정답 및 해설

수학 영역

정 답

1	④	2	②	3	①	4	④	5	③
6	①	7	⑤	8	③	9	①	10	⑤
11	②	12	①	13	②	14	③	15	④
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	③
21	②	22	16	23	11	24	6	25	8
26	9	27	30	28	14	29	54	30	225

해 설

1. [출제의도] 다항식 계산하기
$A+B=(x^2-x+1)+(-x^2+2x)=x+1$

2. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기
$a-1=2$, $a=3$, $b=-1$
따라서 $a+b=3+(-1)=2$

3. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{(-2)-1\}^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$

4. [출제의도] 복소수 계산하기
$(2+3i)(1-i)=(2+3)+(-2+3)i=5+i$
이므로 $a=5$, $b=1$
따라서 $a+b=5+1=6$

5. [출제의도] 좌표평면 위의 선분의 내분점 이해하기
세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-2, 5)$, $\mathrm{C}(3, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+(-2)+3}{3}, \frac{3+5+b}{3}\right)$이므로
$\frac{a+1}{3}=1$, $\frac{b+8}{3}=2$
$a=2$, $b=-2$
따라서 $a+b=2+(-2)=0$

6. [출제의도] 연립부등식 이해하기
$x+3<3x$에서 $x>\frac{3}{2}$ ⋯ ㉠
$3x+4<2x+8$에서 $x<4$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}<x<4$
$a=\frac{3}{2}$, $b=4$
따라서 $ab=\frac{3}{2}\times 4=6$

7. [출제의도] 인수분해 이해하기
$x^2+1=t$라 하면
$(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2=t^2+3t+2$
$=(t+1)(t+2)$
$=(x^2+2)(x^2+3)$
따라서 $a+b=2+3=5$

8. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기
부등식 $|2x-1|\le 5$에서 $-5\le 2x-1\le 5$
$-2\le x\le 3$
모든 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3이고
그 개수는 6

9. [출제의도] 점의 대칭이동 이해하기
점 $(1, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(a, 1)$이고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -1)$이므로
$a=2$, $b=-1$
따라서 $a+b=2+(-1)=1$

10. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기
원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=m(x-3)+1$
원의 중심 $(0, 0)$과 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같으므로
$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$
$(3m-1)^2=10(m^2+1)$
$m^2+6m+9=0$, $m=-3$
따라서 접선의 방정식은 $y=-3x+10$이므로
y절편은 10

11. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기
$\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2=0 & \cdots ㉠ \\ x+2y-10=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠의 좌변을 인수분해하면
$(2x-y)^2=0$, $y=2x$ ⋯ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x+2\times 2x-10=0$, $x=2$
$\alpha=2$, $\beta=4$
따라서 $\alpha+\beta=2+4=6$

12. [출제의도] 이차방정식의 허근 이해하기
계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이면 다른 한 근은 $\alpha=2+3i$이므로
$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{13}$
$a=\frac{2}{13}$, $b=-\frac{3}{13}$
따라서 $a+b=\frac{2}{13}+\left(-\frac{3}{13}\right)=-\frac{1}{13}$

13. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기
직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프와 만나므로 방정식
$x^2-2x+4=x+k$
$x^2-3x+4-k=0$ ⋯ ㉠
㉠의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-3)^2-4\times1\times(4-k)\ge 0$
$4k-7\ge 0$
$k\ge\frac{7}{4}$ ⋯ ㉡
직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프와 만나지 않으므로 방정식
$x^2-5x+15=x+k$
$x^2-6x+15-k=0$ ⋯ ㉢
㉢의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(-6)^2-4\times1\times(15-k)<0$
$4k-24<0$
$k<6$ ⋯ ㉣
㉡, ㉣에서
$\frac{7}{4}\le k<6$
따라서 모든 정수 k의 값은 2, 3, 4, 5이고
그 개수는 4

14. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용한 문제해결하기
이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$
또한 α, β가 이차방정식의 근이므로
$\alpha^2+2\alpha+3=0$에서 $\alpha^2+3\alpha+3=\alpha$,
$\beta^2+2\beta+3=0$에서 $\beta^2+3\beta+3=\beta$
따라서
$\frac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\frac{1}{\beta^2+3\beta+3}$
$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}$

15. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용한 문제해결하기
세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\,(a>0)$이라 하면
$f(x)=a(x+1)(x-1)$
$g(x)=-a(x+2)(x-1)$
$h(x)=a(x-1)(x-2)$
$f(x)+g(x)+h(x)$
$=a(x+1)(x-1)-a(x+2)(x-1)$
$\quad+a(x-1)(x-2)$
$=a(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}$
$=a(x-1)(x-3)$
방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서
$a(x-1)(x-3)=0$
$x=1$ 또는 $x=3$
따라서 모든 근의 합은 $1+3=4$

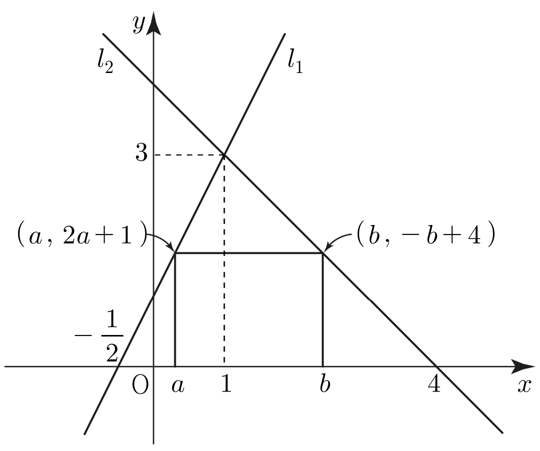
16. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용한 문제해결하기

두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 $(1, 3)$이고

각각의 x절편이 $-\frac{1}{2}$, 4이므로 x축 위에 있는 직사각형의 두 꼭짓점의 x좌표를 각각

a, $b\left(-\frac{1}{2}<a<1,\ 1<b<4\right)$라 하면

나머지 두 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 2a+1)$, $(b,\ -b+4)$이다.



두 꼭짓점의 y좌표가 같으므로

$2a+1=-b+4$, $b=-2a+3$

직사각형의 넓이는

$(b-a)(2a+1)=(-2a+3-a)(2a+1)$

$=-3(2a^2-a-1)$

이므로, 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

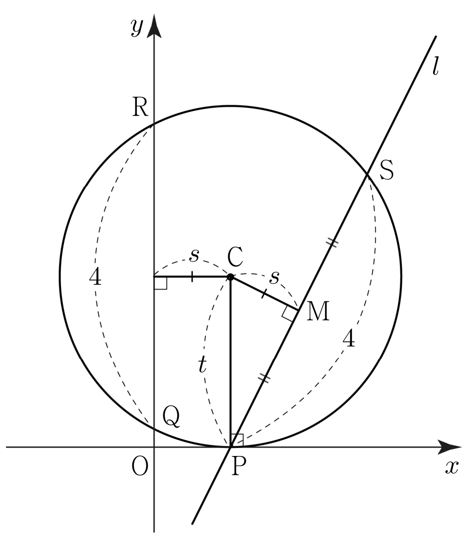
$-\frac{1}{2}<a<1$에서

$S(a)=-3(2a^2-a-1)=-6\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{27}{8}$

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$

17. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용한 문제해결하기

양수 s, t에 대하여 원의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(s,\ t)$라 하면 점 P의 좌표는 $(s,\ 0)$이다.



점 P를 지나고 기울기가 2인 직선을 l이라 하면

직선 l의 방정식은

$y-0=2(x-s)$, $2x-y-2s=0$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=4$에 의해 점 C와 y축 사이의 거리와 점 C와 직선 l 사이의 거리가 같으므로

$s=\frac{|2s-t-2s|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$, $t=\sqrt{5}s$ ⋯ ㉠

선분 PS의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{PM}}=2$, $\overline{\mathrm{CM}}=s$, $\overline{\mathrm{CP}}=t$이고

삼각형 CPM이 직각삼각형이므로

$t^2=s^2+4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $s=1$, $t=\sqrt{5}$이므로 원점 O와 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$

18. [출제의도] 직선의 방정식을 활용한 추론하기

점 P의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{n+1}\right)$,

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{n+1},\ 0\right)$

직선 AQ의 방정식은

$y=-(n+1)x+1$ ⋯ ㉠

직선 BP의 방정식은

$y=\boxed{-\frac{1}{n+1}}\times x+\frac{1}{n+1}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 점 R의 x좌표는 $\boxed{\frac{1}{n+2}}$이고

삼각형 POR의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\times\boxed{\frac{1}{n+2}}$이다.

두 삼각형 POR와 QOR는 합동이고

사각형 POQR의 넓이는 삼각형 POR의 넓이의 2배이므로

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+2}=\frac{1}{42}$에서 $n=\boxed{5}$이다.

그러므로

$f(n)=-\frac{1}{n+1}$, $g(n)=\frac{1}{n+2}$, $k=5$

따라서 $\frac{g(5)}{f(5)}=-\frac{6}{7}$

19. [출제의도] 선분의 내분을 활용한 문제해결하기

두 점 P, R의 좌표가 각각 $(-1,\ -3)$, $(b,\ b-2)$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(b+1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{2(b+1)^2}$

원점 O와 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

삼각형 OPR의 넓이가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2(b+1)^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{(b+1)^2}=3\sqrt{2}$

$b=3\sqrt{2}-1$ 또는 $b=-3\sqrt{2}-1$

$b>-1$이므로 $b=3\sqrt{2}-1$

점 R의 좌표는 $(3\sqrt{2}-1,\ 3\sqrt{2}-3)$

원 C_1과 원 C_2의 넓이의 비가 $1:4$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=1:2$

점 Q는 선분 PR를 $1:2$로 내분하는 점이므로

점 Q의 좌표는 $(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-3)$

$a=\sqrt{2}-1$

따라서 $a+b=(\sqrt{2}-1)+(3\sqrt{2}-1)=4\sqrt{2}-2$

20. [출제의도] 삼차방정식의 해를 이용한 추론하기

ㄱ. $z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=1$ (참)

ㄴ. ㄱ에 의해

$z^4+z^5=z+z^2$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의해 자연수 k에 대하여

$z=z^4=z^7=\cdots=z^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^2=z^5=z^8=\cdots=z^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^6=z^9=\cdots=z^{3k}=1$

(i) $n=3k-2$일 때,

$z^n=z^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^{2n}=z^{3(2k-1)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^{3n}=z^{3(3k-2)}=1$

$z^{4n}=z^{3(4k-2)-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^{5n}=z^{3(5k-3)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$

을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 1, 4, 7, ⋯, 100이고 그 개수는 34

(ii) $n=3k-1$일 때,

$z^n=z^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^{2n}=z^{3(2k)-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^{3n}=z^{3(3k-1)}=1$

$z^{4n}=z^{3(4k-1)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^{5n}=z^{3(5k-1)-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$

을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 2, 5, 8, ⋯, 98이고 그 개수는 33

(iii) $n=3k$일 때,

$z^n=z^{2n}=z^{3n}=z^{4n}=z^{5n}=1$

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=5$

이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$

을 만족시키는 100 이하의 자연수는 없다.

(i), (ii), (iii)에 의해

모든 자연수 n의 개수는 67 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. [출제의도] 두 점 사이의 거리를 활용한 문제해결하기

이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로

$(x-k)^2-2=2$, $(x-k)^2=4$

$x=k-2$ 또는 $x=k+2$

따라서 $\mathrm{A}(k-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(k+2,\ 2)$

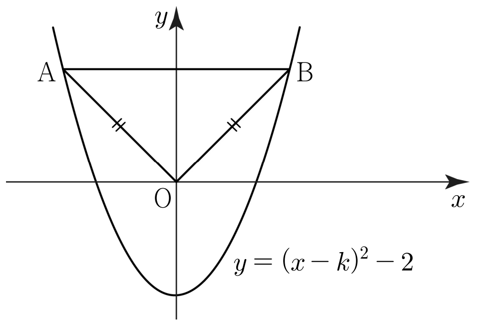
$\overline{\mathrm{AB}}=(k+2)-(k-2)=4$

삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되는 경우는

(i) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 인 경우

$\sqrt{(k-2)^2+2^2}=\sqrt{(k+2)^2+2^2}$

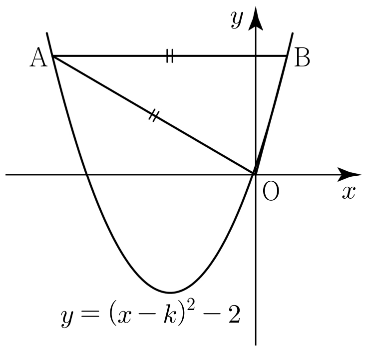
$(k-2)^2=(k+2)^2$, $k=0$



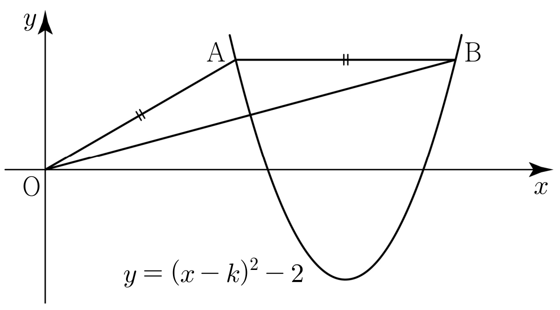
(ii) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$ 인 경우

$\sqrt{(k-2)^2+2^2}=4$, $k^2-4k-8=0$

$k=2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=2+2\sqrt{3}$



[$k=2-2\sqrt{3}$ 인 경우]

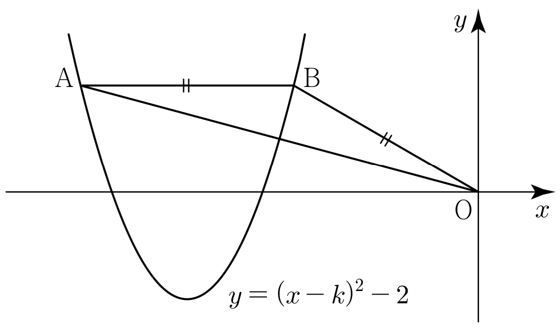


[$k=2+2\sqrt{3}$ 인 경우]

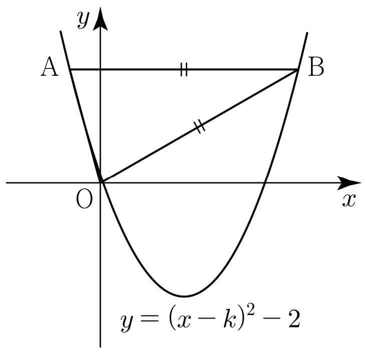
(iii) $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}$ 인 경우

$\sqrt{(k+2)^2+2^2}=4$, $k^2+4k-8=0$

$k=-2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2+2\sqrt{3}$



[$k=-2-2\sqrt{3}$ 인 경우]



[$k=-2+2\sqrt{3}$ 인 경우]

(i), (ii), (iii)에서 $n=5$, $M=2+2\sqrt{3}$

따라서 $n+M=5+(2+2\sqrt{3})=7+2\sqrt{3}$

22. [출제의도] 다항식의 나머지 계산하기

$f(x)=x^3+2x^2-x+2$ 라 하면 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=2^3+2\times 2^2-2+2=16$

23. [출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최솟값 계산하기

이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$ $(1\le x\le 4)$ 에서

$f(1)=-(-1)^2+15=14$

$f(2)=15$

$f(4)=-2^2+15=11$

이므로, 최솟값은 $x=4$ 일 때 11

24. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-24=0$ 의 판별식을 D 라 하면 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 $\dfrac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-24)>0$

$k^2-4k+4-(k^2-24)>0$, $k<7$

따라서 모든 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6 이고 그 개수는 6

25. [출제의도] 두 직선의 수직 조건 이해하기

직선 $3x+2y-4=0$ 의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이므로

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$ 이다.

수직인 직선이 점 $(2, 5)$ 를 지나므로

$y=\dfrac{2}{3}(x-2)+5$, $2x-3y+11=0$

$a=-3$, $b=11$

따라서 $a+b=(-3)+11=8$

26. [출제의도] 도형의 평행이동을 이용한 문제해결하기

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(-1, -2)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.

원 C 의 중심의 좌표는 $(-1+m, -2+n)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.

원 C 의 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는 중심의 좌표가 $(3, 3)$ 이어야 하므로

$-1+m=3$, $-2+n=3$

$m=4$, $n=5$

따라서 $m+n=4+5=9$

27. [출제의도] 연립이차부등식을 활용한 문제해결하기

$\begin{cases} x^2-10x+21\le 0 \\ x^2-2(n-1)x+n^2-2n\ge 0 \end{cases}$

$x^2-10x+21\le 0$ 에서

$(x-3)(x-7)\le 0$

$3\le x\le 7$

$x^2-2(n-1)x+n^2-2n\ge 0$ 에서

$\{x-(n-2)\}(x-n)\ge 0$

$x\le n-2$ 또는 $x\ge n$

(i) $1\le n\le 3$ 인 경우 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 5

(ii) $4\le n\le 8$ 인 경우 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 4

(iii) $n\ge 9$ 인 경우 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 5

따라서 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4 가 되도록 하는 모든 자연수 n 은 4, 5, 6, 7, 8 이고 그 값의 합은 30

28. [출제의도] 원의 방정식을 활용한 문제해결하기

$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 원의 지름

$\mathrm{A}(t, 0)$ 이라 하면 $\mathrm{B}(0, t+4)$ 이고

원의 중심 C 의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{t+4}{2}\right)$

점 C 가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$\dfrac{t+4}{2}=\dfrac{3}{2}t$, $t=2$

원의 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 $a=1$, $b=3$, $r=\sqrt{10}$

따라서 $a+b+r^2=1+3+10=14$

[다른 풀이]

원의 중심 $\mathrm{C}(a, b)$ 에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\mathrm{H}(a, 0)$, $\mathrm{I}(0, b)$

두 삼각형 COA, CBO 는 이등변삼각형이므로

$\mathrm{A}(2a, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2b)$

조건 (가)에서 $2b-2a=4$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $b=3a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=3$

$r^2=a^2+b^2=1^2+3^2=10$

따라서 $a+b+r^2=1+3+10=14$

29. [출제의도] 나머지정리를 활용한 추론하기

$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=x(x-1)P(x)$ ⋯ ㉠

㉠ 에 $x=0$, $x=1$ 을 대입하여 정리하면

$\{Q(1)\}^2+\{Q(0)\}^2=0$, $\{Q(2)\}^2+\{Q(1)\}^2=0$

$Q(0)=Q(1)=Q(2)=0$

다항식 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차다항식이므로

$Q(x)=x(x-1)(x-2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡ 에서

$\{(x+1)x(x-1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2$

$=x(x-1)P(x)$

$P(x)=x(x-1)\{(x+1)^2+(x-2)^2\}$

$=x(x-1)(2x^2-2x+5)$

$=x(x-1)\{2(x-2)(x+1)+9\}$

$=2x(x-1)(x-2)(x+1)+9x(x-1)$

$=2(x+1)Q(x)+9x(x-1)$

$R(x)=9x(x-1)$

따라서 $R(3)=9\times 3\times 2=54$

30. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 활용한 문제해결하기

$f(x)=x^2-4tx+10t=(x-2t)^2-4t^2+10t$

(i) $t \le 2t \le t+3$ 즉, $0 \le t \le 3$ 일 때
함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은 $x=2t$ 에서
$-4t^2+10t$

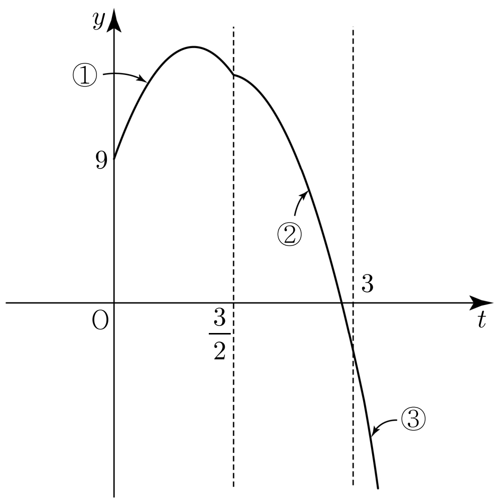
ⓘ $2t-t \le t+3-2t$ 즉, $0 \le t \le \frac{3}{2}$ 일 때
함수 $y=f(x)$ 의 최댓값은 $x=t+3$ 에서
$-3t^2+4t+9$
따라서 $g(t)=-7t^2+14t+9$

ⓘⓘ $2t-t > t+3-2t$ 즉, $\frac{3}{2} < t \le 3$ 일 때
함수 $y=f(x)$ 의 최댓값은 $x=t$ 에서
$-3t^2+10t$
따라서 $g(t)=-7t^2+20t$

(ii) $2t > t+3$ 즉, $t > 3$ 일 때
함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은 $x=t+3$ 에서
$-3t^2+4t+9$
함수 $y=f(x)$ 의 최댓값은 $x=t$ 에서
$-3t^2+10t$
따라서 $g(t)=-6t^2+14t+9$

(i), (ii)에서

$$g(t)=\begin{cases} -7t^2+14t+9 & \left(0 \le t \le \frac{3}{2}\right) \cdots ① \\ -7t^2+20t & \left(\frac{3}{2} < t \le 3\right) \cdots ② \\ -6t^2+14t+9 & (t>3) \cdots ③ \end{cases}$$



함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=-4t+a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3 이려면 직선 $y=-4t+a$ 가 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$ 을 지날 때이므로

$\frac{57}{4}=-6+a$, $a=\frac{81}{4}$ $\cdots$ ㉠

또한 함수 $g(t)=-7t^2+14t+9$ $\left(0 \le t \le \frac{3}{2}\right)$ 의 그래프와 직선 $y=-4t+a$ 가 접하는 a 의 값은

$-7t^2+14t+9=-4t+a$

$7t^2-18t+a-9=0$ $\cdots$ ㉡

㉡의 판별식을 D_1 이라 하면

$\frac{D_1}{4}=81-7a+63=0$, $a=\frac{144}{7}$ $\cdots$ ㉢

$\left(0 \le t \le \frac{3}{2}\right.$ 에서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=-4t+\frac{144}{7}$ 가 점 $\left(\frac{9}{7}, \frac{108}{7}\right)$ 에서 접한다.$\left.\right)$

함수 $g(t)=-7t^2+20t$ $\left(\frac{3}{2} < t \le 3\right)$ 의 그래프와 직선 $y=-4t+a$ 가 접하는 a 의 값은

$-7t^2+20t=-4t+a$

$7t^2-24t+a=0$ $\cdots$ ㉣

㉣의 판별식을 D_2 라 하면

$\frac{D_2}{4}=144-7a=0$, $a=\frac{144}{7}$ $\cdots$ ㉤

$\left(\frac{3}{2} < t \le 3\right.$ 에서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=-4t+\frac{144}{7}$ 가 점 $\left(\frac{12}{7}, \frac{96}{7}\right)$ 에서 접한다.$\left.\right)$

따라서 ㉠, ㉢, ㉤ 에서 방정식 $g(t)=-4t+a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{81}{4} < a < \frac{144}{7}$

$p=\frac{81}{4}$, $q=\frac{144}{7}$

따라서 $4p+7q=225$