직선의 평행과 수직",《고등학교 수학》, 지학사, 154쪽.
허민 외, "Ⅳ. 도형의 방정식, 2-3. 점과 직선 사이의 거리",《고등학교 수학》, 중앙교육진흥연구소, 158쪽.

5.

[출제의도] 고교 교과과정에서 배우는 경우의 수에 관한 계산 능력 평가

[개념] 중복순열, 계차수열

[출처] 계승혁 외, "Ⅱ. 확률, 1-1 순열과 조합",《고등학교 적분과 통계》, 성지출판, 87쪽.
이준열 외, "Ⅱ. 순열과 조합, 1 순열과 조합",《고등학교 적분과 통계》, 천재교육, 76쪽.
황석근 외, "Ⅳ. 수열, 02-2 여러 가지 수열",《고등학교 수학 Ⅰ》, 교학사, 130쪽.
최용준 외, "Ⅲ. 수열, 6-2 계차수열",《고등학교 수학 Ⅰ》, 천재교육, 147쪽.

6.

[출제의도] 자연계열 교과과정에서 배우는 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법, 곡선의 길이, 부분적분과 치환적분의 원리를 잘 이해하여 적용시킬 수 있는지를 평가

[개념] 합성함수의 미분, 역함수의 미분, 곡선의 길이, 부분적분, 치환적분

[출처] 정상권 외, "Ⅳ 미분법, 3-2 합성함수의 미분법",《고등학교 수학 Ⅱ》, 교학사, 134쪽.
정상권 외, "Ⅳ 미분법, 3-3 음함수와 역함수의 미분법",《고등학교 수학 Ⅱ》, 교학사, 137쪽.
이준열 외, "Ⅰ 적분법, 1-2 치환적분법",《고등학교 적분과 통계》, 천재교육, 21쪽.
이준열 외, "Ⅰ 적분법, 1-3 부분적분법",《고등학교 적분과 통계》, 천재교육, 25쪽.

이 문서는 상업적인 목적으로 사용할 수 없으며, 문서의 변형 및 발췌도 금지합니다.