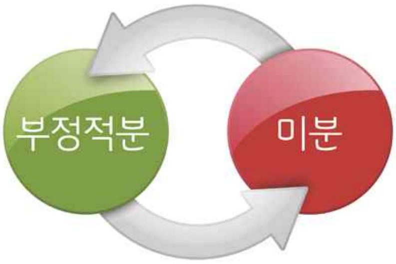
Ⅲ_1. 부정적분과 정적분

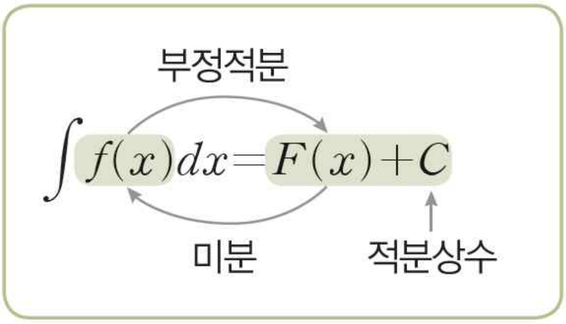
[12수학Ⅱ03-01] 부정적분의 뜻을 안다.

[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

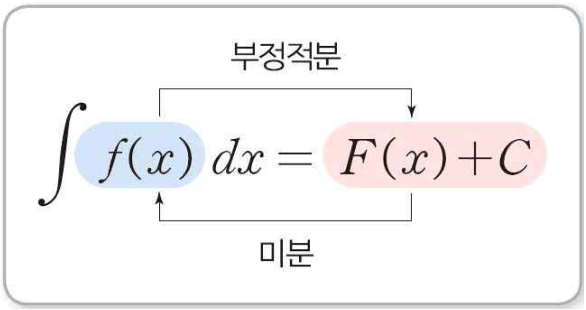
[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.





$\boxed{1}$ 부정적분의 정의 ❶



(1) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$, 즉 $F'(x) = f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 '부정적분'이라 하고, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 '적분한다'고 한다.

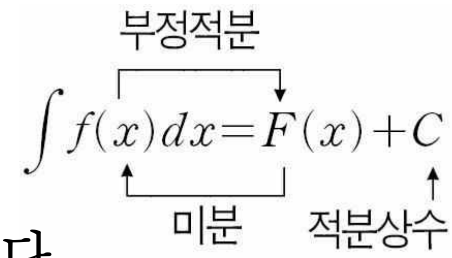
(2) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 모든 부정적분은

$$F(x) + C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)\,dx$와 같이 나타낸다. 즉,

1 부정적분의 정의 ❷

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$



이다. 이때 상수 C를 '적분상수'라고 한다.

☑ (1) 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면 $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\{G(x) - F(x)\}' &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0\end{aligned}$$

이때 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라 하면

$$G(x) - F(x) = C,\ \text{즉}\ G(x) = F(x) + C$$

1 부정적분의 정의 ❸

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$

② $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = f(x) + C$

(단, C는 적분상수)

2 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)와 함수 $y=1$의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(단, C는 적분상수)

(2) $\int 1\,dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

☑ $\int 1\,dx=\int dx$로 나타내기도 한다.

3 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분 ❶

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때,

(1) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)\,dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int f(x)dx-\int g(x)\,dx$

☑ (2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하면

$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$

이므로

③ 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분 ❷

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x)+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$= \{F(x)+C_1\}+\{G(x)+C_2\}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$$= F(x)+G(x)+C_1+C_2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 우변에서 C_1+C_2는 임의의 상수이므로

$C_1+C_2=C$로 놓으면 ㉠, ㉡에서

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

✡ 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

(1) $\int k\,dx = kx + C$ (단, k는 상수)

(2) $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$, n은 유리수)

(3) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(4) $\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(5) $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} \times \dfrac{1}{a} + C$

↳ 일차식일 때만 가능 / 이차 이상은 전개

4 정적분의 정의

두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(b)-F(a)$를 '함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분'이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

와 같이 나타낸다. 또 $F(b)-F(a)$를 기호

$$\Big[\,F(x)\Big]_a^b$$

로도 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

☑ (1) 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분일 때, $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)이므로

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \{G(b)+C\}-\{G(a)+C\} \\ &= G(b)-G(a) \end{aligned}$$

이다. 즉, $\int_a^b f(x)\,dx$의 값은 $f(x)$의 부정적분을 어느 것으로 택하더라도 일정하다.

(2) 정적분의 정의에서

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$

5 정적분과 미분의 관계 ❶

함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ (단, $a < x < b$)

☑ 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면
$f(t)$의 a에서 x ($a < x < b$)까지의 정적분은

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$ 이므로

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\}$$
$$= F'(x) - 0 = f(x)$$

5 정적분과 미분의 관계 ❷

예 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \left(t^2 + 2t\right)dt = x^2 + 2x$

☑ 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = -f(x)$$

(단, $a < x < b$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,dt = f(x+a) - f(x)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$

$$= f(b(x)) \times b'(x) - f(a(x)) \times a'(x)$$

5 정적분과 미분의 관계 ❸

(4) ① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x t\times f(t)\,dt = xf(x)$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x x\times f(t)\,dt$

$$= \frac{d}{dx}\left\{x\times\int_a^x f(t)\,dt\right\}$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + x\times f(x)$$

6 정적분의 성질 ❶

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

① $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

② $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

③ $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

☑ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하자.

① 상수 k에 대하여 $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$이므로

$\boxed{6}$ 정적분의 성질 ❷

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \Big[\ kF(x)\Big]_a^b$$
$$= kF(b) - kF(a) = k\{F(b) - F(a)\}$$
$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

② $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \Big[\ F(x) + G(x)\Big]_a^b$$
$$= \{F(b) + G(b)\} - \{F(a) + G(a)\}$$
$$= \{F(b) - F(a)\} + \{G(b) - G(a)\}$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{6}$ 정적분의 성질 ❸

예 $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + 3x\right)dx - \int_1^2 \left(x^2 - x\right)dx$

$$= \int_1^2 \left\{\left(x^2 + 3x\right) - \left(x^2 - x\right)\right\}dx$$

$$= \int_1^2 4x\,dx = \Big[\ 2x^2\Big]_1^2 = 8 - 2 = 6$$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

6 정적분의 성질 ❹

☑ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\Big]_a^c+\Big[\,F(x)\Big]_c^b$$

$$=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

예 $\displaystyle\int_0^1(6x+1)\,dx+\int_1^2(6x+1)\,dx=\int_0^2(6x+1)\,dx$

$$=\Big[\,3x^2+x\Big]_0^2=(12+2)-0=14$$

✡ 정적분의 성질 ❶

(0) $\Big[\,ax^3+bx^2+cx\Big]_\alpha^\beta$

$$=a\left(\beta^3-\alpha^3\right)+b\left(\beta^2-\alpha^2\right)+c(\beta-\alpha)$$

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$ ⇔ 아래끝과 위끝이 같으면 0

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

⇔ 아래끝과 위끝이 서로 바뀌면 부호가 반대

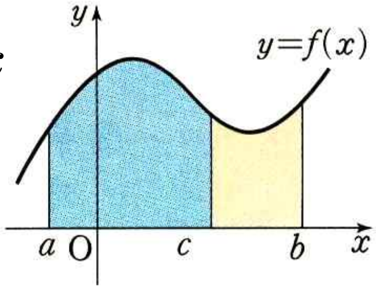
(3) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ (단, k는 상수)

✡ 정적분의 성질 ❷

(4) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

⇔ 구간이 같으면 식을 더하거나 뺄 수 있다.

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



⇔ 식이 같으면 구간을 연결할 수 있다.

(a, b, c의 대소와 관계없이 성립)

(6) $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

⇔ 아래끝과 위끝이 $f(x)=0$의 두 실근

✡ 정적분의 성질 ❸

(7) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ (평행이동)

$\displaystyle= \int_{a-d}^{b-d} f(x+d)\,dx$

(8) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ (대칭이동)

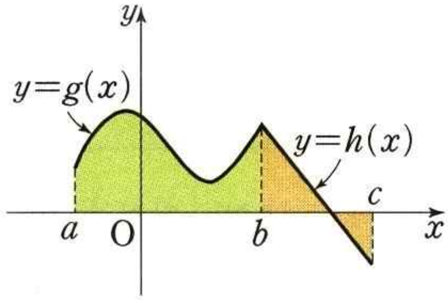
✡ 구간에 따라 다른 함수의 정적분

(1) 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

① (절댓값 안) $=0$이 되는 x의 값 $\Rightarrow x=c$

② $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c \pm f(x)\,dx+\int_c^b \pm f(x)\,dx$

(2) 범위에 따라 다른 함수의 정적분



① $f(x)=\begin{cases} g(x) & (a\le x\le b) \\ h(x) & (b\le x\le c) \end{cases}$

② $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx+\int_b^c h(x)\,dx$

7 다항함수의 성질을 이용한 정적분

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

(2) $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때,

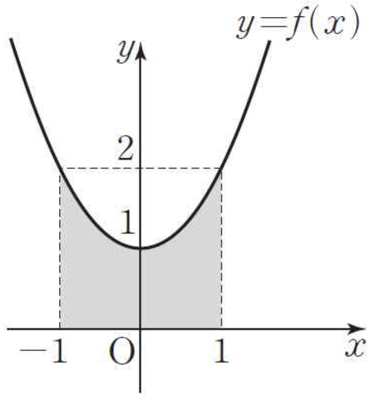
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

☑ (1) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2+1$은 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$$

를 만족시키고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다. 이때



$$\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}-0=\frac{4}{3}$$

에서 $\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,dx=\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx$이므로

$$\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx=2\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx=\frac{8}{3}$$

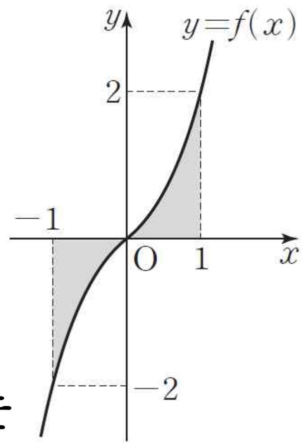
(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3+x$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)$$

$$=-x^3-x=-f(x)$$

를 만족시키고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.



$$\int_{-1}^{0}(x^3+x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$\int_{0}^{1}(x^3+x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$

에서 $\int_{-1}^{0}(x^3+x)\,dx=-\int_{0}^{1}(x^3+x)\,dx$이므로

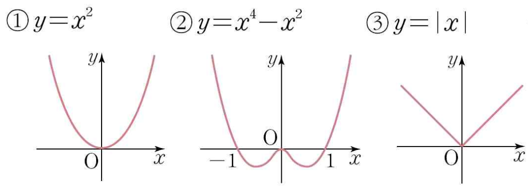
$$\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}(x^3+x)\,dx=0$$

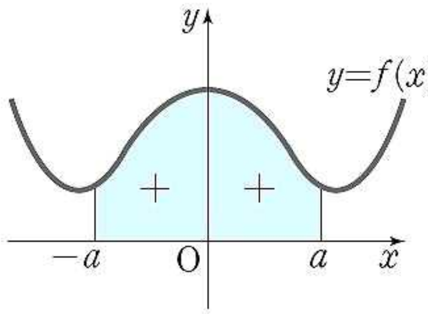
✡ 우함수와 기함수의 정적분

(1) $f(x)$가 우함수(y축 대칭) ⇔ $f(-x)=f(x)$

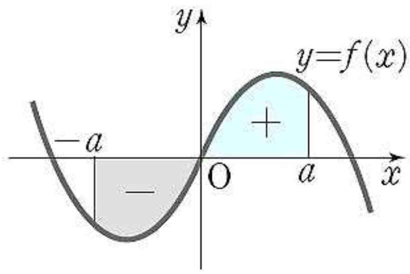
$$\Rightarrow \int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$



(1)

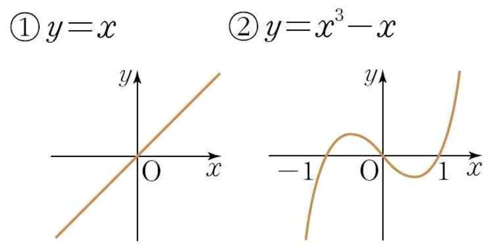


(2)



(2) $f(x)$가 기함수(원점 대칭) ⇔ $f(-x)=-f(x)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$



8 정적분으로 표시된 함수의 극한

함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속일 때,

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\,dt = f(a)$

(2) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(a)$

☑ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$

(2) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$

$= F'(a) = f(a)$

✡ 정적분으로 표현된 함수의 극한값 응용

(1) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a^n}^{x^n} f(t)\,dt = f\left(a^n\right) \times n a^{n-1}$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{a+ph}^{a+qh} f(t)\,dt = f(a) \times q - f(a) \times p$

(3) $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{\int_{a}^{x} f(t)\,dt} = \frac{1}{f(a)}$

✡ 정적분으로 표현된 함수의 결정 ❶

(1) $\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$의 꼴 (적분구간에 x가 있을 경우)

① x에 대하여 미분 $\Rightarrow f(x) = g'(x)$

② $x = a$를 대입 $\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = 0 \ \therefore \ g(a) = 0$

✡ 정적분으로 표현된 함수의 결정 ❷

(2) $f(x) = g(x) + \int_a^b f(t)\,dt$ (적분구간이 상수인 경우)

① $\int_a^b f(t)\,dt = k$ (k는 상수)로 치환

② $k = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \{g(t) + k\}\,dt$

✡ 정적분으로 표현된 함수의 결정 ❸

(3) $f(x)=g(x)+\int_a^b(x-t)f(t)\,dt$ 의 꼴

① $\int_a^b(x-t)f(t)\,dt=x\times\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^b tf(t)\,dt$

② $\int_a^b f(t)\,dt=p$, $\int_a^b tf(t)\,dt=q$ (단, p, q는 상수)

③ $f(x)=g(x)+px-q$ $\Rightarrow$ ②에 대입