p.01 [23] ❶ 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 ❷ x^9의 계수는?

⇨ ❶ 전개식의 일반항 : ${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}3^r = {}_5\mathrm{C}_r 3^r x^{15-r}$

❷ : $15-3r=9$, $3r=6$ $\therefore$ $r=2$

$\therefore$ ❷ $= {}_5\mathrm{C}_2 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$

p.01 [24] 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는?

⇨ 중복 가능한 것 : 숫자

$\therefore$ (개수) $= n$(천의 자리 : 4, 5) $\times\, n$(일의 자리 : 1, 3, 5)

$\times\, n$(십과 백의 자리 : 1, 2, 3, 4, 5)

$= {}_2\Pi_1 \times {}_3\Pi_1 \times {}_5\Pi_2 = 2 \times 3 \times 25 = 150$

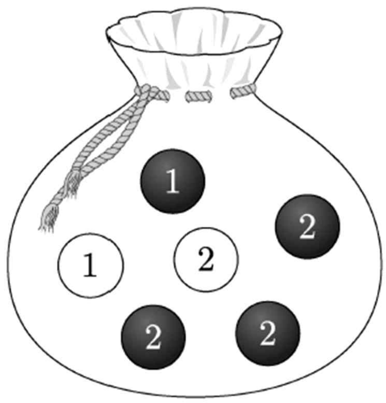
p.02 [25] 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. Ⓢ 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, Ⓐ 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은?

⇨ $n(S) = {}_{14}\mathrm{C}_3 = 14 \times 13 \times 2$

$n(A^C) = {}_{9}\mathrm{C}_3 = 3 \times 4 \times 7$

$\therefore\ \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \dfrac{3 \times 4 \times 7}{14 \times 13 \times 2} = 1 - \dfrac{3}{13} = \dfrac{10}{13}$

p.02 [26] 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. Ⓢ 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? ⇨ $n(S) = {}_{6}\mathrm{C}_3 = 5 \times 4 = 20$

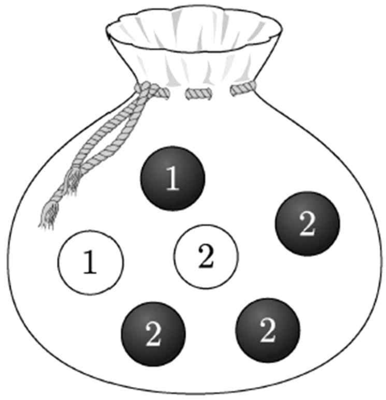


$n(A) = {}_{2}\mathrm{C}_1 \times {}_{4}\mathrm{C}_2 = 2 \times 6 = 12$

$n(B) = n(2\text{가 } 3\text{개}) = {}_{4}\mathrm{C}_3 = 4$

$n(A \cap B) = n(\text{흰 공 } 2\text{가 } 1\text{개 \& 검은 공 } 2\text{가 } 2\text{개})$

p.02 [26] $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은?



⇨ $n(S)=20$, $n(A)=12$, $n(B)=4$

$n(A \cap B)=n$(흰 공 2가 1개

& 검은 공 2가 2개)

$= {}_1\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 3$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 12 + 4 - 3 = 13$

$\therefore\ \mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{13}{20}$

p.03 [27] 어느 회사에서 생산하는 ⓧ 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다. ❶ 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \leq m \leq 755.9$이다. ❷ 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 ❸ 자연수 n의 최솟값은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58)=0.99$로 계산한다.)

⇨ ❶ 신뢰구간의 길이 : $2 \times 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{16}} = 755.9 - 746.1$

$0.98\sigma = 9.8 \quad \therefore\ \sigma = 10$

p.03 [27] ⓧ 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. ❷ 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한
❸ 자연수 n의 최솟값은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$)

⇨ $\sigma = 10$

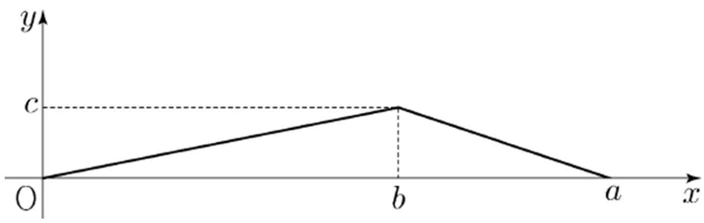
❷ : $b - a = 2 \times 2.58 \times \dfrac{10}{\sqrt{n}} = \dfrac{51.6}{\sqrt{n}} \le 6$

$\sqrt{n} \ge \dfrac{51.6}{6} = 8.6,\ n \ge 8.6^2 = 73.96$

∴ ❸ $= 74$

p.3 [28] ❶ 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다. ❷ $\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = (1/4)$, ❸ $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = (1/2)$일 때, ❹ $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

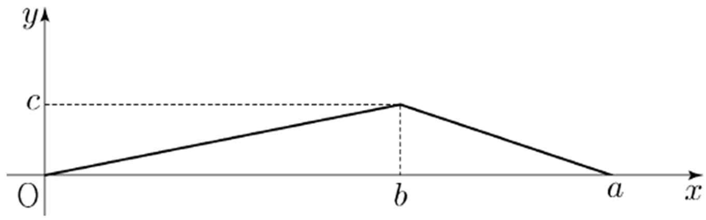


⇨ ❶ : $\mathrm{P}(0 \le X \le a) = \dfrac{1}{2} \times a \times c = 1$ ∴ ① $ac = 2$

❷ $= \mathrm{P}(X \le b) - \{1 - \mathrm{P}(X \le b)\} = \dfrac{1}{4}$

$2 \times \mathrm{P}(X \le b) = \dfrac{5}{4},\ \mathrm{P}(X \le b) = \dfrac{1}{2}bc = \dfrac{5}{8}$ ∴ ② $bc = \dfrac{5}{4}$

p.03 [28] ❸ $\mathrm{P}\left(X \le \sqrt{5}\right) = (1/2)$, ❹ $a+b+c$의 값은?



⇨ ① $ac = 2$, ② $bc = \dfrac{5}{4}$

❸ $= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\dfrac{c}{b} \times \sqrt{5}\right)$

$= \dfrac{5c}{2b} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore\ b = 5c \Rightarrow$ ② $= 5c^2 = \dfrac{5}{4}$, $c^2 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ c = \dfrac{1}{2}$, ① : $a = 4$, ② : $b = \dfrac{5}{2}$

$\therefore$ ❹ $= 4 + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} = 7$

p.04 [29] 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

Ⓐ 위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, Ⓑ 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $q \div p$이다. ❶ $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수)

p.04 [29] Ⓐ 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, Ⓑ 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $q \div p$이다. ❶ $p+q$의 값은?

⇨ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\text{홀수가 } 3\text{번}) + \mathrm{P}(\text{홀수가 } 1\text{번})$

$$= {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1+3}{8} = \frac{1}{2}$$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\text{두 번은 } 3 \text{ 또는 } 5) + \mathrm{P}(\text{두 번은 짝수})$

$$= {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{13}{72} \times 2 = \frac{13}{36} \quad \therefore \text{ ❶} = 49$$

p.04 [30] 집합 $X = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 ❶ 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$
(나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$
(다) $f(6) = f(5) + 6$

⇨ (나) : $f(1) = 1,\ f(10) = 10$

Let $n(f(2), f(3), f(4)) = a,\ n(f(7), f(8), f(9)) = b$

① $f(5) = 1,\ f(6) = 7$: $a = 1$ ($\because$ $(1, 1, 1)$)

$b = n(f(9) = 9) + n(f(9) = 10)$

$= ({}_3\mathrm{H}_2 - 1) + ({}_4\mathrm{H}_2 - 1)$ ($\because$ $f(7) = f(8) = 7$ 제외)

$= ({}_4\mathrm{C}_2 - 1) + ({}_5\mathrm{C}_2 - 1) = 5 + 9 = 14 \quad \therefore\ ab = 14$

p.04 [30] ❶ 함수 $f : X \to X$의 개수는?

⇨ ㈏ : $f(1) = 1$, $f(10) = 10$

Let $n(f(2), f(3), f(4)) = a$, $n(f(7), f(8), f(9)) = b$

① $f(5) = 1$, $f(6) = 7$: $ab = 14$

② $f(5) = 2$, $f(6) = 8$: $a = {}_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = 4$

$b = {}_3\mathrm{H}_3 - 1$ ($\because$ $f(7) = f(8) = f(9) = 8$ 제외)

$= {}_5\mathrm{C}_3 - 1 = 10 - 1 = 9$ $\therefore$ $ab = 4 \times 9 = 36$

③ $f(5) = 3$, $f(6) = 9$: ②와 대칭적 $\therefore$ $ab = 36$

④ $f(5) = 4$, $f(6) = 10$: ①과 대칭적 $\therefore$ $ab = 14$

$\therefore$ ❶ $= 2 \times (14 + 36) = 100$