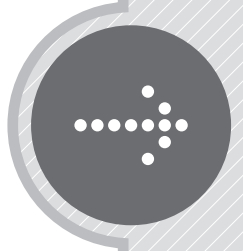


수능특강 수학영역 수학 II

정답과
풀이



01 함수의 극한

유제

본문 5~11쪽

- 1 ④ 2 ② 3 6 4 15 5 ①
6 ③ 7 ② 8 ④

Level 1 기초 연습

본문 12~13쪽

- 1 ② 2 ② 3 ④ 4 4 5 ③
6 ③ 7 ② 8 ①

Level 2 기본 연습

본문 14~15쪽

- 1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ③ 5 ①
6 ② 7 ②

Level 3 실력 완성

본문 16쪽

- 1 ③ 2 59 3 12

02 함수의 연속

유제

본문 19~23쪽

- 1 ③ 2 ② 3 ④ 4 20 5 51

Level 1 기초 연습

본문 24~25쪽

- 1 ③ 2 14 3 ② 4 ④ 5 ①
6 ⑤ 7 ③

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 18 4 ④ 5 ⑤
6 ④

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

- 1 18 2 ⑤ 3 ③

03 미분계수와 도함수

유제

본문 31~37쪽

- 1 ② 2 ③ 3 2 4 ② 5 ①
6 ⑤ 7 ④

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

- 1 ⑤ 2 ⑤ 3 ④ 4 ① 5 ③
6 17 7 ④ 8 ①

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

- 1 ⑤ 2 2 3 ② 4 ⑤ 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 42쪽

- 1 180 2 ④ 3 ③

04 도함수의 활용(1)

유제

본문 45~51쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 18 5 ④
6 67 7 ⑤ 8 ④

Level 1 기초 연습

본문 52~53쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ①
6 ② 7 ② 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ③
6 59 7 ③ 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 56~57쪽

1 ④ 2 ② 3 25 4 ⑤ 5 ⑤

05 도함수의 활용(2)

유제

본문 61~65쪽

1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ① 5 ④
6 ③

Level 1 기초 연습 본문 66~67쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ⑤ 4 ④ 5 2
6 ③ 7 ③ 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 68~69쪽

1 ④ 2 49 3 ④ 4 ② 5 ③
6 5 7 18 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 70쪽

1 ④ 2 156 3 ②

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~79쪽

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 48 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ③

Level 1 기초 연습 본문 80~81쪽

1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
6 ③ 7 ⑤ 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 82~83쪽

1 ① 2 ④ 3 56 4 ② 5 ④
6 ③ 7 ① 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 84~85쪽

1 ② 2 52 3 ① 4 ⑤ 5 ③

07 정적분의 활용

유제

본문 89~95쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ③
6 35 7 ⑤ 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ② 5 ③
6 ② 7 ① 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 ① 7 16 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 ② 2 ⑤ 3 8 4 ① 5 ④

01 함수의 극한

유제

본문 5~11쪽

- 1 ④ 2 ② 3 6 4 15 5 ①
6 ③ 7 ② 8 ④

1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x + a^2) = 3 + a^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 4ax = 4a$$

에서 $3 + a^2 = 4a$ 이어야 한다.

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$1 + 3 = 4$$

답 ④

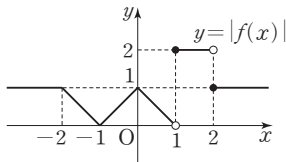
2 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$$

$-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow -2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) = -1$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(-x) + \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$$

$$= 2 + (-1) + 1 = 2$$

답 ②

3 $\lim_{x \rightarrow 3} \{2f(x) + g(x)\} = 7$, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x)\} = -1$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} [\{2f(x) + g(x)\} + \{f(x) - g(x)\}] = 7 + (-1)$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = 6 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [\{2f(x) + g(x)\} - 2f(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{2f(x) + g(x)\} - \lim_{x \rightarrow 3} 2f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{2f(x) + g(x)\} - 2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \\ &= 7 - 2 \times 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 6

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \{xf(x) - (x^2 + 2)\} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} [\{xf(x) - (x^2 + 2)\} + (x^2 + 2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{xf(x) - (x^2 + 2)\} + \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \right\} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \right\} - \frac{1}{x^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \right\} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ xf(x) \times \frac{g(x)}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \\ &= 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \{3f(x)g(x) - xf(x)\} &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \\ &= 3 \times 6 - 3 = 15 \end{aligned}$$

답 15

5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{3x + 3} - 3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)(\sqrt{3x + 3} + 3)}{(\sqrt{3x + 3} - 3)(\sqrt{3x + 3} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{3x + 3} + 3)}{3x - 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3x+3}+3)}{3(x-2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+2x+4)(\sqrt{3x+3}+3)}{3} \\
&= \frac{(2^2+2 \times 2+4) \times (\sqrt{3 \times 2+3}+3)}{3} \\
&= \frac{12 \times 6}{3} \\
&= 24
\end{aligned}$$

답 ①

6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+2}$ 에서 $x = -t$ 라 하면
 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4(-t)^2-t}-(-t)}{-t+2} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4t^2-t}+t}{-t+2} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}}+1}{-1+\frac{2}{t}} \\
&= \frac{\sqrt{4}+1}{-1+0} \\
&= -3
\end{aligned}$$

답 ③

7 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+ax}-3}{x^2-1} = b$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2+ax}-3) = \sqrt{1+a}-3=0$ 에서
 $1+a=9$, $a=8$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+8x}-3}{x^2-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+8x}-3)(\sqrt{x^2+8x}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8x}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+8x-9}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8x}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+9)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+8x}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8x}+3)} \\
&= \frac{10}{2 \times 6} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=\frac{5}{6}$ 이므로

$$a+b=8+\frac{5}{6}=\frac{53}{6}$$

답 ②

8 $x > 0$ 일 때 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x(3x^2+2)} < \frac{f(x)}{x} < \frac{(x^2+1)(x+4)}{x(3x^2+1)}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)(x-1)}{x(3x^2+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)(x+4)}{x(3x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3f(x)}{2x-f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{3f(x)}{x}}{2-\frac{f(x)}{x}} \\
&= \frac{4+3 \times \frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{5}{\frac{5}{3}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

답 ④

Level 1

기초 연습

본문 12~13쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ② | 3 ④ | 4 4 | 5 ③ |
| 6 ③ | 7 ② | 8 ① | | |

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (3x-1) = 3a-1$,
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (-x+2) = -a+2$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 에서
 $3a-1 = 3(-a+2)$

$$6a=7$$

$$\text{따라서 } a=\frac{7}{6}$$

답 ②

- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)f(x)=9$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)=1+a$ 이고
 $1+a>0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+a)f(x)}{x+a} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)} \\ &= \frac{9}{1+a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= \frac{9}{1+a} \times \frac{9}{1+a} \\ &= \left(\frac{9}{1+a}\right)^2\end{aligned}$$

$$\left(\frac{9}{1+a}\right)^2=9 \text{에서}$$

$$(1+a)^2=9$$

$$1+a=3 \text{ 또는 } 1+a=-3$$

$$a>0 \text{이므로 } a=2$$

- 3 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+3g(x)\}=4$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3g(x)}{f(x)}=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{1+\frac{3g(x)}{f(x)}\right\}=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{5f(x)+2g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{5+\frac{2g(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{5+2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{3}} \\ &= \frac{4}{13}\end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}\right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{\frac{(2x+1)^2-1}{(2x+1)^2}\right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{\frac{1}{x} \times \frac{4x^2+4x}{(2x+1)^2}\right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+4}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{0+4}{1^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

답 4

- 5 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-4x+b}{x-a}=6$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a} (x^2-4x+b)=a^2-4a+b=0 \text{에서}$$

$$b=-a^2+4a$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-4x+b}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-4x-a^2+4a}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-4)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a-4) \\ &= 2a-4\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2a-4=6 \text{에서 } a=5$$

$$b=-5^2+4 \times 5=-5$$

$$\text{따라서 } a+b=5+(-5)=0$$

답 ③

- 6 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}=b$ ($b \neq 0$)에서 $x \rightarrow 3$ 일 때
 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a}-\sqrt{2a})=\sqrt{3+a}-\sqrt{2a}=0 \text{에서}$$

$$3+a=2a$$

$$a=3$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{6})(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+3}+\sqrt{6})=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a=3, b=2\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$ab=3 \times 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

답 ③

7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x^2}{x - 2} = 3$ 을 만족시키는 다항함수 $f(x) + x^2$ 은

최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로

$$f(x) = -x^2 + 3x + b \quad (\text{단, } b \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 4\} = f(2) - 4 = 0 \text{에서}$$

$$f(2) = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(2) = -2^2 + 6 + b = 2 + b \text{이므로}$$

$$2 + b = 4, \quad b = 2$$

따라서

$$a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x^2 + 3x + 2) - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \{-(x-1)\}$$

$$= -(2-1)$$

$$= -1$$

답 ②

8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = f(2)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - f(0)\} = f(1) - f(0) = 0 \text{에서}$$

$$f(1) = f(0)$$

$$f(1) = 1 + a + b, \quad f(0) = b \text{이므로}$$

$$1 + a + b = b \text{에서 } a = -1 \text{이고}$$

$$f(x) = x^2 - x + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + b) - b}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x$$

$$= 1$$

$$f(2) = 4 - 2 + b = 2 + b$$

$$\text{이므로 } 1 = 2 + b \text{에서}$$

$$b = -1$$

따라서 $f(x) = x^2 - x - 1$ 이므로

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1$$

답 ①

Level
2

기본 연습

본문 14~15쪽

1 ①

2 ③

3 ④

4 ③

5 ①

6 ②

7 ②

1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax + 2) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2ax^2 - 5) = 2a - 5$$

$$\text{즉, } a + 2 \neq 2a - 5 \text{에서}$$

$$a \neq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1+} |f(x)| \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1-} |ax + 2| = |a + 2|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1+} |2ax^2 - 5| = |2a - 5|$$

$$\text{즉, } |a + 2| = |2a - 5| \text{에서}$$

$$a + 2 = \pm (2a - 5)$$

$$a + 2 = 2a - 5 \text{이면}$$

$$a = 7$$

$$a + 2 = -(2a - 5) \text{이면}$$

$$a = 1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a \neq 7 \text{이므로}$$

$$a = 1$$

답 ①

2 $a \leq 0$ 이면 주어진 극한은 양의 무한대로 발산하므로 $a > 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2 + 10x + 3} - (ax + b)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 + 10x + 3) - (ax + b)^2}{\sqrt{4x^2 + 10x + 3} + ax + b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 - a^2)x^2 + (10 - 2ab)x + (3 - b^2)}{\sqrt{4x^2 + 10x + 3} + ax + b} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은 $4 - a^2 > 0$ 이면 양의 무한대로 발산하고, $4 - a^2 < 0$ 이면 음의 무한대로 발산한다.

즉, ㉠이 수렴하기 위해서는 $4-a^2=0$ 이어야 한다.

이때 $a>0$ 이므로

$$a=2$$

이때 ㉠은

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a^2)x^2 + (10-2ab)x + (3-b^2)}{\sqrt{4x^2+10x+3+ax+b}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10-4b)x + (3-b^2)}{\sqrt{4x^2+10x+3+2x+b}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10-4b + \frac{3-b^2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2} + 2 + \frac{b}{x}}}$$

$$= \frac{10-4b}{\sqrt{4+2}}$$

$$= \frac{5-2b}{2}$$

이므로

$$\frac{5-2b}{2}=1 \text{에서 } b=\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } ab=2 \times \frac{3}{2}=3$$

답 ③

$$\begin{aligned} 3 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x^4+16}-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x^4+16}+4)}{(\sqrt{x^4+16}-4)(\sqrt{x^4+16}+4)(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}(\sqrt{x^4+16}+4)}{x^4(\sqrt{x+1}+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{4+4}{1+1} = 4$$

이므로 ㉠은 $n+1>4$ 이면 0으로 수렴하고, $n+1<4$ 이면 발산한다.

그러므로 ㉠이 0이 아닌 상수로 수렴하려면 $n+1=4$, 즉 $n=3$ 이어야 한다. 이때

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(\sqrt{x^4+16}+4)}{x^4(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= 4$$

$$\text{따라서 } a+n=4+3=7$$

답 ④

4 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

이 성립하므로 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \leq x^2 f(x) \leq x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

즉, $2x-3 \leq x^2 f(x) \leq (x-1)^2$ 이 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $a>0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x-3) \leq \lim_{x \rightarrow a} x^2 f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} (x-1)^2$$

이 성립하고, 이때 $\lim_{x \rightarrow a} x^2 f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x-3) \leq 1 \text{에서}$$

$$2a-3 \leq 1$$

$$a \leq 2$$

..... ㉠

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-1)^2 \geq 1 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 \geq 1$$

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 양수 a 의 값은 2이다.

따라서 $a=2$

답 ③

5 $\{xf(x)\}^2 - f(x)g(x) + g(x) - x^2 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이면

$$\{f(x)\}^2 - \frac{f(x)g(x)}{x^2} + \frac{g(x)}{x^2} - 1 = 0$$

$$\{f(x)\}^2 - 1 = \frac{g(x) \times \{f(x) - 1\}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \text{이므로}$$

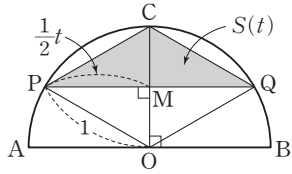
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2 - 1}{f(x) - 1} \\ &= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 f(x) - g(x)}{x^3 f(x) + g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - \frac{g(x)}{x^2}}{xf(x) + \frac{g(x)}{x^2}} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2}} \\ &= \frac{2 \times 2 - 3}{0 + 3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ①

6



선분 AB의 중점을 O라 하고, 선분 CO와 선분 PQ가 만나는 점을 M이라 하자.

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$ 이고 $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ 이므로 $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ 이다.

즉, 삼각형 POM과 삼각형 QOM은 서로 합동이므로 $\overline{PM} = \overline{QM}$ 이다.

$\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} t$ 이므로 직각삼각형 POM에서

$$\overline{OM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2}$$

$$\overline{CM} = \overline{OC} - \overline{OM} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \text{이므로}$$

삼각형 CPQ의 넓이는

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CM} \\ &= \frac{1}{2} t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^3} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right)}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right)}{2t^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}t^2}{2t^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2} \right)} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2}} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

답 ②

7 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{4x^2 + x} = 1$ 을 만족시키는 다항함수

$f(x) - x^3$ 은 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

이때 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^k}$ 의 값이 존재

하려면 $f(x)$ 는 $(x+1)^k$ 으로 나누어떨어져야 한다.

k 가 2 이상의 자연수이므로

$k=2$ 또는 $k=3$

(i) $k=2$ 일 때

$f(x)$ 는 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2(x+c) \\ &= x^3 + (2+c)x^2 + (2c+1)x + c \quad (c \text{는 상수}) \end{aligned}$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

로 놓을 수 있다.

이때 ①, ②에서 x^2 의 계수를 비교하면

$$4 = 2 + c$$

$$c = 2$$

즉, $f(x) = (x+1)^2(x+2)$ 이므로

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $k=3$ 일 때

$f(x)$ 는 $(x+1)^3$ 으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

그러나 ①에서 $f(x)$ 의 x^2 의 계수는 4이므로 이는 불가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x) = (x+1)^2(x+2)$, $m=1$ 이므로

$$f(m) = f(1) = 2^2 \times 3 = 12$$

답 ②

Level 3

실력 완성

본문 16쪽

1 ③ 2 59 3 12

1 조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 1-a$ 이므로 $a=1$ 인 경우와 $a \neq 1$ 인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $a=1$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

이므로 $b = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x^k} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}{x^k} \right|$$

 $k=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 + x + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

 $k \geq 2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}{x^k} \right| = \infty$$

로 발산한다.

(ii) $a \neq 1$ 인 경우

$$\text{조건 (가)에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-a} = \frac{1-1}{1^2-a} = 0 \text{이므로 } b=0$$

 $a \neq 1, b=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x^k} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2}{x^k} \right| \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a=0$ 이면 $\textcircled{1}$ 은 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3}{x^k} \right|$ 이고 $k=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = 0,$$

 $k=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3}{x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

 $k=3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |1| = 1$$

로 각각 수렴하며

 $k \geq 4$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3}{x^k} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x^{k-3}} \right| = \infty$$

로 발산하므로 $\textcircled{1}$ 이 $\frac{1}{2}$ 로 수렴하도록 하는 자연수 k 의

값은 존재하지 않는다.

 $a \neq 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 은 $k=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2 + ax| = 0,$$

 $k=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2}{x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |x + a| = |a|$$

로 각각 수렴하며

 $k \geq 3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^3 + ax^2}{x^k} \right| = \infty$$

로 발산한다.

즉, $\textcircled{1}$ 이 $\frac{1}{2}$ 로 수렴하는 경우는 $k=2$ 이고 $|a| = \frac{1}{2}$ 인

경우뿐이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 는

$$\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

으로 그 개수는 3이다.

답 ③

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - f(0)\} = f(2) - f(0) = 0$ 이므로

$$f(2) = f(0)$$

이차함수 $f(x)$ 가 최솟값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면 $k > 0$ 이다.이때 $f(2) = f(0)$ 이므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 갖는다.함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{7}{5}$ 이므로

$$f(x) = k(x-1)^2 + \frac{7}{5}$$

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left\{k(x-1)^2 + \frac{7}{5}\right\} - \left(k + \frac{7}{5}\right)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x^2 - 2x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{kx(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} kx = 2k \end{aligned}$$

이므로 $2k = a$ 에서

$$k = \frac{1}{2}a \text{이고 } k > 0 \text{이므로 } a > 0$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{2}a(x-1)^2 + \frac{7}{5}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x+2)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left\{\frac{1}{2}a(x+1)^2 + \frac{7}{5}\right\}}{\frac{1}{2}a(x-1)^2 + \frac{7}{5}} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{2}a + \frac{7}{5}\right)}{\frac{1}{2}a + \frac{7}{5}} \\ &= 2\end{aligned}$$

이므로 $2 = \frac{5}{18}a$ 에서

$$a = \frac{36}{5}$$

따라서 $f(x) = \frac{18}{5}(x-1)^2 + \frac{7}{5}$ 이므로

$$f(5) = \frac{18}{5} \times 16 + \frac{7}{5} = 59$$

다른 풀이

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(0)}{x - 2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - f(0)\} = f(2) - f(0) = 0$ 이므로

$$f(2) = f(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차함수 $f(x)$ 가 최솟값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면 $k > 0$ 이다.

이때 $f(2) = f(0)$ 이므로

$$f(x) = kx(x-2) + f(0)$$

으로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(0)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{kx(x-2) + f(0) - f(0)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{kx(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} kx \\ &= 2k\end{aligned}$$

이므로 $2k = a$ 에서

$$k = \frac{1}{2}a$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{2}ax(x-2) + f(0)$$

한편, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{7}{5}$ 이므로

$$f(0) \geq \frac{7}{5}$$

즉, $f(0) \neq 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x+2)}{f(x)} = \frac{2f(2)}{f(0)} = \frac{5}{18}a$$

①에서 $f(0) = f(2)$ 이므로

$$2 = \frac{5}{18}a$$

$$a = \frac{36}{5}$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{18}{5}x(x-2) + f(0)$$

①에서 $f(2) = f(0)$ 이므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(1) = -\frac{18}{5} + f(0) = \frac{7}{5}$$

$$f(0) = 5$$

따라서 $f(x) = \frac{18}{5}x(x-2) + 5$ 이므로

$$f(5) = \frac{18}{5} \times 5 \times 3 + 5 = 59$$

3 곡선 $y = tx^2$ 위를 움직이는 제1사분면의 점 P의 좌표를 (a, ta^2) ($a > 0$)이라 하면 점 P와 직선 $y = x - 1$, 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a - ta^2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|ta^2 - a + 1|}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $ta^2 - a + 1 = t\left(a - \frac{1}{2t}\right)^2 - \frac{1}{4t} + 1$ 이고 $t > \frac{1}{4}$ 이므로 $ta^2 - a + 1 > 0$ 이다.

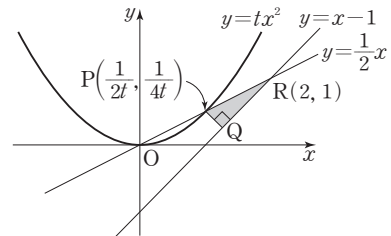
①은 $a = \frac{1}{2t}$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)$ 을 갖는다.

즉, 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2t}, \frac{1}{4t}\right) \text{이고}$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)$$

한편, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{1}{2t}, \frac{1}{4t}\right)$ 일 때 직선 OP의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$ 이고, 점 R는 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$, $y = x - 1$ 의 교점이므로 점 R의 좌표는 (2, 1)이다.



이때

$$\begin{aligned}\overline{PR} &= \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4t}\right)^2} \\ &= \sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)\end{aligned}$$

답 59

이므로 직각삼각형 PQR에서

$$\begin{aligned}\overline{QR} &= \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PQ}^2} \\ &= \sqrt{\left\{\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)\right\}^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)\end{aligned}$$

삼각형 PQR의 넓이는

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right) \times \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4t}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)^2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \frac{1}{4}+} \frac{S(t)}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2} &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{4}+} \frac{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4t}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{4}+} \frac{\frac{3}{4t^2}\left(t - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{4}+} \frac{3}{4t^2} \\ &= \frac{3}{4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= 12\end{aligned}$$

답 12

02 함수의 연속

유제

본문 19~23쪽

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 20 5 51

1 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2 - 3x + a) = a + 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (2x + 3a) = 3a - 2,$$

$$f(-1) = 3a - 2$$

이므로

$$a + 4 = 3a - 2$$

따라서 $a = 3$

답 ③

2 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+a}-2}{x-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{3x+a}-2) = \sqrt{3+a}-2 = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{3+a} = 2$$

$$a = 1$$

$a=1$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3+1}+2} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+b = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

답 ②

$$3 \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x < a) \\ x+5 & (x \geq a) \end{cases}, g(x) = x^2 - 2x - 3 \text{에서}$$

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (2x+3)(x^2-2x-3) & (x < a) \\ (x+5)(x^2-2x-3) & (x \geq a) \end{cases} \text{이므로}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=a$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (2x+3)(x^2-2x-3) \\ = (2a+3)(a^2-2a-3),$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (x+5)(x^2-2x-3) \\ = (a+5)(a^2-2a-3),$$

$$f(a)g(a) = (a+5)(a^2-2a-3)$$

이므로

$$(2a+3)(a^2-2a-3) = (a+5)(a^2-2a-3)$$

$$\{(2a+3) - (a+5)\}(a^2-2a-3) = 0$$

$$(a-2)(a^2-2a-3) = 0$$

$$(a+1)(a-2)(a-3) = 0$$

$$a = -1 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 서로 다른 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + 2 + 3 = 4$$

답 ④

$$4 \quad \text{함수 } f(x) = x^2 + 6x - 10 \text{은 실수 전체의 집합에서 연속이}$$

므로 함수 $\frac{f(x)-x^2}{f(x)+k}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되기

위해서는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)+k \neq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+6x-10+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 1 \times (-10+k) = 19 - k < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$k > 19$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 20이다.

답 20

$$5 \quad \text{함수 } f(x) \text{를 } f(x) = x^3 + 6x + 5 - a \text{라 하면 함수 } f(x) \text{는}$$

실수 전체의 집합에서 연속이므로 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서도 연속이다.
방정식 $f(x)=0$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 $f(0)f(1) < 0$ 이면 사잇값의 정리에 의해 이 실근이 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

$$f(0) = 5 - a, f(1) = 1 + 6 + 5 - a = 12 - a$$

이므로 $f(0)f(1) < 0$ 에서

$$(5-a)(12-a) < 0$$

$$(a-5)(a-12) < 0$$

$$5 < a < 12$$

따라서 자연수 a 는 6, 7, 8, 9, 10, 11이고 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51$$

답 51

Level 1

기초 연습

본문 24~25쪽

- | | | | | |
|-----|------|-----|-----|-----|
| 1 ③ | 2 14 | 3 ② | 4 ④ | 5 ① |
| 6 ⑤ | 7 ③ | | | |

- 1 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{5f(x) - 9\} = 2f(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{5f(x) - 9\} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 9 \\ = 5f(0) - 9$$

$$\text{이므로 } 5f(0) - 9 = 2f(0)$$

$$\text{따라서 } f(0) = 3$$

답 ③

- 2 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (3x+a) = 6+a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x^2+x) = 10,$$

$$f(2) = b$$

$$\text{이므로 } 6+a = 10 = b$$

$$\text{따라서 } a = 4, b = 10 \text{이므로}$$

$$a+b = 4+10 = 14$$

답 14

- 3 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-3}{x-2} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2+a}-3) = \sqrt{4+a}-3 = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{4+a}=3, a=5$$

$a=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &= \frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+b=5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$$

답 ②

- 4 함수 $|f(x)| = \begin{cases} |2x-3| & (x < 1) \\ |3x-a| & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서

연속이라면 $x=1$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 1-} |2x-3| = |2-3| = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 1+} |3x-a| = |3-a|, \\ |f(1)| &= |3-a| \end{aligned}$$

이므로

$$|3-a|=1, a=2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$2 \times 4 = 8$$

답 ④

- 5 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ 가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수

$$f(x) = \frac{\{f(x)+g(x)\} + \{f(x)-g(x)\}}{2},$$

$$g(x) = \frac{\{f(x)+g(x)\} - \{f(x)-g(x)\}}{2}$$

도 모두 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이다.} \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (2ax+1) = 2a+1, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2-a^2) = 1-a^2, \end{aligned}$$

$$f(1) = 1-a^2$$

이므로

$$2a+1 = 1-a^2, a^2+2a=0, a(a+2)=0$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=-2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = g(2) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \left(\frac{1}{2}x^2 + a^2 \right) = 2 + a^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+x) = 6,$$

$$g(2) = 6$$

이므로 $2+a^2=6$ 에서

$$a^2=4$$

$$a=2 \text{ 또는 } a=-2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=-2$

답 ①

- 6 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & (x < 2) \\ -x & (x \geq 2) \end{cases}$, $g(x) = x^2+ax-8$ 에서

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x+3 \right) (x^2+ax-8) & (x < 2) \\ -x(x^2+ax-8) & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = f(2)g(2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} \left(\frac{1}{2}x+3 \right) (x^2+ax-8) \\ &= 4 \times (2a-4) \\ &= 8a-16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} \{ -x(x^2+ax-8) \} \\ &= -2 \times (2a-4) \\ &= -4a+8, \end{aligned}$$

$$f(2)g(2) = -2 \times (2a-4) = -4a+8$$

이므로

$$8a-16 = -4a+8$$

따라서 $a=2$

답 ⑤

- 7 모든 자연수 k 에 대하여 두 곡선 $y=x^3+k$, $y=2x^2-2x$ 는 한 점에서만 만나고 그 점의 x 좌표가 a_k 이므로

$f(x) = x^3-2x^2+2x+k$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 은 항상 단 한 개의 실근 a_k 를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, -1]$ 에서 연속이므로 x 에 대한 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(-1) < 0$ 이어야 한다.

$$f(-2) = -8 - 8 - 4 + k = k - 20,$$

$$f(-1) = -1 - 2 - 2 + k = k - 5$$

이므로

$$(k-20)(k-5) < 0$$

$$5 < k < 20$$

따라서 자연수 k 의 값은 6, 7, 8, ..., 19이고 그 개수는 14이다.

답 ③

Level

2

기본 연습

본문 26~27쪽

1 ⑤

2 ③

3 18

4 ④

5 ⑤

6 ④

1 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = g(2) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x+3)f(x) = 5f(2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x-3)f(1-x) = f(-1),$$

$$g(2) = f(0)$$

$$\text{이므로 } 5f(2) = f(-1) = f(0)$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$5f(2) = 5(4 + 2a + b) = 20 + 10a + 5b$$

$$f(-1) = 1 - a + b$$

$$f(0) = b$$

$$f(-1) = f(0) \text{에서 } 1 - a + b = b \text{이므로 } a = 1$$

$5f(2) = f(0)$ 에서 $20 + 10a + 5b = b$ 이므로 $a = 1$ 을 대입하면

$$30 + 5b = b$$

$$b = -\frac{15}{2}$$

$$\text{따라서 } f(2) = \frac{1}{5}f(0) = \frac{1}{5}b = -\frac{3}{2}$$

답 ⑤

2 $x \neq 1, x \neq 2$ 일 때

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1+a+b}{1-2} = 2$$

$$a+b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = f(2) \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 4+2a+b=0 \text{에서}$$

$$2a+b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$a = -1, b = -2$$

따라서

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1=3 \end{aligned}$$

답 ③

3 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \\ &= \frac{-1+a-b-2}{-1-1} \\ &= \frac{3-a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1} = \frac{3-a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이어야 한다.

$\textcircled{㉢}$ 에서 $x \rightarrow 1-$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} (x^3+ax^2+bx-2) = 1+a+b-2=0 \text{에서}$$

$$b = 1 - a$$

$b = 1 - a$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+ax^2+(1-a)x-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+ax^2+(1-a)x-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+2\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{x^2+(a+1)x+2\} \\ &= 1+(a+1)+2 \\ &= a+4 \end{aligned}$$

$b=1-a$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{3-a+b}{2} = \frac{3-a+(1-a)}{2} = 2-a$$

이때 ㉡에서 $a+4=2-a$ 이므로 $a=-1$ 이고 $b=1-a=2$ 이다.

따라서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & (x < 1) \\ f(-x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이므로

$$f(4)=f(-4)=\frac{-64-16-8-2}{-4-1}=18$$

답 18

참고

$x < 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = x^2+2$$

이고 $x \geq 1$ 일 때

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2$$

이므로 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^2 + 2 \text{이다.}$$

- 4 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+3) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{ax+b}{x+1} \\ &= \frac{3a+b}{4}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x+5) = 5,$$

$$f(0) = 5$$

이므로

$$\frac{3a+b}{4} = 5$$

$$3a+b=20 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+5) = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax+b}{x+1} = \frac{a+b}{2},$$

$$f(1) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{이므로 } 4 = \frac{a+b}{2}$$

$$a+b=8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a=6, b=2$$

$$\text{따라서 } f(8)=f(5)=f(2)=\frac{2a+b}{2+1}=\frac{14}{3}$$

답 ④

- 5 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x-1) = -1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} a = a$, $f(0)=a$ 이고 $a > 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (참)

ㄴ. $a=1$ 이면 함수 $|f(x)|$ 는

$$|f(x)| = \begin{cases} |x-1| & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고 $x \neq 0$ 일 때 연속이다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0-} |x-1| = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1, |f(0)| = 1 \text{이므로}$$

함수 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 $a=1$ 이면 함수 $|f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $xf(x)$ 는

$$xf(x) = \begin{cases} x(x-1) & (x < 0) \\ ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고 $x \neq 0$ 일 때 연속이다.

이때 a 의 값에 관계없이

$$\lim_{x \rightarrow 0-} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x(x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} ax = 0, 0 \times f(0) = 0 \text{이므로}$$

함수 $xf(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $xf(x)$ 는 a 의 값에 관계없이 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 6 조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$ 의 모든 항의 계수가 정수이고
 조건 (나)에서 함수 $f(x) - x^2$ 은 일차 이하의 다항함수이므로
 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 정수)라 하자.

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) \\ &= a\end{aligned}$$

$$f(-4) = 16 - 4a + b \text{이므로}$$

$$a = 16 - 4a + b$$

$$b = 5a - 16$$

조건 (다)에서 함수 $\frac{1}{f(x)}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이

려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이어야 하므로 방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned}D &= a^2 - 4b \\ &= a^2 - 4(5a - 16) \\ &= a^2 - 20a + 64 \\ &= (a - 4)(a - 16)\end{aligned}$$

이므로 $D < 0$ 에서 $4 < a < 16$

a 는 정수이므로

$$a = 5, 6, 7, \dots, 15$$

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 + a + b \\ &= 1 + a + (5a - 16) \\ &= 6a - 15\end{aligned}$$

이므로 $f(1)$ 의 최댓값은 $a = 15$ 일 때

$$6 \times 15 - 15 = 75$$

답 ④

Level 3

실력 완성

본문 28쪽

1 18 2 ⑤ 3 ③

- 1 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로

$$|f(x)| = f(x)$$

조건 (가)에서 함수 $|f(x)g(x)| = f(x)|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 연속함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이므로 함수 $\frac{f(x)|g(x)|}{f(x)} = |g(x)|$ 도

실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = b$ 라 할 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} |g(x)| &= |a|, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} |g(x)| = |b| \text{이고} \\ |a| &= |b| = |g(1)| \text{이다.}\end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) > \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$ 에서 $a > b$ 이므로

$a > 0 > b$ 이고

$$b = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - 2x - 8) \\ &= 1 - 2 - 8 \\ &= -9\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)g(x)| = 9$ 이고 함수 $|f(x)g(x)|$ 는

$x = 1$ 에서 연속이므로

$$|f(1)g(1)| = f(1)|g(1)| = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또한

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1+} (3x + 1) \\ &= 3 + 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = 4$ 이고 함수 $\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \frac{|g(x)|}{f(x)}$ 는

$x = 1$ 에서 연속이므로

$$\frac{|g(1)|}{f(1)} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③에서 $|g(1)|^2 = 36$ 이므로

$$|g(1)| = 6$$

이것을 ③에 대입하면

$$f(1) = \frac{3}{2}$$

또한 $|a| = |b| = 6$ 이므로 ①에서

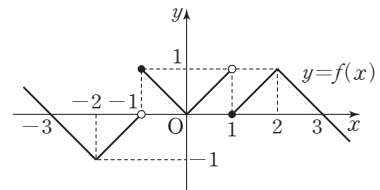
$$a = 6, b = -6$$

따라서

$$\begin{aligned}f(1) \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \right\} &= \frac{3}{2} \times \{6 - (-6)\} \\ &= 18\end{aligned}$$

답 18

- 2 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



∴ $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

또한 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 모두 불연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x)\{f(x) + k\}$ 라 하자.

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서만 불연속이므로

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면

함수 $g(x)$ 가 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)\{f(x) + k\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) + k\} \\ &= 0 \times (0 + k) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)\{f(x) + k\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) + k\} \\ &= 1 \times (1 + k) = 1 + k,\end{aligned}$$

$$g(-1) = f(-1)\{f(-1) + k\} = 1 + k$$

이므로 $0 = 1 + k$, 즉 $k = -1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

또한 $k = -1$ 이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\{f(x) - 1\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) - 1\} \\ &= 1 \times (1 - 1) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\{f(x) - 1\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) - 1\} \\ &= 0 \times (0 - 1) = 0,\end{aligned}$$

$$g(1) = f(1)\{f(1) - 1\} = 0$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 $k = -1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서만 불연속이고,

함수 $y=f(x-2)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $f(x-2)$ 는 $x=1$ 과 $x=3$ 에서만 불연속이다.

함수 $h(x)$ 를 $h(x) = f(x)f(x-2)$ 라 할 때,

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 함수 $h(x)$ 가 $x=-1$, $x=1$, $x=3$ 에서 모두 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -3+} f(x) \\ &= 0 \times 0 = 0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)f(x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} f(x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -3+} f(x)$$

$$= 1 \times 0 = 0,$$

$$h(-1) = f(-1)f(-3) = 1 \times 0 = 0$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \\ &= 1 \times 0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \\ &= 0 \times 1 = 0,\end{aligned}$$

$$h(1) = f(1)f(-1) = 0 \times 1 = 0$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3-} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \\ &= 0 \times 1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3+} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \\ &= 0 \times 0 = 0,\end{aligned}$$

$$h(3) = f(3)f(1) = 0 \times 0 = 0$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

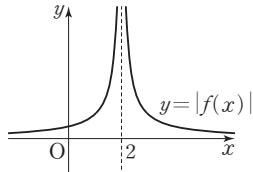
⑤

$$3 \quad f(x) = \frac{ax+b}{x-2} = \frac{a(x-2)+2a+b}{x-2} = a + \frac{2a+b}{x-2}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선은 직선 $x=2$ 와 직선 $y=a$ 이다.

함수 $g(t)$ 는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수이고, 함수 $h(t)$ 는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=tx$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수이다.

만약 $a=0$ 이면 $f(x) = \frac{b}{x-2}$ 이므로 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

이때 양수 t 에 대하여 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 항상 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $g(t)$ 는 $g(t)=2$ 로 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다. 그러므로 $a \neq 0$ 이다.

(i) $a > 0$ 인 경우

$a > 0$, $2a + b > 0$ 이므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.

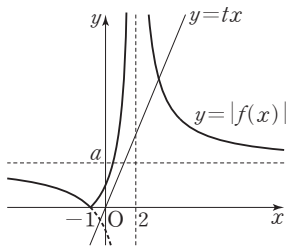
직선 $y=a$ 는 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 한 점근선이면서 x 축과 평행하므로

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < a) \\ 1 & (t = a) \\ 2 & (t > a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=a$ 에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $a=b$ 이므로

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-2} = \frac{a(x+1)}{x-2}, \text{ 즉 } f(-1)=0 \text{이다.}$$



[그림 2]

이때 함수 $h(t)$ 의 함수값은 항상 0 이상의 정수이고,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 3, \lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = 1 \text{이므로 함수 } h(t) \text{가}$$

$t=p$ 에서 불연속인 양수 p 가 존재한다. 즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 인 경우

㉠ $2a + b > 0$ 인 경우

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 3]과 같다.

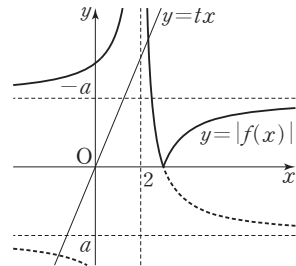
직선 $y=-a$ 는 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 한 점근선이면서 x 축과 평행하므로

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < -a) \\ 1 & (t = -a) \\ 2 & (t > -a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=-a$ 에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $b = -a$ 이므로

$$f(x) = \frac{ax-a}{x-2} = \frac{a(x-1)}{x-2} \text{이고 } f(1)=0 \text{이다.}$$



[그림 3]

그러나 $x < 2$ 에서 $f(x) \neq 0$ 이므로 모순이다.

㉡ $2a + b < 0$ 인 경우

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 4]와 같다.

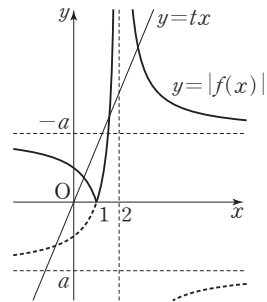
직선 $y=-a$ 는 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 한 점근선이면서 x 축과 평행하므로

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < -a) \\ 1 & (t = -a) \\ 2 & (t > -a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=-a$ 에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $b = -a$ 이므로

$$f(x) = \frac{ax-a}{x-2} = \frac{a(x-1)}{x-2} \text{이고 } f(1)=0 \text{이다.}$$



[그림 4]

이때 모든 양수 t 에 대하여 $h(t)=3$ 이므로 $h(4)=3$

$$\text{이고 } f(4) + h(4) = -3 \text{에서}$$

$$f(4) = -3 - h(4) = -3 - 3 = -6$$

$$\text{즉, } f(4) = \frac{3a}{2} = -6$$

$$a = -4, b = -a = 4$$

(i), (ii)에서 $a = -4$, $b = 4$ 이므로

$$f(x) = \frac{-4x+4}{x-2}$$

$$\text{따라서 } f(b) = f(4) = \frac{-16+4}{4-2} = -6$$

답 ③

03 미분계수와 도함수

유제

본문 31~37쪽

- 1 ② 2 ③ 3 2 4 ② 5 ①
6 ⑤ 7 ④

- 1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-1}{h} = 2$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(1+2h)-1\} = f(1)-1=0$ 이므로
 $f(1)=1$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) \\ &= 2\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=1$ 따라서 $f(1)+f'(1)=1+1=2$

답 ②

- 2 다항함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수
 $y=f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$$

 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

이므로

$$f(1)-f(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h\{f(1)-f(0)\}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+3h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{f(1)-f(0)} \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(1)-f(0)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} \times 3 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(1)-f(0)}$$

$$\begin{aligned}&= 3f'(2) \times \frac{1}{f'(2)} \\ &= 3\end{aligned}$$

답 ③

- 3 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$
에서 미분가능하면 된다.

- (i) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속
이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x+a) = a$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ x^2 + (a^2-2)x + \frac{1}{2}a^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

$$f(0) = a$$

따라서 $a = \frac{1}{2}a^2$ 에서 $a(a-2)=0$ 이므로

$$a=0 \text{ 또는 } a=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

- (ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(2x+a)-a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left\{ x^2 + (a^2-2)x + \frac{1}{2}a^2 \right\} - a}{x-0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + (a^2-2)x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \{x + (a^2-2)\}$$

$$= a^2-2$$

이므로 $a^2-2=2$ 에서

$$a^2=4$$

$$a=-2 \text{ 또는 } a=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a=2$

답 2

4 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$= f'(x)$$

이므로

$$f'(x) = 3x^2 + ax$$

따라서 $f'(1) = 3 + a = 2$ 이므로

$$a = -1$$

답 ②

5 $f(x+y) - f(x) = f(y) - xy - f(0)$

에서 $y \neq 0$ 이라 하면

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} - x$$

이므로

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y) - f(0)}{y} - x \right\}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(0+y) - f(0)}{y} - x \right\}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0+y) - f(0)}{y} - x$$

$$f'(x) = f'(0) - x$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$f'(-2) = f'(0) - (-2)$$

따라서 $f'(0) - f'(-2) = -2$

답 ①

6 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2x + a$$
이므로

$$f'(1) = 2 + a = 4$$

$$f(-1) = 1 - a + b = 2$$

즉, $a = 2, b = 3$ 이므로

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = -1$ 일 때 2이다.

답 ⑤

7 조건 (나)에 의하여

$$f(x) = (x-2)^2(x+a) \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2$$

따라서 조건 (가)에 의하여

$$f'(1) = -2(1+a) + 1 = 5$$

$$-2a = 6, a = -3$$

즉, $f(x) = (x-2)^2(x-3)$ 이므로

$$f(4) = 2^2 \times 1 = 4$$

답 ④

참고 상수 a 에 대하여

$$\{(x+a)^2\}' = 2(x+a) \text{이고}$$

$$\{(x+a)^3\}' = 3(x+a)^2 \text{이다.}$$

Level 1

7초 연습

본문 38~39쪽

1 ⑤

2 ⑤

3 ④

4 ①

5 ③

6 17

7 ④

8 ①

1 $\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{(1^3 - 1) - \{(-2)^3 - (-2)\}}{3} = \frac{6}{3} = 2$

답 ⑤

2 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) - f(1-2h) + f(1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times 2$
 $= 3f'(1) + 2f'(1)$
 $= 5f'(1)$
 $= 10$

답 ⑤

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + b}{x - 1} = 2f'(2)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + b\} = f(1) + b = 0 \text{에서}$$

$$b = -f(1)$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이므로

$$f'(1) = 2f'(2)$$

이때 $f'(x) = 2x + a$ 이므로

$$2 + a = 2(4 + a), 2 + a = 8 + 2a$$

$$a = -6$$

즉, $f(x) = x^2 - 6x + 2$ 에서

$$b = -f(1) = 3 \text{이므로}$$

$$a - b = -6 - 3 = -9$$

답 ④

4 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2-2}{h} = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{(-1+h)^2 + a(-1+h) + b\} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 - 2h + 1 - a + ah + b - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a-2)h - a + b - 1}{h}$$

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a-2)h - a + b - 1}{h} = 0$$

$h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \{h^2 + (a-2)h - a + b - 1\} = -a + b - 1 = 0$$

$$a - b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a-2)h - a + b - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a-2)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h + a - 2)$$

$$= a - 2$$

$$= 0$$

에서 $a = 2$

$a = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 3$ 이므로

$$ab = 2 \times 3 = 6$$

답 ①

다른 풀이

(i) 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1) \text{에서}$$

$$2 = 1 - a + b$$

$$a - b = -1$$

(ii) 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a-2)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h + a - 2)$$

$$= a - 2$$

즉, $a - 2 = 0$ 에서 $a = 2$ 이므로 $b = 3$

$$\text{따라서 } ab = 2 \times 3 = 6$$

5 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x \leq a) \\ x + a^2 & (x > a) \end{cases}$ 에서

$$x < a \text{일 때 } f'(x) = 2x$$

$$x > a \text{일 때 } f'(x) = 1$$

이고 도함수 $f'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f'(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = f'(a)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-} 2x = 2a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a+} 1 = 1$$

에서 $2a = 1$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a + f'(a) = \frac{1}{2} + f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

답 ③

6 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax - 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + a$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 7이므로

$$f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + a$$

$$= a + 4 = 7$$

$a = 3$ 이므로

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$\text{따라서 } f(a) = f(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 + 3 \times 3 - 1 = 17$$

답 17

7 $f(x) = x^2 - 2x$ 에서 $f'(x) = 2x - 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f'(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(2x-2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+1)$$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4$$

답 ④

8 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h(1) = f(1)g(1) = 2 \times 2 = 4$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

이때

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x(x^3 - 2x + 3) + (x^2 + 1)(3x^2 - 2)$$

이므로

$$h'(1) = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$$

답 ①

Level 2

기본 연습

본문 40~41쪽

- 1 ⑤ 2 2 3 ② 4 ⑤ 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ⑤

$$1 \quad f(x) = |x^2 - 1|(x + a)$$

$$= \begin{cases} (x^2 - 1)(x + a) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -(x^2 - 1)(x + a) & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{(1+h)^2 - 1\}(1+h+a) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^2 + 2h)(1+h+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h+2)(1+h+a)$$

$$= 2(1+a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\{(1+h)^2 - 1\}(1+h+a) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + 2h)(1+h+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \{-(h+2)(1+h+a)\}$$

$$= -2(1+a)$$

에서

$$2(1+a) = -2(1+a)$$

$$a = -1$$

$$\text{즉, } \alpha = -1$$

또한 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 - 2h)(-1+h+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \{-(h-2)(-1+h+a)\}$$

$$= 2(-1+a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(h^2 - 2h)(-1+h+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (h-2)(-1+h+a)$$

$$= -2(-1+a)$$

에서

$$2(-1+a) = -2(-1+a)$$

$$a = 1$$

$$\text{즉, } \beta = 1$$

$$\text{따라서 } \beta - \alpha = 1 - (-1) = 2$$

답 ⑤

$$2 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2mh) - f(a-2nh)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2mh) - f(a) - f(a-2nh) + f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2mh) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2nh) - f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2mh) - f(a)}{2mh} \times 2m$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2nh) - f(a)}{-2nh} \times 2n$$

$$= f'(a) \times 2m + f'(a) \times 2n$$

$$= f'(a)(2m + 2n)$$

또한 함수 $f(x)$ 가 다항함수이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2mnh) - 14}{h} \text{의 값이 존재하고 } h \rightarrow 0 \text{일 때}$$

$$(\text{분모}) \rightarrow 0 \text{이므로 } (\text{분자}) \rightarrow 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a-2mnh) - 14\} = f(a) - 14 = 0$$

$$\text{에서 } f(a) = 14$$

이때

$$f(a) \times f'(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2mnh) - 14}{h}$$

$$= 14f'(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2mnh) - f(a)}{-2mnh} \times (-2mn)$$

$$= 14f'(a) + f'(a) \times (-2mn)$$

$$= f'(a)(14 - 2mn)$$

이므로

$$f'(a)(2m + 2n) = f'(a)(14 - 2mn)$$

이때 $f'(a) \neq 0$ 이므로

$$m + n + mn = 7$$

$$(m+1)(n+1) = 8$$

따라서

$$m+1=1, n+1=8 \text{ 또는}$$

$$m+1=2, n+1=4 \text{ 또는}$$

$$m+1=4, n+1=2 \text{ 또는}$$

$$m+1=8, n+1=1$$

이고 m, n 은 자연수이므로 순서쌍 (m, n) 은

$(1, 3), (3, 1)$ 이고 그 개수는 2이다.

답 2

$$3 \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0) \text{이라 하고 조건 (가)에서 분모, 분자의 최고차항끼리만 비교하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^4}{3ax^4 + ax^4} = \frac{a}{4} = 3$$

즉, $a=12$ ㉠

또한 조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c = 0$ ㉡

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= f'(0) = b = 2 \quad \dots\dots ㉢ \end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$f(x) = 12x^2 + 2x \text{ 이므로 } f'(x) = 24x + 2$$

$$\text{따라서 } f'(1) = 26$$

답 ②

- 4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - a}{x^2 - 4} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - a\} = f(2) - a = 0$$

$$a = f(2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - a}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\} \\ &= f'(2) \times \frac{1}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } f'(2) = 8$$

또한 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{g(x)} = 6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{g(x) - g(2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{g(x) - g(2)}{x - 2}} \\ &= \frac{1}{g'(2)} \\ &= 6 \end{aligned}$$

이므로

$$g'(2) = \frac{1}{6}$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{ 에서}$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} h'(2) &= f'(2)g(2) + f(2)g'(2) \\ &= 8 \times 0 + a \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = 3$$

답 ⑤

- 5 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 다음 세 가지 경우가 존재한다.

$$(i) f(x) = x^2(x-1)(x-2)$$

$$(ii) f(x) = x(x-1)^2(x-2) = x(x^2 - 2x + 1)(x-2)$$

$$(iii) f(x) = x(x-1)(x-2)^2 = x(x-1)(x^2 - 4x + 4)$$

이때 $f'(x)$ 는 각각

$$f'(x) = 2x(x-1)(x-2) + x^2(x-2) + x^2(x-1)$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x-2) + 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)^2$$

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2 + x(x-2)^2 + 2x(x-1)(x-2)$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 (iii)의 경우이다.

$$\text{따라서 } f'(3) = 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 17$$

답 ②

- 6 $\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = f'(x) + g'(x) = 2$ ㉠

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x + 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 $x=0$ 을 각각 대입하면

$$f'(0) + g'(0) = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = f'(0) + 2g'(0) = 3 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $f'(0) = 1$, $g'(0) = 1$ 이므로

$$f'(0) \times g'(0) = 1 \times 1 = 1$$

답 ①

참고 $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 1$

- 7 $f(x) = ax^3 + b$ 에서 $f'(x) = 3ax^2$ 이므로
- $$\begin{aligned} \{f'(x)\}^2 + xf(x) + x &= (3ax^2)^2 + x(ax^3 + b) + x \\ &= (9a^2 + a)x^4 + (b+1)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$9a^2 + a = 0, \quad b + 1 = 0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로

$$a = -\frac{1}{9}, \quad b = -1$$

$$\text{따라서 } ab = \left(-\frac{1}{9}\right) \times (-1) = \frac{1}{9}$$

답 ④

8 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$$f'(3) = 6a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또한 조건 (나)에 의하여

$$f'(1) = 2a = 2 \text{이므로}$$

$$f'(1) = 2a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

또한 조건 (나)에 의하여 $f(1) = 2$ 이므로

$$f(1) = a + b + c = 2$$

$$\text{즉, } c = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } g(x) = f(2x) = -2x^2 + 6x - \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$g'(x) = -4x + 6$$

$$\text{즉, } g'(-1) = 4 + 6 = 10$$

답 ⑤

Level

3

실력 완성

본문 42쪽

1 180 2 ④ 3 ③

1 다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right)f(h) - f(x)f(h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)}{h} \times \frac{f(h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)}{\frac{h}{2}} \times \frac{1}{2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= f'(x) \times \frac{1}{2} \times f'(0) \end{aligned}$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \times f'(0) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f'(x) \times f'(0) = 3x^2 + 4x + 1$$

에서 우변은 x 에 대한 이차식이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$(3x^2 + 2ax + b) \times b = 3x^2 + 4x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 $\textcircled{㉠}$ 은 x 에 대한 항등식이므로

$$3b = 3, 2ab = 4, b^2 = 1 \text{에서}$$

$$a = 2, b = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 2x^2 + x \text{이므로}$$

$$f(5) = 5^3 + 2 \times 5^2 + 5 = 180$$

답 180

2 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ 에서

$$f'(x) = (x-a_2)(x-a_3) + (x-a_1)(x-a_3) + (x-a_1)(x-a_2)$$

이므로

$$g(x)$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{f(x)}{f'(a_k) \times (x-a_k)}$$

$$= \frac{f(x)}{f'(a_1)(x-a_1)} + \frac{f(x)}{f'(a_2)(x-a_2)}$$

$$+ \frac{f(x)}{f'(a_3)(x-a_3)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_1)(x-a_1)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_2)(x-a_2)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_3)(x-a_3)}$$

$$= \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_1)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{f'(a_2)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{f'(a_3)}$$

$$= \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

따라서

$$g(a_4)$$

$$= \frac{(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{(a_4-a_1)(a_4-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+ \frac{(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 \times 2}{(-2) \times (-4)} + \frac{6 \times 2}{2 \times (-2)} + \frac{6 \times 4}{4 \times 2} \\
 &= 1 - 3 + 3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 3 \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(h^2+2h+2)-2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2+2h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (h+2) \\
 &= 2 \quad \dots\dots \text{㉠} \\
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^2+2)-2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다.
따라서 $k>0$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않게 된다.

또한

$x<0$ 일 때, $f'(x)=2x+2$ 이므로

$x<-1$ 일 때 $f'(x)<0$

$-1 \leq x<0$ 일 때 $f'(x) \geq 0$

$x>0$ 일 때, $f'(x)=2x$ 이므로

$x>0$ 일 때 $f'(x)>0$

따라서 $k<-1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

(i) $k=-1$ 일 때

함수 $y=x^2+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$a=-1, b=-1$$

$$\text{따라서 } a+b+k=-3$$

(ii) $k=0$ 일 때

㉠에 의하여 $x>0$ 일 때, $f'(x)=2x$ 에서

$$2x=2$$

$$x=1$$

함수 $y=x^2+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$a=-1, b=-1$$

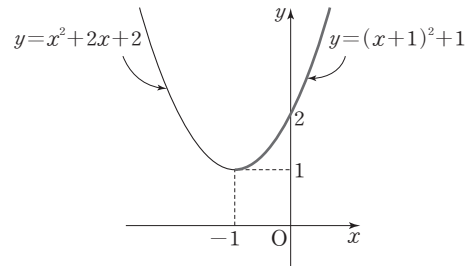
$$\text{따라서 } a+b+k=-2$$

(i), (ii)에 의하여 $a+b+k$ 의 최솟값은 -3 이다.

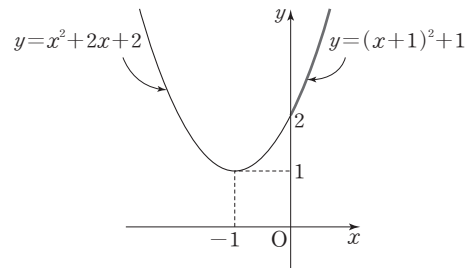
답 ③

참고

(i) $k=-1, a=-1, b=-1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(ii) $k=0, a=-1, b=-1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



04 도함수의 활용(1)

유제

본문 45~51쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 18 5 ④
6 67 7 ⑤ 8 ④

- 1 $y = x^2 f(x)$ 에서 $y' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$ 이고 점 $(1, 2)$ 가 곡선 $y = x^2 f(x)$ 위의 점이므로 $f(1) = 2$
곡선 $y = x^2 f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로
 $2 \times 1 \times f(1) + 1^2 \times f'(1) = 4 + f'(1) = 3$
즉, $f'(1) = -1$
따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - f(1) = f'(1) \times (x - 1)$
 $y - 2 = -(x - 1)$
즉, $y = -x + 3$
따라서 구하는 y 절편은 3이다.

답 ③

- 2 직선 $y = ax + a = a(x + 1)$ 은 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 중 곡선 $y = x^3$ 과 접하는 직선이 $y = ax + a$ 이다.
이때 제3사분면에 있는 접점을 (t, t^3) ($t < 0$)이라 하면
 $y' = 3x^2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - t^3 = 3t^2(x - t)$
 $y = 3t^2x - 2t^3$
이 접선이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로
 $2t^3 + 3t^2 = 0$
 $t^2(2t + 3) = 0$
따라서 $t = -\frac{3}{2}$ 이므로 접점은 $(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8})$ 이다.
이때 직선 $y = ax + a$ 는 점 $(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8})$ 을 지나므로
 $-\frac{3}{2}a + a = -\frac{27}{8}$
따라서 $a = \frac{27}{4}$

답 ③

- 3 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로
 $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$
 $\frac{-7 - (-3)}{2} = 3c^2 - 6c$
 $3c^2 - 6c = -2$
 $3c^2 - 6c + 2 = 0$
 $c = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 3 \times 2}}{3}$
 $= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$
이때 $0 < \frac{3 - \sqrt{3}}{3} < 2$, $0 < \frac{3 + \sqrt{3}}{3} < 2$ 이므로 평균값 정리를 만족시키는 모든 상수 c 의 값의 합은
 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 2$

답 ⑤

- 4 조건 (가)에 의하여
 $3 = 16a + 4b + 3$
 $4a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
또한 $f'(x) = 2ax + b$ 이고 조건 (나)에 의하여
 $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = f'(a)$
이므로
 $\frac{(16a + 4b + 3) - (4a + 2b + 3)}{2} = 2a^2 + b$
 $6a + b = 2a^2 + b$
 $2a(a - 3) = 0$
이때 $2 < a < 4$ 이므로 $a = 3$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -12$ 이므로
 $f(x) = 3x^2 - 12x + 3$
따라서 $f(5) = 3 \times 5^2 - 12 \times 5 + 3 = 18$

답 18

- 5 함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 - ax$ 의 역함수가 존재하지 않기 위해서는 실수 전체의 집합에서 감소하지 않아야 하므로
 $f'(x) = -3x^2 + 2ax - a$ 에서 방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 3a = a(a - 3) > 0$
 $a < 0$ 또는 $a > 3$
따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④

- 6 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A(1, 5), B(2, 0)$ 을 지나므로
 $f(1)=1+a+b+c=5$
 $a+b+c=4$ ㉠
 $f(2)=8+4a+2b+c=0$
 $4a+2b+c=-8$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $a=\frac{1}{2}c-8, b=-\frac{3}{2}c+12$
 또한 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-1, 1)$ 에서 감소하므로
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서
 $f'(-1)=3-2a+b\leq 0$
 $3-2(\frac{1}{2}c-8)+(-\frac{3}{2}c+12)=-\frac{5}{2}c+31\leq 0$
 $c\geq\frac{62}{5}$ ㉢
 $f'(1)=3+2a+b\leq 0$ 이므로
 $3+2(\frac{1}{2}c-8)+(-\frac{3}{2}c+12)=-\frac{1}{2}c-1\leq 0$
 $c\geq-2$ ㉣
 ㉢, ㉣에서
 $c\geq\frac{62}{5}$
 $f(0)=c$ 이므로 $f(0)$ 의 최솟값은 $\frac{62}{5}$ 이다.
 따라서 $p=5, q=62$ 이므로
 $p+q=67$

답 67

- 7 $f(x)=x^3-3x^2+6$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 근은
 $x=0$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $a=f(0)=6, b=f(2)=2^3-3\times 2^2+6=2$ 이므로
 $2a-b=10$

답 ⑤

- 8 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$ 에서
 $f'(x)=4x^3-4x+a$
 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로

$f'(0)=a=0$
 따라서 $f(x)=x^4-2x^2+b$ 이고
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 이므로 $x=-1, x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극솟값 3을 갖는다.
 $f(-1)=f(1)=1-2+b=3$
 $b=4$
 따라서 $a+b=0+4=4$

답 ④

Level 1

기초 연습

본문 52~53쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ①
 6 ② 7 ② 8 ④

- 1 $y=x^4-x$ 에서 $y'=4x^3-1$ 이고 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 -5 이므로 곡선 $y=x^4-x$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-2=-5(x+1)$
 즉, $y=-5x-3$
 따라서 접선의 x 절편은 $-\frac{3}{5}$ 이다.
- 2 $y=x^3-2x$ 에서 $y'=3x^2-2$ 이므로 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는
 $3\times 1^2-2=1$
 따라서 이 점선과 평행한 직선의 기울기도 1이고,
 $y=x^3-2x+1$ 에서 $y'=3x^2-2$ 이므로
 $3x^2-2=1$ 에서 $x^2=1$
 $x=-1$ 또는 $x=1$
 (i) $x=-1$ 일 때, $y=2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-2=x+1$, 즉 $y=x+3$
 (ii) $x=1$ 일 때, $y=0$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=x-1$
 이때 $b>0$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y=x+3$
 즉, $a=1, b=3$ 이므로
 $a+b=4$
- 3 $y=x^3+x^2-1$ 에서 $y'=3x^2+2x$ 이므로 접점을 (t, t^3+t^2-1) 이라 하면 접선의 방정식은

답 ③

답 ④

$$y - (t^3 + t^2 - 1) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$-t^3 - t^2 + 1 = -3t^3 - 2t^2$$

$$2t^3 + t^2 + 1 = 0$$

$$(t+1)(2t^2 - t + 1) = 0$$

따라서 $t = -1$ 이므로 구하는 접선의 기울기는

$$3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) = 1$$

답 ①

4 $f(x) = x^2$ 에서 $f'(x) = 2x$ 이므로

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c) \quad (n < c < n+1) \text{에서}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2c$$

$$c = a_n = n + \frac{1}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \left(k + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{10 \times 11}{2} + \frac{1}{2} \times 10 \\ &= 60 \end{aligned}$$

답 ①

5 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이므로 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 5a$ 이므로 이차방정식

$f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \times 5a \leq 0$$

$$a(a+15) \leq 0$$

즉, $-15 \leq a \leq 0$ 이므로 구하는 모든 정수 a 의 개수는 16이다.

답 ①

6 함수 $f(x) = x^3 + x^2 - ax + 1$ 이 일대일함수이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

즉, $f'(x) \geq 0$ 이다.

이때 $f'(x) = 3x^2 + 2x - a$ 이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 3 \times (-a) \leq 0$$

$$a \leq -\frac{1}{3}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

답 ②

7 $f(x) = x^3 - 12a^2x + 1$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 12a^2$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 에서

$3(x+2a)(x-2a) = 0$ 의 근은

$$x = -2a \text{ 또는 } x = 2a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	$-2a$	\cdots	$2a$	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-2a) &= (-2a)^3 - 12a^2 \times (-2a) + 1 \\ &= -8a^3 + 24a^3 + 1 \\ &= 16a^3 + 1 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$\begin{aligned} f(2a) &= (2a)^3 - 12a^2 \times 2a + 1 \\ &= 8a^3 - 24a^3 + 1 \\ &= -16a^3 + 1 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차가 256이므로

$$16a^3 + 1 - (-16a^3 + 1) = 32a^3 = 256$$

$$a^3 = 8$$

따라서 $a = 2$

답 ②

8 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 3$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$ 이고 $x = a$ 에서 극댓값, $x = \beta$ 에서

극솟값을 가지므로 방정식 $3x^2 + 2ax - 9 = 0$ 의 두 실근이 a, β 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = -\frac{2a}{3} = 2$$

이므로 $a = -3$

즉, $3x^2 - 6x - 9 = 0$ 에서 $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0 \text{이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	-1	\cdots	3	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 $a = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 3 \\ &= -1 - 3 + 9 + 3 = 8 \end{aligned}$$

답 ④

Level 2

기본 연습

본문 54~55쪽

- 1 ⑤ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ③
6 59 7 ③ 8 ⑤

1 $y = |x|(x+1) = \begin{cases} -x^2-x & (x \leq 0) \\ x^2+x & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$y' = \begin{cases} -2x-1 & (x < 0) \\ 2x+1 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $x < 0$ 일 때 기울기가 3인 접선과 곡선 $y = -x^2 - x$ 의 접점의 x 좌표는

$$-2x-1=3 \text{에서 } x=-2$$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, -2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 3(x+2) - 2 = 3x + 4$$

$$3x - y + 4 = 0$$

또한 $x > 0$ 일 때 기울기가 3인 접선과 곡선 $y = x^2 + x$ 의 접점의 x 좌표는

$$2x+1=3 \text{에서 } x=1$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 2)$ 이고 두 직선 사이의 거리는 점 $(1, 2)$ 와 직선 $3x - y + 4 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3-2+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

답 ⑤

2 $f(x) = x^3 + (a+4)x^2 + (4a+6)x + 4a+5$
 $= (x^2 + 4x + 4)a + x^3 + 4x^2 + 6x + 5$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 x 좌표는

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0 \text{에서 } x = -2 \text{이고 이때 } y \text{좌표는}$$

$$(-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) + 5 = 1$$

$$\text{즉, } P(-2, 1)$$

$$\text{또한 } f'(x) = 3x^2 + 2(a+4)x + 4a+6 \text{이고 } f'(-2) = 2$$

이므로 점 $P(-2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = 2(x + 2), \text{ 즉 } y = 2x + 5$$

따라서 직선 $y = 2x + 5$ 의 x 절편과 y 절편은 각각 $-\frac{5}{2}$, 5이

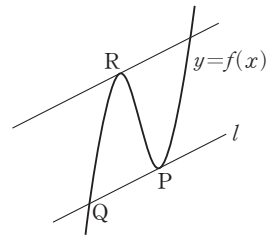
므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

답 ⑤

3 접선 l 은 두 점 P, Q 를 지나므로 접선 l 의 기울기는
 $\frac{-12 - (-6)}{-4 - 2} = 1$

또한 주어진 조건을 만족시키는 곡선 $y = f(x)$ 와 접선 l 의 개형은 그림과 같다.



따라서 점 $R(a, b)$ ($-4 < a < 2$)와 접선 l 사이의 거리가 최대가 되는 경우는 그림과 같이 접선 l 과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 점 R 에서 접할 때이다.

$$\text{이때 } f'(x) = 3x^2 - 11 \text{이므로}$$

$$3x^2 - 11 = 1 \text{에서 } x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{즉, } a = -2 \text{이므로}$$

$$b = (-2)^3 - 11 \times (-2) + 8 = 22$$

$$\text{따라서 } a + b = -2 + 22 = 20$$

답 ⑤

4 $f(x) = x^3 + x^2$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2x$ 이므로 접점을 $(t, t^3 + t^2)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

$$y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 곡선 $g(x) = x^2$ 에 접하므로

$$x^2 = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \text{에서 이차방정식}$$

$$x^2 - (3t^2 + 2t)x + 2t^3 + t^2 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면 } D = 0$$

이어야 한다.

$$D = (3t^2 + 2t)^2 - 4(2t^3 + t^2)$$

$$= 9t^4 + 12t^3 + 4t^2 - (8t^3 + 4t^2)$$

$$= 9t^4 + 4t^3 = 0$$

$$\text{에서 } t^3(9t + 4) = 0$$

$$\text{즉, } t = 0 \text{ 또는 } t = -\frac{4}{9}$$

그런데 $t = 0$ 이면 $a = 0$, $b = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{즉, } t = -\frac{4}{9} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$a + 3b = 3t^2 + 2t + 3(-2t^3 - t^2)$$

$$= -6t^3 + 2t$$

$$= -6 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^3 + 2 \times \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{88}{243}$$

답 ⑤

- 5 $f(x) = -2x^3 + 3(a+1)x^2 - 6ax - 3a^2 + 9a + 1$
에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6(a+1)x - 6a \\ &= -6\{x^2 - (a+1)x + a\} \\ &= -6(x-a)(x-1) \end{aligned}$$

따라서 $a < 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값

$$\begin{aligned} g(a) &= f(1) \\ &= -2 + 3(a+1) - 6a - 3a^2 + 9a + 1 \\ &= -3a^2 + 6a + 2 \end{aligned}$$

를 갖고, $a > 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) \\ &= -2a^3 + 3(a+1)a^2 - 6a^2 - 3a^2 + 9a + 1 \\ &= a^3 - 6a^2 + 9a + 1 \end{aligned}$$

을 갖는다.

또한 $a=1$ 일 때 $f'(x) = -6(x-1)^2 \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

따라서

$$g(a) = \begin{cases} -3a^2 + 6a + 2 & (a < 1) \\ a^3 - 6a^2 + 9a + 1 & (a > 1) \end{cases}$$

이므로

$$g'(a) = \begin{cases} -6a + 6 & (a < 1) \\ 3a^2 - 12a + 9 & (a > 1) \end{cases}$$

따라서

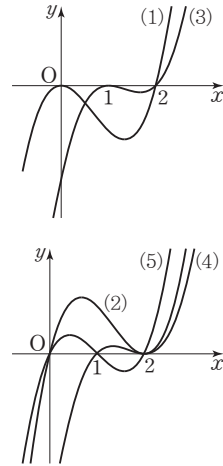
$$\begin{aligned} &\lim_{a \rightarrow 1^-} g'(a) + \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{g'(a)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^-} (-6a + 6) + \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{3a^2 - 12a + 9}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^-} (-6a + 6) + \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{3(a-1)(a-3)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^-} (-6a + 6) + \lim_{a \rightarrow 1^+} 3(a-3) \\ &= 0 + (-6) \\ &= -6 \end{aligned}$$

답 ③

- 6 서로 다른 2개의 동전을 던졌을 때, 앞면이 나온 동전의 개수는 0 또는 1 또는 2이고 극댓값을 갖기 위한 함수 $f(x)$ 는

- (1) $f(x) = x^2(x-2)$
- (2) $f(x) = x(x-2)^2$
- (3) $f(x) = (x-1)^2(x-2)$
- (4) $f(x) = (x-1)(x-2)^2$
- (5) $f(x) = x(x-1)(x-2)$

(1), (2), (3), (4), (5)의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(2) $f(x) = x(x-2)^2$ 인 경우에 극댓값 M 이 최대가 된다.

$f(x) = x(x-2)^2$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)^2 + 2x(x-2) \\ &= (x-2)(3x-2) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $x = \frac{2}{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극대이므로 M 의 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{32}{27}$$

즉, $p=27$, $q=32$ 이므로

$$p+q = 27+32=59$$

답 59

- 7 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에 의하여

$$f'(2) = 8 + 4a + b = 0$$

$$4a + b = -8$$

$$b = -4a - 8 \quad \dots\dots ㉠$$

또한 조건 (나)에 의하여 이차방정식 $2x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2b \leq 0$$

$$\text{즉, } a^2 \leq 2b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$a^2 + 8a + 16 \leq 0$$

$$(a+4)^2 \leq 0$$

a 는 실수이므로

$$a = -4$$

㉠에서 $b=8$ 또한 조건 (다)에 의하여 접선 l 의 방정식은

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)$$

$$y-(c+6)=2(x-3) \text{에서}$$

$$y=2x+c$$

접선 l 이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$c=-4$$

$$P\left(t, \frac{2}{3}t^3-4t^2+8t-4\right), Q(t, 2t-4) \text{이므로}$$

$$h(t)=\overline{PQ}$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3-4t^2+8t-4\right)-(2t-4)$$

$$=\frac{2}{3}t^3-4t^2+6t$$

$$h'(t)=2t^2-8t+6=2(t-1)(t-3) \text{이므로}$$

 $h'(t)=0$ 을 만족시키는 해는

$$t=1 \text{ 또는 } t=3$$

함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...	3	...
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 $t=1$ 에서 함수 $h(t)$ 는 극대이므로 구하는 극댓값은

$$h(1)=\frac{2}{3}-4+6=\frac{8}{3}$$

답 ③

- 8 조건 (나)와 a 의 최솟값이 -1 , b 의 최댓값이 3이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값을 갖고, $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{즉, } f'(-1)=0, f'(3)=0$$

또한 조건 (가)에서 극솟값은 -2 이므로

$$f(3)=-2$$

따라서 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2px+q \text{이므로}$$

$$f'(-1)=3-2p+q=0$$

$$2p-q=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(3)=27+6p+q=0$$

$$6p+q=-27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$p=-3, q=-9$$

또한 $f(3)=27-27-27+r=-2$ 이므로

$$r=25$$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+25$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1)=-1-3+9+25=30$$

답 ⑤

Level 3

실력 완성

본문 56~57쪽

1 ④

2 ②

3 25

4 ⑤

5 ⑤

- 1 조건 (나)를 만족시키는 접선의 방정식은

$$y-f(-2)=x+2$$

$$\text{즉, } y=x+f(-2)+2$$

이 직선이 점 $(2, f(2))$ 를 지나므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면

$$f(x)-\{x+f(-2)+2\}=k(x+2)^2(x-2)$$

$$f(x)=k(x+2)^2(x-2)+x+f(-2)+2$$

$$f'(x)=2k(x+2)(x-2)+k(x+2)^2+1$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=-8k+f(-2)+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(0)=-8k+4k+1=-4k+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$k=\frac{1}{4}, f(-2)=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2(x-2)+x+2 \text{이므로}$$

$$f(4)=\frac{1}{4} \times 6^2 \times 2+4+2=24$$

답 ④

- 2 $g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$ 에서

$$g(p)=f(p)-f(p)=0$$

$$g'(x)=f'(x)-f'(p) \text{이므로}$$

$$g'(p)=f'(p)-f'(p)=0$$

또한 삼차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이므로 $g(x)$ 도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.이때 $g(2)=0$ 이고 $p \neq 2$ 이므로

$$g(x)=(x-p)^2(x-2)$$

$$\text{즉, } f(x)=(x-p)^2(x-2)+f'(p)(x-p)+f(p) \text{이므로}$$

$$f'(x)=2(x-p)(x-2)+f'(p) \text{이므로}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=0, x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(0)=4p+p^2+f'(p)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1)=-2(1-p)+(1-p)^2+f'(p)$$

$$=p^2-1+f'(p)=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } f'(p)=-p^2-4p=-p^2+1 \text{이므로}$$

$$p = -\frac{1}{4}$$

②

- 3 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 서로 다른 두 실근의 합이 2이므로

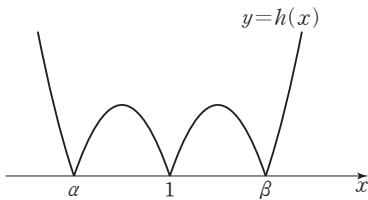
$$\alpha + \beta = 2$$

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 2x - \alpha - \beta = 2x - 2 \text{에서}$$

$$g(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)$$

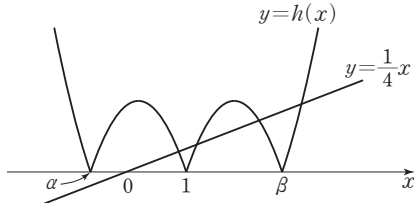
따라서 함수 $h(x) = |g(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $\alpha < 0$ 일 때

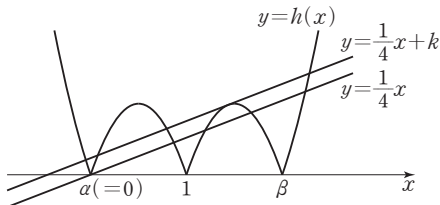
실수 k 의 최솟값이 0이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{4}x$ 는 교점의 개수가 5가 될 수 없다.



(ii) $\alpha \geq 0$ 일 때

실수 k 의 최솟값이 0이 되는 경우는 그림과 같이 $\alpha=0$ 일 때이다.



따라서 $\beta = 2 - \alpha = 2$ 이므로

$$g(x) = 2x(x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x-1)(x-2) + 2x(x-2) + 2x(x-1) \\ &= 6x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

이고 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$6t^2 - 12t + 4 = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$24t^2 - 48t + 17 = 0$$

$$1 < t < 2 \text{이므로}$$

$$t = \frac{12 + \sqrt{42}}{12} = 1 + \frac{\sqrt{42}}{12}$$

따라서 접점의 y 좌표는

$$\begin{aligned} -g\left(1 + \frac{\sqrt{42}}{12}\right) &= -2 \times \left(1 + \frac{\sqrt{42}}{12}\right) \times \frac{\sqrt{42}}{12} \times \left(\frac{\sqrt{42}}{12} - 1\right) \\ &= \frac{17\sqrt{42}}{144} \end{aligned}$$

이므로 실수 k 의 최댓값은

$$\frac{17\sqrt{42}}{144} - \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{\sqrt{42}}{12}\right) = \frac{7\sqrt{42} - 18}{72}$$

즉, $a=7, b=18$ 이므로

$$a+b=25$$

25

- 4 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

$$= 4(x-1)(x-2)(x-3)$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=3$ 에서 극솟값을 갖고, $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄱ. 열린구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 증가한다. (참)

ㄴ. $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 $1 < x < 2$ 에서 연속이고

$$f(1) = 1 - 8 + 22 - 24 + 9 = 0 \text{에서}$$

$$g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(2) = 16 - 64 + 88 - 48 + 9 = 1 \text{에서}$$

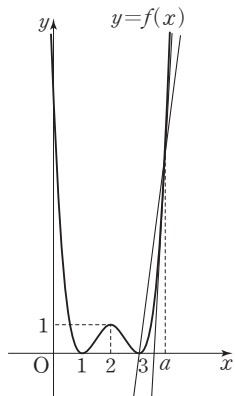
$$g(2) = f(2) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $1 < x < 2$ 에서 방정식

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = 0 \text{은 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)}$$

$$\text{ㄷ. } f(3) = 81 - 216 + 198 - 72 + 9 = 0 \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



또한 $\frac{f(a)}{a-3} = \frac{f(a)-f(3)}{a-3}$ 은 두 점 $(3, f(3))$,

$(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고 그림에 의하여

$$\frac{f(a)}{a-3} < f'(a)$$

즉, $f(a) < f'(a) \times (a-3)$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

$$\text{ㄷ. } f(x) = (x-1)^2(x-3)^2,$$

$$f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3) \text{ 이므로}$$

$$f'(a) - \frac{f(a)}{a-3}$$

$$= 4(a-1)(a-2)(a-3) - (a-1)^2(a-3)$$

$$= (a-1)(a-3)\{4(a-2) - (a-1)\}$$

$$= (a-1)(a-3)(3a-7)$$

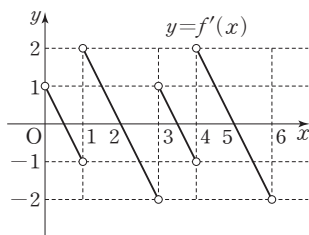
$$a > 3 \text{ 이므로 } f'(a) - \frac{f(a)}{a-3} > 0$$

즉, $f(a) < f'(a) \times (a-3)$ 이다. (참)

$$5 \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & (0 < x < 1) \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & (0 < x < 1) \\ -2x + 4 & (1 < x < 3) \end{cases}$$

이고 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 주기는 3이므로 열린 구간 $(0, 6)$ 에서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, 6)$ 에서 연속인 함수이다. 그런데

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 3+} f'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 4+} f'(x) > 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=3, x=4$ 에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다.

$g(x) = f(x) - mx$ 에서 $g'(x) = f'(x) - m$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 열린구간 $(0, 6)$ 에서 연속이고 $x=1, x=3, x=4$ 에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다.

또한 $a_7 < 6 \leq a_8$ 이므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 직선 $y=m$ 의 교점이 4개가 되어야 한다.

즉, $a_1, a_2=1, a_3, a_4=3, a_5, a_6=4, a_7$ 에서

$$a_3 = a_1 + \frac{3}{2}, a_5 = a_1 + 3, a_7 = a_1 + \frac{9}{2}$$

이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$= a_1 + 1 + \left(a_1 + \frac{3}{2}\right) + 3 + (a_1 + 3) + 4 + \left(a_1 + \frac{9}{2}\right)$$

$$= 4a_1 + 17$$

$$= 18$$

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

따라서 $m = -2 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$g'\left(\frac{11}{3}\right) = g'\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= f'\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= -2 \times \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}$$

답 ⑤

05 도함수의 활용(2)

유제

본문 61~65쪽

- 1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ① 5 ④
6 ③

- 1 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 에서
 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a+2$	↗	$a+4$	↘	$a-16$

닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $a+4$ 를 갖고, $x=4$ 일 때 최솟값 $a-16$ 을 갖는다.

즉, $a+4=8$ 에서 $a=4$

따라서 $m = a - 16 = 4 - 16 = -12$

답 ⑤

- 2 $f(x) = x^4 - 6a^2x^2 - 8a^3x$ 에서
 $f'(x) = 4x^3 - 12a^2x - 8a^3 = 4(x+a)^2(x-2a)$
 $f'(x) = 0$ 에서
 $x = -a$ 또는 $x = 2a$
 닫힌구간 $[0, 3a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2a$...	$3a$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-24a^4$	↗	$3a^4$

닫힌구간 $[0, 3a]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=3a$ 일 때 최댓값 $3a^4$ 을 갖고, $x=2a$ 일 때 최솟값 $-24a^4$ 을 갖는다.

즉, $-24a^4 = -48$ 에서 $a^4 = 2$

따라서 $M = 3a^4 = 6$ 이므로

$a^4 + M = 2 + 6 = 8$

답 8

- 3 방정식 $f(x) = g(x)$, 즉 $x^4 + a = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2$ 에서
 $-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2 = a$

$h(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2$ 라 하면

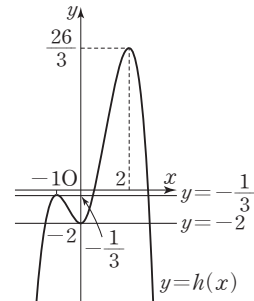
$h'(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x = -4x(x+1)(x-2)$

$h'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	-2	↗	$\frac{26}{3}$	↘



함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 방정식

$-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2 = a$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면

함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $a = -\frac{1}{3}$ 또는 $a = -2$ 이므로 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$$

답 ④

- 4 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = (3x^4 + 2x^2 + a) - (4x^3 + 2x^2 - 3)$$

$$= 3x^4 - 4x^3 + a + 3$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하려면 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립해야 하므로 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

이때 $h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$ 이므로

$h'(x) = 0$ 에서

$x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$h'(x)$	—	0	—	0	+
$h(x)$	\searrow	$a+3$	\searrow	$a+2$	\nearrow

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(1)=a+2$ 이므로 $a+2 \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $a \geq -2$ 이므로 실수 a 의 최솟값은 -2 이다.

답 ①

- 5 시각 $t=k$ ($k>0$)일 때 점 P의 위치를 원점이라 하면

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0 \text{에서 } k(k+1)(k-3) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k=3$$

즉, 점 P는 원점을 출발한 후 시각 $t=3$ 일 때 다시 원점을 지난다.

한편, 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 $x(t)$ 가

$$x(t) = t^3 - 2t^2 - 3t \text{이므로 속도 } v(t) \text{는}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 3t^2 - 4t - 3$$

따라서 점 P의 시각 $t=3$ 에서의 속도는

$$v(3) = 27 - 12 - 3 = 12$$

답 ④

- 6 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 $x_1(t)$ 가

$$x_1(t) = t^3 + t^2 - 5t \text{이므로 점 P의 속도 } v_1(t) \text{는}$$

$$v_1(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) = 3t^2 + 2t - 5$$

시각 $t=k$ 일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다고 하면 시각

$t=k$ 일 때 점 P의 속도가 0이므로

$$3k^2 + 2k - 5 = 0 \text{에서}$$

$$(3k+5)(k-1) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k=1$$

즉, 시각 $t=1$ 일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸고, 이때 두 점 P, Q가 만나야 한다.

$$\text{시각 } t=1 \text{일 때, 점 P의 위치는 } x_1(1) = 1 + 1 - 5 = -3$$

$$\text{시각 } t=1 \text{일 때, 점 Q의 위치는 } x_2(1) = 3 + a$$

$$\text{따라서 } -3 = 3 + a \text{에서 } a = -6$$

답 ③

Level

1

기초 연습

본문 66~67쪽

- 1 ⑤ 2 ② 3 ⑤ 4 ④ 5 2
6 ③ 7 ③ 8 ①

- 1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ 에서

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$	1	\searrow	$-\frac{1}{3}$	\nearrow	$\frac{13}{4}$

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{3}$ 을 갖는다.

답 ⑤

- 2 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + a$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$	a	\nearrow	$a+5$	\searrow	$a+4$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $a+5$ 를 갖고, $x=0$ 일 때 최솟값 a 를 갖는다.

$$M \times m = (a+5) \times a < 0 \text{에서}$$

$$-5 < a < 0$$

따라서 정수 a 의 값은 $-4, -3, -2, -1$ 이고 그 개수는 4이다.

답 ②

- 3 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ 라 하고, 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수

$f(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. 주어진 명제가 참이라면 $a \leq m, b \geq M$ 이어야 하므로 $b-a$ 는 $a=m,$

$b=M$ 일 때 최솟값 $M-m$ 을 갖는다.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	\searrow	-20	\nearrow	-9

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 0을 갖고, $x=2$ 일 때 최솟값 -20을 갖는다.

따라서 $M=0$, $m=-20$ 이므로 $b-a$ 의 최솟값은 $M-m=0-(-20)=20$

답 ⑤

- 4 x 에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+5x-k=0$ 이 서로 다른 두 개의 실근만을 갖기 위해서는 함수

$f(x)=x^3-4x^2+5x-k$ 의 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 해는

$$x=\frac{5}{3} \text{ 또는 } x=1$$

$$\text{즉, } f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3-4\times\left(\frac{5}{3}\right)^2+5\times\frac{5}{3}-k=0 \text{에서}$$

$$k=\frac{50}{27}$$

$$f(1)=1-4+5-k=0 \text{에서}$$

$$k=2$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$\frac{50}{27}+2=\frac{104}{27}$$

답 ④

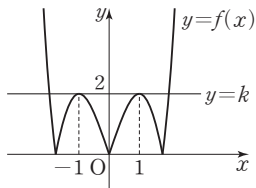
- 5 $g(x)=x^3-3x$ 라 하면

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 에서 방정식 $g'(x)=0$ 의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 $g(-1)=2$, 극솟값은

$g(1)=-2$ 이므로 함수 $f(x)=|g(x)|=|x^3-3x|$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=k$ 가 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위해서는 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$

가 서로 다른 네 개의 교점을 가져야 하므로

$$k=f(1)=|g(1)|=|-2|=2$$

답 2

- 6 $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

이므로 $x \geq 0$ 에서 $x=1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 극소이면서 최소이고 최솟값은 $f(1)=k-5$ 이다.

따라서 음이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^3+3x^2-9x+k > 0 \text{이 성립하기 위해서는}$$

$$f(1)=k-5 > 0$$

즉, $k > 5$ 이므로 정수 k 의 최솟값은 6이다.

답 ③

- 7 점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 속도, 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=3t^2-4t$$

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=6t-4$$

시각 $t=p$ ($p > 0$)에서의 점 P의 속도가 4이므로

$$v(p)=4 \text{에서 } 3p^2-4p=4$$

$$3p^2-4p-4=0, (3p+2)(p-2)=0$$

$$p > 0 \text{이므로 } p=2$$

따라서 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a(2)=6 \times 2 - 4 = 8$$

답 ③

- 8 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$x_1(t)=t^2-4t+2, x_2(t)=2t^3-t^2+4$$

이므로 선분 PQ의 중점 M의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치는

$$\frac{1}{2}\{(t^2-4t+2)+(2t^3-t^2+4)\}=t^3-2t+3$$

중점 M의 시각 t 에서의 속도는

$$\frac{d}{dt}(t^3-2t+3)=3t^2-2$$

점 M의 위치가 7일 때의 시각은

$$t^3-2t+3=7 \text{에서 } t^3-2t-4=0$$

$$(t-2)(t^2+2t+2)=0$$

이때 $t^2+2t+2=(t+1)^2+1 > 0$ 이므로

$$t=2$$

따라서 시각 $t=2$ 일 때 점 M의 속도는

$$3 \times 2^2 - 2 = 10$$

답 ①

Level 2

기본 연습

본문 68~69쪽

- 1 ④ 2 49 3 ④ 4 ② 5 ③
6 5 7 18 8 ⑤

1 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[-3, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	\nearrow	5	\searrow	-3	\nearrow

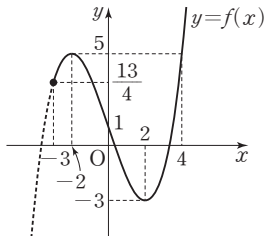
또한 $f(x) = 5$, 즉 $\frac{1}{4}x^3 - 3x + 1 = 5$ 에서

$$x^3 - 12x - 16 = 0$$

$$(x+2)^2(x-4) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구간 $[-3, \infty)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 닫힌구간 $[-3, n]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 최댓값 5를 갖도록 하는 자연수 n 의 값의 범위는 $1 \leq n \leq 4$ 이고, 이때 함수 $f(x)$ 는 $n=1$, $n=2$, $n=3$ 이면 $x=-2$ 에서 최댓값 5를 갖고, $n=4$ 이면 $x=-2$ 와 $x=4$ 에서 최댓값 5를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

답 ④

2 $f(x) = x^4 - 4x^2$ 에서

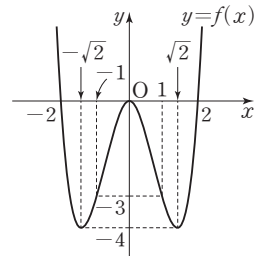
$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{2}$...	0	...	$\sqrt{2}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	-4	\nearrow	0	\searrow	-4	\nearrow



또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다.

(i) $n=1$ 일 때

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$f(0) = 0$, 최솟값은 $f(-1) = f(1) = -3$ 이므로

$a_1 b_1 = 0 \times (-3) = 0$ 이다. 즉, 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $n \geq 2$ 일 때

닫힌구간 $[-n, n]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(n)$,

최솟값은 $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -4$ 이다.

$a_n = f(n)$, $b_n = -4$ 이므로 $a_n b_n < -100$ 에서

$f(n) > 25$ 이다.

이때 $f(2) = 0$, $f(3) = 3^4 - 4 \times 3^2 = 45 > 25$ 이고 $x \geq 2$

일 때 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $f(n) > 25$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

(i), (ii)에서 $m=3$ 이고 $a_3 = f(3) = 45$, $b_3 = -4$ 이므로

$$a_m - b_m = a_3 - b_3 = 45 - (-4) = 49$$

답 49

3 $f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = f'(t)(x-t) + t^2$$

$$= 2t(x-t) + t^2$$

$$= 2tx - t^2$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(\frac{1}{2}t, 0)$, $(0, -t^2)$ 이다.

직선 l 과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$ 이므로 점 P를 지나고 직선 l 과 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

$$= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

두 점 C, D의 좌표는 각각 $(2t^3+t, 0)$, $(0, t^2+\frac{1}{2})$ 이다.

$0 < t < 1$ 에서

$$\overline{AC} = \left| (2t^3+t) - \frac{1}{2}t \right| = \left| 2t^3 + \frac{1}{2}t \right| = 2t^3 + \frac{1}{2}t$$

$$\overline{BD} = \left| \left(t^2 + \frac{1}{2} \right) - (-t^2) \right| = \left| 2t^2 + \frac{1}{2} \right| = 2t^2 + \frac{1}{2}$$

이때 $\overline{AC} = t \times \overline{BD}$ 이고 $0 < t < 1$ 이므로 $\overline{AC} < \overline{BD}$ 이다.

즉, 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차를 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = \overline{BD} - \overline{AC}$$

$$= \left(2t^2 + \frac{1}{2} \right) - \left(2t^3 + \frac{1}{2}t \right)$$

$$= -2t^3 + 2t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

$$g'(t) = -6t^2 + 4t - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(12t^2 - 8t + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}(6t-1)(2t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{1}{6} \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{1}{6}$...	$\frac{1}{2}$...	(1)
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	\searrow	$\frac{25}{54}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	(0)

즉, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다. 따라서 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

4 접점의 좌표를 (t, t^3-t) 라 하면 $y=x^3-x$ 에서

$$y' = 3x^2 - 1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

$$\text{즉, } y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

이 접선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = 3t^2 - 1 - 2t^3 = -2t^3 + 3t^2 - 1$$

따라서 $g(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ 이라 하면

$$g'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

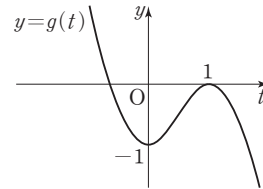
이므로 방정식 $g'(t)=0$ 의 해는

$$t=0 \text{ 또는 } t=1$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 일 때 극솟값 $g(0)=-1$ 을 갖고, $t=1$ 일 때 극댓값 $g(1)=0$ 을 가지므로 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



또한 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점의 개수가 서로 다른 접선의 개수와 같으므로

$$f(a) = \begin{cases} 1 & (a < -1) \\ 2 & (a = -1) \\ 3 & (-1 < a < 0) \\ 2 & (a = 0) \\ 1 & (a > 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(a)$ 가 불연속이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은

$$-1 + 0 = -1$$

답 ②

5 삼차함수 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax$ 의 그래프와 이차함수 $g(x)=x^2+b$ 의 그래프가 어떤 실수 b 에 대하여 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 방정식

$$x^3+(a+1)x^2+ax=x^2+b \text{가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.}$$

즉, 방정식 $b=x^3+ax^2+ax$ 의 실근이 3개 존재해야 한다.

함수 $y=x^3+ax^2+ax$ 의 극값이 존재해야 하므로

$y'=3x^2+2ax+a$ 에서 이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a = a(a-3) > 0 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $a < 0$ 또는 $a > 3$ 이므로 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ③

$$6 \quad f(x) = \log_n x + \log_{n^2}(3-x) - \frac{1}{2}$$

$$= \log_n x + \frac{1}{2} \log_n(3-x) - \frac{1}{2} < 0$$

$$\text{에서 } 2 \log_n x + \log_n(3-x) < 1$$

$$\log_n \{x^2(3-x)\} < 1$$

$$\log_n \{x^2(3-x)\} < \log_n n$$

이때 n 은 1보다 큰 자연수이므로

$$x^2(3-x) < n \quad (\text{단, } 0 < x < 3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x) = x^2(3-x) = -x^3 + 3x^2 \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

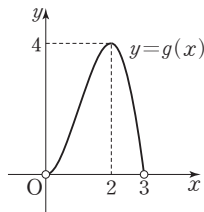
이고 방정식 $g'(x) = 0$ 의 해는

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극솟값 $g(0)=0$ 을 갖고, $x=2$ 일 때 극댓값 $g(2)=4$ 를 가지므로 $0 < x < 3$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, $0 < x < 3$ 에서 $0 < g(x) \leq 4$ 이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 5

7 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 라 하면

$$v_1(t) = f'(t) = t^2 + 2t$$

$$v_2(t) = g'(t) = 4t + 3$$

$$v_1(t) = v_2(t) \text{에서}$$

$$t^2 + 2t = 4t + 3$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t=3$$

$t=3$ 에서의

$$\text{점 P의 위치는 } f(3) = 18 + a$$

$$\text{점 Q의 위치는 } g(3) = 27$$

따라서 $t=3$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|(18+a) - 27| = |a-9| = 12 \text{에서}$$

$$a=21 \text{ 또는 } a=-3$$

따라서 구하는 모든 상수 a 의 값의 합은

$$21 + (-3) = 18$$

답 18

8 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$= 2t^3 - 6t + 7 - m$$

점 P가 출발한 후 운동 방향이 두 번 바뀌려면 t 에 대한 방정식 $2t^3 - 6t + 7 - m = 0$, 즉 $2t^3 - 6t + 7 = m$ 이 $t > 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 2t^3 - 6t + 7 \text{이라 하자.}$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6$$

$$= 6(t+1)(t-1)$$

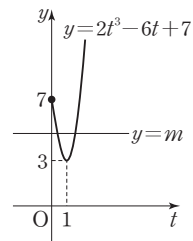
$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$t = -1 \text{ 또는 } t=1$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	\cdots	1	\cdots
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	7	\searrow	3	\nearrow

$t \geq 0$ 에서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $2t^3 - 6t + 7 = m$ 이 $t > 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 실수 m 의 값의 범위는 $3 < m < 7$ 이어야 한다.

따라서 구하는 정수 m 의 값은 4, 5, 6이고 그 합은

$$4 + 5 + 6 = 15$$

답 ⑤

Level 3

실력 완성

본문 70쪽

1 ④

2 156

3 ②

1 $f(x) = \frac{1}{7}x^3 - x^2$ 에서

$$f'(x) = \frac{3}{7}x^2 - 2x = x\left(\frac{3}{7}x - 2\right)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{14}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{14}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극댓값, $x=\frac{14}{3}$ 일 때 극솟값을 갖는다.

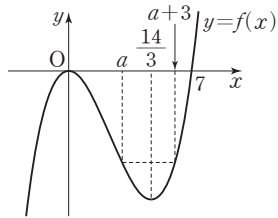
$$f(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{7}x^3 - x^2 = 0$$

$$\frac{1}{7}x^2(x-7) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 7$$

그러므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$0 < x < \frac{14}{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하고 $\frac{14}{3} < x < 7$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $0 < a < \frac{14}{3}$ 이고 $\frac{14}{3} < a+3 < 7$, 즉

$\frac{5}{3} < a < 4$ 일 때 $f(a) = f(a+3)$ 인 실수 a 가 존재한다.

$$f(a) = f(a+3) \text{에서}$$

$$\frac{1}{7}a^3 - a^2 = \frac{1}{7}(a+3)^3 - (a+3)^2$$

$$\frac{1}{7}a^3 - a^2 = \frac{1}{7}(a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - (a^2 + 6a + 9)$$

$$\frac{1}{7}(9a^2 + 27a + 27) - (6a + 9) = 0$$

$$3a^2 - 5a - 12 = 0$$

$$(a-3)(3a+4) = 0$$

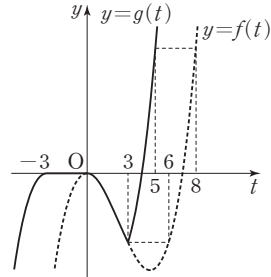
이때 $\frac{5}{3} < a < 4$ 이므로

$$a = 3$$

즉, 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} f(t+3) & (t < -3) \\ f(0) & (-3 \leq t < 0) \\ f(t) & (0 \leq t < 3) \\ f(t+3) & (t \geq 3) \end{cases}$$

이고 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$0 < t < 3$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 감소하고, $t > 3$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 증가한다.

$$g(0) = f(0) = 0$$

$$g(3) = f(6) = \frac{1}{7} \times 6^2 \times (6-7) = -\frac{36}{7}$$

$$g(5) = f(8) = \frac{1}{7} \times 8^2 \times (8-7) = \frac{64}{7}$$

즉, $0 \leq t \leq 5$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t=5$ 일 때 최댓값 $\frac{64}{7}$, $t=3$ 일 때 최솟값 $-\frac{36}{7}$ 을 갖는다.

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{64}{7} + \left(-\frac{36}{7}\right) = 4$$

답 ④

2 곡선 $y = ax^3 - 2x$ ($a > 0$)과 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{27}$ 의 서로 다른 교점의 개수가 6이 되기 위해서는 방정식

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = \frac{1}{27}$$

$$\text{즉, } a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - \frac{1}{27} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

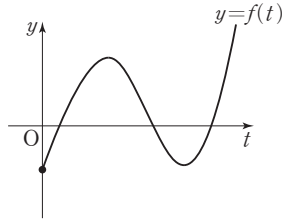
이 서로 다른 6개의 실근을 가져야 한다.

이때 $x^2 = t$ ($t \geq 0$)이라 하면 $\textcircled{1}$ 은

$$a^2t^3 - 4at^2 + 5t - \frac{1}{27} = 0 \text{이고 이 방정식이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.}$$

따라서 $f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - \frac{1}{27}$ 이라 하면 함수

$y=f(t)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5$$

$$= (3at - 5)(at - 1)$$

에서 방정식 $f'(t) = 0$ 의 해는

$$t = \frac{5}{3a} \text{ 또는 } t = \frac{1}{a}$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{a}$...	$\frac{5}{3a}$...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	$-\frac{1}{27}$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

즉, 극댓값은 양수, 극솟값은 음수이어야 하므로

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{4}{a} + \frac{5}{a} - \frac{1}{27} = \frac{2}{a} - \frac{1}{27} > 0 \text{에서}$$

$$a < 54 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$f\left(\frac{5}{3a}\right) = \frac{125}{27a} - \frac{100}{9a} + \frac{25}{3a} - \frac{1}{27} = \frac{50}{27a} - \frac{1}{27} < 0 \text{에서}$$

$$a > 50 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

\textcircled{L} , \textcircled{E} 에서 $50 < a < 54$ 이므로 구하는 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$51 + 52 + 53 = 156$$

답 156

3 조건 (가)에서

$$x_1(\alpha) - x_2(\alpha) = 0, v_1(\alpha) - v_2(\alpha) = 0$$

이므로

$$x_1(t) - x_2(t) = (t - \alpha)^2(t - \beta) \quad (\alpha, \beta \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

로 놓을 수 있다.

\textcircled{A} 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$v_1(t) - v_2(t) = 2(t - \alpha)(t - \beta) + (t - \alpha)^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{B} 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$a_1(t) - a_2(t) = 2(t - \beta) + 2(t - \alpha) + 2(t - \alpha)$$

$$= 2(t - \beta) + 4(t - \alpha)$$

조건 (가)에서 $a_1(\alpha) - a_2(\alpha) = 0$ 이므로

$$2(\alpha - \beta) + 4(\alpha - \alpha) = 0$$

$$\alpha - \beta = 0$$

따라서 $\alpha = \beta$ 이므로

$$a_1(t) - a_2(t) = 6(t - \alpha)$$

조건 (나)에서 $a_1(4) - a_2(4) = 6(4 - \alpha) = 12$ 이므로

$$4 - \alpha = 2$$

$$\alpha = 2$$

\textcircled{A} 에서

$$x_1(t) - x_2(t) = (t - 2)^3$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8$$

$$= t^3 + (a - 1)t^2 + (5 - b)t - c$$

이 식은 $t (t > 0)$ 에 대하여 항상 성립하므로

$$a = -5, b = -7, c = 8$$

따라서 $x_1(t) = t^3 - 5t^2 + 5t$, $x_2(t) = t^3 - 7t + 8$ 이므로

$$x_1(\alpha) + x_2(\alpha + 1) = x_1(2) + x_2(3)$$

$$= (8 - 20 + 10) + (9 - 21 + 8)$$

$$= -6$$

답 ②

수능개념

EBS 대표강사들과 함께 하는
수능의 개념을 잡아주는 필수 기본서

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~79쪽

- 1 ③ 2 ② 3 ④ 4 48 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ③

- 1 $f'(x) = x^2 - 2x$ 이므로
 $f(x) = \int (x^2 - 2x) dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)
 $f(a) = f(0)$ 에서
 $\frac{1}{3}a^3 - a^2 + C = 0 + C$
 $\frac{1}{3}a^2(a - 3) = 0$
 이때 $a \neq 0$ 이므로 $a = 3$

답 ③

- 2 $F(x) = f(x) + ax^3 - x$ ㉠
 에서 다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 다항함수 $F(x)$ 의 차수는 $n+1$ 이므로 ㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 이차함수이다.
 따라서 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $f(x) = x^2 + px + q$ (p, q 는 상수)
 로 놓을 수 있다.
 ㉠에서
 $F(x) = f(x) + ax^3 - x$
 $= (x^2 + px + q) + ax^3 - x$
 $= ax^3 + x^2 + (p-1)x + q$
 $F'(x) = f(x)$ 이므로 위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $x^2 + px + q = 3ax^2 + 2x + p - 1$ ㉡
 ㉡은 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $3a = 1, p = 2, q = p - 1$
 즉, $a = \frac{1}{3}, p = 2, q = 1$
 따라서 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$ 이므로
 $F(1) = \frac{1}{3} + 1 + 1 + 1 = \frac{10}{3}$

답 ②

$$3 \int_1^x (t^3 - 2t)f'(t)dt = \{f(x)\}^2 - f(x) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(x^3 - 2x)f'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) - f'(x) \\ = \{2f(x) - 1\}f'(x)$$

에서 다항함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로

$$2f(x) - 1 = x^3 - 2x$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\text{따라서 } f(1) + f'(1) = \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

답 ④

$$4 \int_{-1}^x f(t)dt = 2x^3 + ax^2 + b \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = -2 + a + b, a + b = 2$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x^2 + 2ax$$

$$f(1) = 4 \text{에서 } 6 + 2a = 4, a = -1$$

$$b = 2 - a = 2 - (-1) = 3$$

따라서 ㉠에서

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^3 f(x)dx \\ = 2 \times 3^3 + a \times 3^2 + b \\ = 54 + (-1) \times 9 + 3 \\ = 48$$

답 48

$$5 \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x)dx - \int_2^{-1} (x^2 + a)dx \\ = \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x)dx + \int_{-1}^2 (x^2 + a)dx \\ = \int_{-1}^2 \{(2x^2 - 2x) + (x^2 + a)\}dx \\ = \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + a)dx \\ = \left[x^3 - x^2 + ax \right]_{-1}^2 \\ = (8 - 4 + 2a) - (-1 - 1 - a) \\ = 6 + 3a = 8 \\ \text{따라서 } 3a = 2 \text{이므로} \\ a = \frac{2}{3}$$

답 ②

6 $\frac{d}{dx}\{(3x-1)f(x)\}=3f(x)+(3x-1)f'(x)$ 이므로

$$\int_1^3 3f(x)dx + \int_1^3 (3x-1)f'(x)dx$$

$$= \int_1^3 \{3f(x) + (3x-1)f'(x)\}dx$$

$$= \int_1^3 \frac{d}{dx}\{(3x-1)f(x)\}dx$$

$$= \left[(3x-1)f(x) \right]_1^3$$

$$= 8f(3) - 2f(1) = 0$$

따라서 $4f(3) = f(1)$ 이므로

$$\frac{f(3)}{f(1)} = \frac{1}{4}$$

답 ①

7 $\int_{-a}^a (3b^2x^2 - 2abx + ab^3)dx$

$$= \int_{-a}^a (3b^2x^2 + ab^3)dx - \int_{-a}^a 2abxdx$$

$$= 2 \int_0^a (3b^2x^2 + ab^3)dx - 0$$

$$= 2 \left[b^2x^3 + ab^3x \right]_0^a$$

$$= 2(b^2a^3 + a^2b^3)$$

$$= 2(ab)^2(a+b)$$

$$= 2 \times 4^2 \times (a+b)$$

$$= 32(a+b)$$

a, b 가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$32(a+b) \geq 32 \times 2\sqrt{ab} = 64 \times \sqrt{4} = 128$$

(단, 등호는 $a=b=2$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 128이다.

답 ④

8 $g(t) = \{tf(t)\}^2$ 이라 하고 함수 $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면 $G'(t) = g(t)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \int_{-3}^x \{tf(t)\}^2 dt = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \int_{-3}^x g(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{G(x) - G(-3)}{x - (-3)}$$

$$= G'(-3)$$

$$= g(-3)$$

$$= \{-3f(-3)\}^2$$

$$= 9 \times (9-9+1)^2$$

$$= 9$$

답 ③

Level 1

7초 연습

본문 80~81쪽

1 ①

2 ③

3 ④

4 ⑤

5 ③

6 ③

7 ⑤

8 ①

1 $\int f(x)dx = x^3 + ax^2 - x + C$ 에서

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

$$= (x^3 + ax^2 - x + C)'$$

$$= 3x^2 + 2ax - 1$$

방정식 $f(x) = 0$, 즉 $3x^2 + 2ax - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라

하면 모든 근의 합이 2이므로

$$\alpha + \beta = 2$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3} = 2$$

$$\text{즉, } a = -3$$

답 ①

2 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 이므로

$$f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$= x^3 - 2x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$(3x-1)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{3}$ 에서 극대이고 $x = 1$ 에서 극소이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{5}{27}$$

$$\text{즉, } f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{5}{27}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(1) = 1 - 2 + 1 + \frac{5}{27} = \frac{5}{27}$$

답 ③

- 3 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f'(x) = 2x + a$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x^2 + ax + b) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f'(x) dx &= \int_{-1}^2 (2x + a) dx \\ &= \left[x^2 + ax \right]_{-1}^2 \\ &= (4 + 2a) - (1 - a) \\ &= 3a + 3 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(4) = 16 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 19$$

답 ④

- 4 $a - b = -3, ab = 8$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b (2ax + b^2) dx &= \left[ax^2 + b^2x \right]_a^b \\ &= (ab^2 + b^3) - (a^3 + ab^2) \\ &= b^3 - a^3 \\ &= (b - a)(b^2 + ab + a^2) \\ &= (b - a)\{(b - a)^2 + 3ab\} \\ &= 3 \times (3^2 + 3 \times 8) \\ &= 99\end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}5 \quad \int_0^2 \frac{2t}{t+2} dt - \int_0^2 \frac{x^2-8}{x+2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2x}{x+2} dx - \int_0^2 \frac{x^2-8}{x+2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{-x^2+2x+8}{x+2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{-(x+2)(x-4)}{x+2} dx \\ &= \int_0^2 (4-x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 8 - 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

답 ③

- 6 $\int_1^x f(t) dt = 4x + \int_1^2 x^2 f(t) dt + a$ 이므로

$$\int_1^x f(t) dt = 4x + x^2 \int_1^2 f(t) dt + a$$

$\int_1^2 f(t) dt = b$ (b 는 상수)라 하면

$$\int_1^x f(t) dt = 4x + bx^2 + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4 + 2bx$$

즉, $\int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 (2bt + 4) dt = b$ 에서

$$\int_1^2 (2bt + 4) dt = \left[bt^2 + 4t \right]_1^2 = (4b + 8) - (b + 4) = b$$

$$2b = -4, b = -2$$

따라서 $f(x) = -4x + 4$ 이므로

$$f(1) = -4 + 4 = 0$$

답 ③

- 7 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + a) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x - 2) = f(1) \text{에서}$$

$$3 + a = 4 - 2, a = -1$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_a^3 f(x) dx &= \int_{-1}^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) dx + \int_1^3 (4x - 2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (3x^2 - 1) dx + \int_1^3 (4x - 2) dx \\ &= 2 \left[x^3 - x \right]_0^1 + \left[2x^2 - 2x \right]_1^3 \\ &= 2 \times (1 - 1) + \{(18 - 6) - (2 - 2)\} \\ &= 12\end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 8 \quad \int_{-a}^a (x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7)dx &= 2 \int_0^a (3x^2 - 7)dx \\
 &= 2 \left[x^3 - 7x \right]_0^a \\
 &= 2(a^3 - 7a) \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

에서 $a^3 - 7a + 6 = 0$, $(a+3)(a-1)(a-2) = 0$
 따라서 $a = -3$ 또는 $a = 1$ 또는 $a = 2$ 이므로
 구하는 모든 양수 a 의 값의 합은
 $1 + 2 = 3$

답 ①

Level 2

기본 연습

본문 82~83쪽

- 1 ① 2 ④ 3 56 4 ② 5 ④
 6 ③ 7 ① 8 ⑤

- 1 $f(x)g(x) = 8x^3 - 6x^2 + x$ ㉠
 일차함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $g(x)$ 는 이차함수이고
 $g(0) = 0$ 이므로
 $g(x) = ax^2 + bx$ (a, b 는 상수, $a > 0$)
 으로 놓을 수 있다.
 $f(x) = g'(x) = 2ax + b$
 이것을 ㉠에 대입하면
 $(2ax + b)(ax^2 + bx) = 8x^3 - 6x^2 + x$
 $2a^2x^3 + 3abx^2 + b^2x = 8x^3 - 6x^2 + x$ ㉡
 ㉡은 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $2a^2 = 8, 3ab = -6, b^2 = 1$ 에서
 $a > 0$ 이므로
 $a = 2, b = -1$
 따라서 $f(x) = 4x - 1, g(x) = 2x^2 - x$ 이므로
 $f(2) + g(2) = (8 - 1) + (8 - 2) = 13$

답 ①

- 2 조건 (가)에서 $\int \{f'(x)\}^2 dx = \int (2x - 1)f'(x)dx$ 의
 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\{f'(x)\}^2 = (2x - 1)f'(x)$ 이므로
 $f'(x)\{f'(x) - 2x + 1\} = 0$
 $f'(x) = 0$ 또는 $f'(x) = 2x - 1$
 이때 함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f(x) = \int (2x - 1)dx = x^2 - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

조건 (나)에서 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$ 이므로

$$\int_0^1 (x^2 - x + C)dx = \int_0^2 (x^2 - x + C)dx$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx \right]_0^2$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C = \frac{8}{3} - 2 + 2C$$

$$-\frac{1}{6} + C = \frac{2}{3} + 2C, C = -\frac{5}{6}$$

따라서 $f(x) = x^2 - x - \frac{5}{6}$ 이므로

$$f(2) = 4 - 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

답 ④

- 3 $f(x) = 3x^2 + 2x \int_{-1}^1 f(t)dt + \int_{-1}^1 t f(t)dt$ 에서
 $a = \int_{-1}^1 f(t)dt, b = \int_{-1}^1 t f(t)dt$ 라 하면 a, b 는 상수이고
 $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 $a = \int_{-1}^1 f(t)dt$
 $= \int_{-1}^1 (3t^2 + 2at + b)dt$
 $= 2 \int_0^1 (3t^2 + b)dt$
 $= 2 \left[t^3 + bt \right]_0^1$
 $= 2(1 + b)$
 $= 2 + 2b$
 즉, $a - 2b - 2 = 0$ ㉠
 $b = \int_{-1}^1 t f(t)dt$
 $= \int_{-1}^1 t(3t^2 + 2at + b)dt$
 $= 2 \int_0^1 2at^2 dt$
 $= 4a \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1$
 $= \frac{4}{3}a$
 즉, $4a - 3b = 0$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{6}{5}, b = -\frac{8}{5}$

따라서 $f(x) = 3x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{8}{5}$ 이므로

$$f(-4) = 3 \times (-4)^2 - \frac{12}{5} \times (-4) - \frac{8}{5} = 56$$

답 56

- 4 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$\int_{-3}^{-2} f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx = 2$$

$$\text{또한 } \int_{-3}^2 f(x) dx = 1 \text{이므로}$$

$$\int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 f(x) dx - \int_{-3}^{-2} f(x) dx$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1$$

따라서

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times (-1)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

답 ②

- 5 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면 조건 (가)에서

$$(1+a+b) + (1-a+b) = 0$$

$$2+2b=0, b=-1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + ax - 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a - 1$$

$$= \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}$$

$$\text{조건 (나)에서 } -1 \leq \frac{1}{2}a - \frac{2}{3} \leq 1 \text{이므로}$$

$$-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{10}{3} \quad \dots\dots ⑦$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^2 + ax - 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - x \right]_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2a - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2}a$$

$$\text{㉠에서 } -1 \leq \frac{3}{2}a \leq 5$$

따라서 $\int_{-1}^2 f(x) dx$ 의 최댓값은 5이고 최솟값은 -1이므로

최댓값과 최솟값의 합은

$$5 + (-1) = 4$$

답 ④

$$6 \quad f(x) + \int_0^x f(t) dt = x^3 + 2x + 8 \quad \dots\dots ①$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + f(x) = 3x^2 + 2 \quad \dots\dots ②$$

다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n ($n \geq 1$)이라 하면 함수 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$ 이므로 ②으로부터 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

$$f(x) = 3x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x + a \text{이므로 ②에서}$$

$$f'(x) + f(x) = 3x^2 + (a+6)x + (a+b) = 3x^2 + 2$$

$$\text{이므로 } a+6=0, a+b=2$$

$$a=-6, b=8 \text{이므로}$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8$$

따라서

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (3x^2 - 6x + 8) dx$$

$$= \left[x^3 - 3x^2 + 8x \right]_2^3$$

$$= (27 - 27 + 24) - (8 - 12 + 16)$$

$$= 12$$

답 ③

$$7 \quad G(t) = \int t f(t) dt \text{라 하면 } G'(t) = t f(t) = t(at^2 + b) \text{이므로}$$

$$G(t) = \int t(at^2 + b) dt = \int (at^3 + bt) dt$$

$$= \frac{1}{4}at^4 + \frac{1}{2}bt^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_0^x t f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(0)}{x-2} = 20 \text{에서}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{G(x) - G(0)\} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = G(0)$$

이때 함수 $G(x)$ 는 다항함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = G(2) = G(0)$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } 4a + 2b + C = C$$

$$b = -2a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(0)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(2)}{x - 2} \\ &= G'(2) = 2f(2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$f(2) = 10 \text{이므로}$$

$$4a + b = 10$$

$$b = -2a \text{이므로}$$

$$4a + (-2a) = 2a = 10$$

$$\text{즉, } a = 5, b = -10$$

$$\text{따라서 } f(x) = 5x^2 - 10 \text{이므로}$$

$$f(1) = 5 - 10 = -5$$

답 ①

- 8 $F(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로 $F'(x) = f(x)$
 $xf(x) = F(x) - 2x^3 + 2x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = f(x) - 6x^2 + 4x$$

$$xf'(x) = -6x^2 + 4x$$

$$f(x) \text{는 다항함수이므로}$$

$$f'(x) = -6x + 4$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (-6x + 4) dx$$

$$= -3x^2 + 4x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0) = C = 7 \text{이므로 } f(x) = -3x^2 + 4x + 7$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) - \{F(1-h) - F(1)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \frac{F(1-h) - F(1)}{-h} \right\}$$

$$= F'(1) + F'(1) = 2F'(1) = 2f(1)$$

$$= 2 \times (-3 + 4 + 7)$$

$$= 16$$

답 ⑤

3

실력 완성

본문 84~85쪽

1 ②

2 52

3 ①

4 ⑤

5 ③

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + 1\} = f(0) + 1 = 0 \text{에서}$$

$$f(0) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= f'(0) \\ &= 3 \end{aligned}$$

따라서 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0) = -1$, $f'(0) = 3$ 이므로

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 1 \text{ (} a, b \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)}$$

으로 놓을 수 있다.

$$4F(x) = (x-1)f(x) \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$4F(0) = -f(0) = 1, \text{ 즉 } F(0) = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$F(0) = \frac{1}{4} \text{에서 } C = \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } F(x) = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}$$

모든 실수 x 에 대하여 $4F(x) = (x-1)f(x)$ 이므로

$$ax^4 + \frac{4b}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$= (x-1)(ax^3 + bx^2 + 3x - 1)$$

$$= ax^4 + (b-a)x^3 + (3-b)x^2 - 4x + 1$$

$$\text{에서 } \frac{4b}{3} = b - a, 6 = 3 - b$$

따라서 $a = 1, b = -3$ 이므로

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{이때 } F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$f(2) + F(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

답 ②

- 2 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{ (} a, b \text{는 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$\int_{-2}^2 f(x)dx=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (x^3+ax^2+bx)dx &= 2\int_0^2 ax^2dx \\ &= 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= \frac{16a}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

에서 $a=0$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+bx$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)>0 \text{에서}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 방정

식 $f(x)=0$ 은 $x=0$ 과 양의 실근 $\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$, 음의 실근

$\beta\left(\beta<-\frac{1}{2}\right)$ 을 갖는다.

$\alpha\geq 2$ 라 하면 닫힌구간 $[0, \alpha]$ 에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x)\leq 0 \text{이므로 } g(x)=0 \text{이 되어}$$

$$\int_0^2 g(x)dx=0 \neq \frac{1}{4}$$

로 조건을 만족시키지 못한다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}<\alpha<2$$

이때 $f(x)=x(x^2+b)$ 이므로 $\beta=-\alpha$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } f(x)=x(x-\alpha)(x+\alpha)\left(\frac{1}{2}<\alpha<2\right)$$

따라서 $0\leq x\leq\alpha$ 에서 $f(x)\leq 0$,

$\alpha\leq x\leq 2$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)dx &= \int_0^\alpha g(x)dx + \int_\alpha^2 g(x)dx \\ &= 0 + \int_\alpha^2 f(x)dx \\ &= \int_\alpha^2 (x^3 - \alpha^2 x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha^2}{2}x^2\right]_\alpha^2 \\ &= (4 - 2\alpha^2) - \left(\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^4}{2}\right) \\ &= \frac{\alpha^4}{4} - 2\alpha^2 + 4 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{에서 } \alpha^4 - 8\alpha^2 + 15 = 0$$

$$(\alpha^2 - 3)(\alpha^2 - 5) = 0$$

이때 $\frac{1}{2}<\alpha<2$ 에서 $\frac{1}{4}<\alpha^2<4$ 이므로

$$\alpha^2=3, \alpha=\sqrt{3}$$

따라서 $f(x)=x^3-\alpha^2x=x^3-3x$ 이므로

$$f(4)=64-12=52$$

답 52

3 조건 (가)에서 $\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{3}\{f(x)+k\}$ 의 양변을

x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{3}\{f(x)+k\} + \frac{x-1}{3}f'(x)$$

$$\text{즉, } 2f(x) = k + (x-1)f'(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을

ax^n (n 은 자연수, a 는 0이 아닌 상수)

라 하면 $\textcircled{1}$ 의 양변의 최고차항이 서로 같아야 하므로

$$2ax^n = anx^n \text{에서 } n=2$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 이차함수이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$2ax^2+2bx+2c=2ax^2+(b-2a)x+k-b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2b=b-2a, 2c=k-b$$

$$\text{즉, } b=-2a, k=2(c-a)$$

$$f(x)=ax^2-2ax+c$$

$$=a(x-1)^2-a+c$$

$$=a(x-1)^2+\frac{k}{2}$$

한편, 조건 (나)로부터 $a>0$, $\frac{k}{2}=-4$, 즉 $k=-8$ 임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=a(x-1)^2-4$ 이고 조건 (다)에서 $f(0)\geq 0$

이므로 $\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은 $f(0)=0=f(2)$ 일 때, 즉 $a=4$

일 때 최소이다.

따라서 $\int_0^2 f(x)dx$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{4(x-1)^2-4\}dx &= \int_0^2 (4x^2-8x)dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_0^2 \\ &= -\frac{16}{3}\end{aligned}$$

답 ①

4. \neg . $f(x) = x(x-1)(x-2)$ 이면 $x \geq 1$ 에서

$$g(x) = \begin{cases} -(x^3 - 3x^2 + 2x) & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(3) &= \int_1^2 g(x) dx + \int_2^3 g(x) dx \\ &= \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx + 0 \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{ (참)} \end{aligned}$$

나. 함수 $h(x)$ 의 정의에 의하여 $h(2) > 0$ 이라면 구간 $(1, 2)$ 에서 $f(p) < 0$ 인 실수 p 가 존재하여야 한다. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이고

$f(p) < 0$ ($1 < p < 2$)이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(a) = 0$ ($a > p > 1$)인 실수 a 가 존재한다. (참)

다. $\alpha\beta < 0$ 이므로 $\alpha < 0$, $\beta > 0$ 이라 하자.

$f(a) = f(\beta) = 0$ 이고 $f(1) = 0$ 이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0 < \beta < 1$ 일 때

$\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 $g(x) = 0$

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \int_1^\alpha g(x) dx \\ &= \int_1^\beta g(x) dx + \int_\beta^\alpha g(x) dx \\ &= \int_1^\beta g(x) dx + 0 \\ &= h(\beta) \end{aligned}$$

즉, $h(\alpha)h(\beta) = \{h(\alpha)\}^2 \geq 0$

(ii) $\beta = 1$ 일 때

$$h(\beta) = \int_1^1 g(x) dx = 0 \text{이므로 } h(\alpha)h(\beta) = 0$$

(iii) $\beta > 1$ 일 때

$\alpha \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 $g(x) = 0$

$$\text{따라서 } h(\alpha) = \int_1^\alpha g(x) dx = 0 \text{이므로}$$

$$h(\alpha)h(\beta) = 0$$

(i), (ii), (iii)에서 $h(\alpha)h(\beta) \geq 0$ (참)

이상에서 옳은 것은 \neg , 나, 다이다.

답 ⑤

5 조건 (다)에 의하여 $f(1) \leq 0$ 이다.
 $f(1) < 0$ 이라 하자.

조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x) dx > 0$ 이므로 $0 < a < b < 1$ 일 때

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) > 0$ 인 두 실수 a, b 가 존재하여야 한다.

이때 $f(b) > 0$, $f(1) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $a < b < \alpha < 1$ 이고 $f(\alpha) = 0$ 인 실수 α 가 존재한다.

따라서 최고차항의 계수가 -2 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) = 0$, $f(\alpha) = 0$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 다른 한 근을 β 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= -2x^3 + 2(\alpha+\beta)x^2 - 2\alpha\beta x \end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \{-2x^3 + 2(\alpha+\beta)x^2 - 2\alpha\beta x\} dx \\ &= 2 \int_0^1 2(\alpha+\beta)x^2 dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{4(\alpha+\beta)}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $\beta = -\alpha$

$$f(x) = -2x(x-\alpha)(x+\alpha) = -2x^3 + 2\alpha^2 x$$

한편, $-1 \leq x \leq -\alpha$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고

$-\alpha \leq x \leq 0$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 |f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^{-\alpha} f(x) dx + \int_{-\alpha}^0 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^{-\alpha} (-2x^3 + 2\alpha^2 x) dx + \int_{-\alpha}^0 (2x^3 - 2\alpha^2 x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \alpha^2 x^2 \right]_{-1}^{-\alpha} + \left[\frac{1}{2}x^4 - \alpha^2 x^2 \right]_{-\alpha}^0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\alpha^4 + \alpha^4 \right) - \left(-\frac{1}{2} + \alpha^2 \right) + \left(-\frac{1}{2}\alpha^4 + \alpha^4 \right) \\ &= \alpha^4 - \alpha^2 + \frac{1}{2} \\ &\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 2\alpha^2 x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \alpha^2 x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + \alpha^2 \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $\int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx$ 이므로

$$\alpha^4 - \alpha^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \alpha^2$$

$$(a^2-1)^2=0$$

$a^2=1$ 이므로 $0 < a < 1$ 인 조건, 즉 $f(1) < 0$ 인 가정에 모순이 된다.

즉, $f(1)=0$ 이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -2 이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 다른 한 근을 p 라 하면

$$f(x) = -2x(x-1)(x-p)$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \{-2x^3 + 2(p+1)x^2 - 2px\} dx \\ &= 2 \int_0^1 2(p+1)x^2 dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{3}(p+1)x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}(p+1) \\ &= 0\end{aligned}$$

따라서 $p = -1$, $f(x) = -2x^3 + 2x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

답 ③

다른 풀이

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -2 이고 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다. 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (-2x^3 + ax^2 + bx) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^3 + bx) dx + \int_{-1}^1 ax^2 dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 ax^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2a}{3} = 0\end{aligned}$$

이므로 $a=0$

$$\text{즉, } f(x) = -2x^3 + bx$$

조건 (다)에서 $f(1) \leq 0$ 이므로 $f(1) < 0$ 이라 하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 0이 아닌 두 근을 $-a$, a ($0 < a < 1$)이라 하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 |f(x)| dx &= \int_{-1}^{-a} |f(x)| dx + \int_{-a}^0 |f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^{-a} f(x) dx + \int_{-a}^0 \{-f(x)\} dx\end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^{-a} f(x) dx - \int_{-a}^0 f(x) dx$$

이때

$$\int_{-1}^{-a} f(x) dx = - \int_a^1 f(x) dx,$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

이므로

$$\int_{-1}^0 |f(x)| dx = - \int_a^1 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

한편, 조건 (가)에서

$$\int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx \text{이므로}$$

$$- \int_a^1 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx$$

$$- \int_a^1 f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx$$

$$\int_a^1 f(x) dx = 0$$

즉, $a=1$ 이 되어 $0 < a < 1$ 에 모순이다.

그러므로 $f(1)=0$, 즉 $-2+b=0$ 에서 $b=2$ 이어야 하므로

$$f(x) = -2x^3 + 2x$$

$$\text{따라서 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

07 정적분의 활용

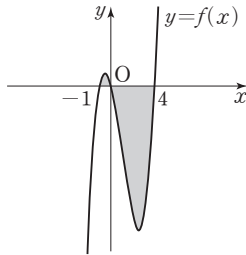
유제

본문 89~95쪽

- 1 ③ 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ③
6 35 7 ⑤ 8 ④

$$\begin{aligned}
 1 \quad f(x) &= \int (3x^2 - 6x - 4) dx \\
 &= x^3 - 3x^2 - 4x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
 f(0) &= 0 \text{에서} \\
 C &= 0 \\
 f(x) &= x^3 - 3x^2 - 4x \\
 &= x(x+1)(x-4)
 \end{aligned}$$

이므로

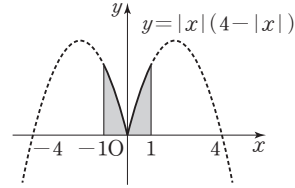
 $f(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$ 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^4 |x^3 - 3x^2 - 4x| dx \\
 &= \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2 - 4x) dx + \int_0^4 (-x^3 + 3x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2 \right]_0^4 \\
 &= \frac{3}{4} + 32 \\
 &= \frac{131}{4}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 2 \quad y &= |x|(4 - |x|) = \begin{cases} -x(x+4) & (-1 \leq x < 0) \\ -x(x-4) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{이므로} \\
 &\text{곡선 } y = |x|(4 - |x|) \text{는 그림과 같다.}
 \end{aligned}$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 |x|(4 - |x|) dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x^2 - 4x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \\
 &= \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$3 \quad f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 3$$

곡선 $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 4$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y - 4 = 4(x - 1)$$

$$\text{즉, } y = 4x$$

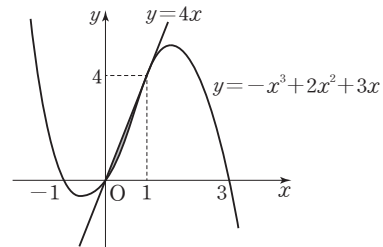
곡선 $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ 와 접선 l 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3 + 2x^2 + 3x = 4x \text{에서}$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

곡선 $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = 4x$ 는 그림과 같다.

$$\begin{aligned}
 4x - (-x^3 + 2x^2 + 3x) &= x^3 - 2x^2 + x \\
 &= x(x-1)^2
 \end{aligned}$$

 $x \geq 0$ 에서

$$x(x-1)^2 \geq 0 \text{이므로}$$

$$4x \geq -x^3 + 2x^2 + 3x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 |4x - (-x^3 + 2x^2 + 3x)| dx \\
 &= \int_0^1 \{4x - (-x^3 + 2x^2 + 3x)\} dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

답 ①

4 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

(i) $x < 0$ 인 경우

$$2x + 3 = x^2 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x < 0 \text{이므로 } x = -1$$

(ii) $x \geq 0$ 인 경우

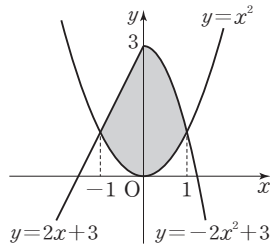
$$-2x^2 + 3 = x^2 \text{에서}$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x+1)(x-1) = 0$$

$$x \geq 0 \text{이므로 } x = 1$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



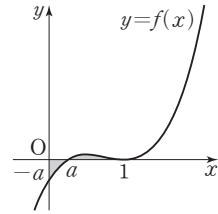
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx \\
 &= \int_{-1}^0 (2x+3-x^2) dx + \int_0^1 (-2x^2+3-x^2) dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x^2+2x+3) dx + \int_0^1 (-3x^2+3) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[-x^3 + 3x \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{3} + 2 \\
 &= \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

5 $f(x) = (x-a)(x-1)^2$ 이라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.



곡선 $y=(x-a)(x-1)^2$ ($x \leq a$)와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^a |f(x)| dx = - \int_0^a f(x) dx$$

곡선 $y=(x-a)(x-1)^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_a^1 |f(x)| dx = \int_a^1 f(x) dx$$

$$S_1 = S_2 \text{이므로}$$

$$S_2 - S_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 S_2 - S_1 &= \int_a^1 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 (x-a)(x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 \{x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{a+2}{3} + \frac{2a+1}{2} - a \\
 &= -\frac{1}{3}a + \frac{1}{12} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

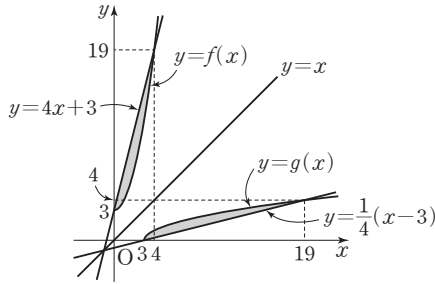
$$\text{따라서 } a = \frac{1}{4}$$

답 ③

6 함수 $y = \frac{1}{4}(x-3)$ 의 역함수는 $y = 4x + 3$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 와 두 직선 $y = \frac{1}{4}(x-3)$, $y = 4x + 3$ 은 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{4}(x-3)$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+3$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2+3=4x+3$ 에서

$$x^2-4x=0, x(x-4)=0 \text{ 이므로}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^4 \{(4x+3)-(x^2+3)\} dx &= \int_0^4 (-x^2+4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2 \right]_0^4 \\ &= -\frac{64}{3}+32 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

즉, $p=3, q=32$ 이므로

$$p+q=3+32=35$$

답 35

7 시각 t ($t \geq 0$)에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt$$

시각 $t=a$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} x(a) &= x(0) + \int_0^a v(t) dt \\ &= x(0) + \int_0^a (t^2-4t) dt \\ &= x(0) + \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2 \right]_0^a \\ &= x(0) + \frac{1}{3}a^3-2a^2 \end{aligned}$$

$x(a)=x(0)$ 에서

$$\frac{1}{3}a^3-2a^2=0$$

$$\frac{1}{3}a^2(a-6)=0$$

$$a>0 \text{ 이므로 } a=6$$

답 ⑤

8 점 P가 움직이는 방향이 바뀌는 순간 $v(t)=0$ 이므로 $t^3+(a-1)t^2-at=0$ 에서

$$t(t+a)(t-1)=0$$

이때 $a>0$ 이고 $p>0$ 이므로 $t=1=p$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t)=t(t+a)(t-1) \leq 0$ 이므로

시각 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v(t)| dt &= \int_0^1 |t^3+(a-1)t^2-at| dt \\ &= \int_0^1 \{-t^3-(a-1)t^2+at\} dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4-\frac{a-1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}-\frac{a-1}{3}+\frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{6}+\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a=\frac{3}{2}$$

답 ④

Level 1

기초 연습

본문 96~97쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ⑤ | 2 ④ | 3 ③ | 4 ② | 5 ③ |
| 6 ② | 7 ① | 8 ⑤ | | |

1 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고, 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$S_1 = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 f(x) dx$$

$$S_2 = \int_2^3 |f(x)| dx = -\int_2^3 f(x) dx$$

한편,

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= S_1 - S_2 = S_1 - \frac{1}{4}S_1$$

$$= \frac{3}{4}S_1 = \frac{9}{4}$$

에서 $S_1=3$, $S_2=\frac{1}{4}S_1=\frac{3}{4}$

따라서 $\int_0^3 |f(x)| dx = S_1 + S_2 = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

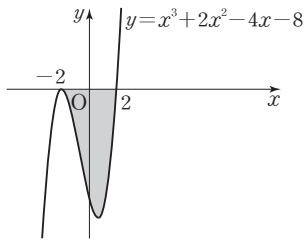
답 ⑤

- 2 곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$ 과 x 축이 만나는 점의 x 좌표는 $x^3+2x^2-4x-8=0$ 에서

$$(x+2)^2(x-2)=0$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$ 은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 |x^3+2x^2-4x-8| dx \\ &= \int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8) dx \\ &= \int_{-2}^2 (-x^3+4x) dx + \int_{-2}^2 (-2x^2+8) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (-2x^2+8) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^2 \\ &= 2 \times \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

답 ④

- 3 곡선 $y=x^3+x^2$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+x^2=2x$ 에서

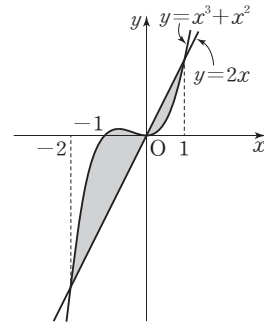
$$x^3+x^2-2x=0$$

$$x(x^2+x-2)=0$$

$$x(x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

곡선 $y=x^3+x^2$ 과 직선 $y=2x$ 는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 |x^3+x^2-2x| dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x) dx + \int_0^1 (2x-x^3-x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

답 ③

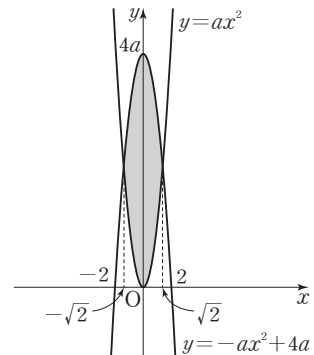
- 4 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^2 = -ax^2 + 4a \text{에서 } 2ax^2 = 4a$$

$$a > 0 \text{이므로 } x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$ 는 그림과 같다.



두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-ax^2+4a-ax^2) dx \\ &= 4a \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2+2) dx = 4a \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 4a \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}a \end{aligned}$$

$S=32$ 에서

$$\frac{16\sqrt{2}}{3}a=32$$

따라서 $a=3\sqrt{2}$

답 ②

- 5 곡선 $y=x^2-x-2$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표는
 $x^2-x-2=0$ 에서
 $(x+1)(x-2)=0$
 $x=-1$ 또는 $x=2$

$$\int_{-1}^2 \{-(x^2-x-2)\} dx = \int_2^k (x^2-x-2) dx \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^2 (x^2-x-2) dx + \int_2^k (x^2-x-2) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^k (x^2-x-2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^k \\ &= \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 - 2k - \frac{7}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 2k^3 - 3k^2 - 12k - 7 = 0$$

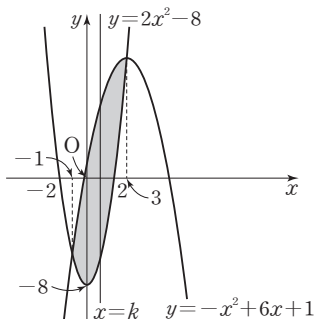
$$(k+1)^2(2k-7)=0$$

이때 $k > 2$ 이므로

$$k = \frac{7}{2}$$

답 ③

- 6 두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$ 의 교점의 x 좌표는
 $2x^2-8=-x^2+6x+1$ 에서
 $3(x^2-2x-3)=0$
 $3(x+1)(x-3)=0$
 $x=-1$ 또는 $x=3$
두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$ 은 그림과 같다.



두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 |(-x^2+6x+1)-(2x^2-8)| dx \\ &= \int_{-1}^3 (-3x^2+6x+9) dx \\ &= \left[-x^3+3x^2+9x \right]_{-1}^3 \\ &= 27 - (-5) \\ &= 32 \end{aligned}$$

두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $x=k$ 에 의하여 이등분되므로 $-1 < k < 3$ 이고

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_{-1}^k |(-x^2+6x+1)-(2x^2-8)| dx \\ &= \int_{-1}^k (-3x^2+6x+9) dx \\ &= \left[-x^3+3x^2+9x \right]_{-1}^k \\ &= -k^3+3k^2+9k - (-5) \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } k^3-3k^2-9k+11=0$$

$$(k-1)(k^2-2k-11)=0$$

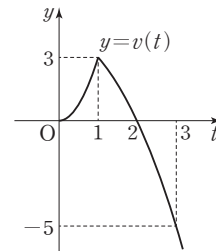
$$k=1 \text{ 또는 } k=1 \pm 2\sqrt{3}$$

이때 $-1 < k < 3$ 이므로

$$k=1$$

답 ②

- 7 함수 $y=v(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^3 |v(t)| dt \\ &= \int_0^1 3t^2 dt + \int_1^2 (-t^2+4) dt + \int_2^3 (t^2-4) dt \\ &= \left[t^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3+4t \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}t^3-4t \right]_2^3 \\ &= 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 ①

- 8 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$ 라 하면
 $a_1(t) = 6t - 8$, $a_2(t) = 4$
 $a_1(t) = a_2(t)$ 에서
 $6t - 8 = 4$, $t = 2$
시각 $t=0$ 에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시
각 $t=2$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각
 $x_1 = \int_0^2 (3t^2 - 8t) dt = \left[t^3 - 4t^2 \right]_0^2 = 8 - 16 = -8$
 $x_2 = \int_0^2 (4t + 1) dt = \left[2t^2 + t \right]_0^2 = 8 + 2 = 10$
따라서 $x_1 + x_2 = -8 + 10 = 2$

답 ⑤

Level
2

기본 연습

본문 98~99쪽

- 1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 ① 7 16 8 ③

$$1 \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & (x < 0) \\ -3 & (0 \leq x < 1) \\ bx^2 + 12x - 4a & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$,
 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = f(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = -3 \text{이므로 } b = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

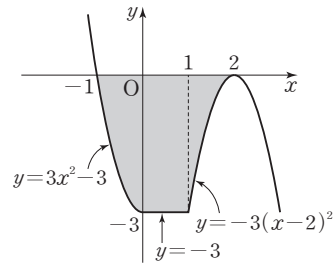
$$-3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-3x^2 + 12x - 4a) = 9 - 4a \text{이므로 } a = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & (x < 0) \\ -3 & (0 \leq x < 1) \\ -3x^2 + 12x - 12 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$x < 0$ 일 때 곡선 $y = 3x^2 - 3$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는
 $3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$ 에서
 $x = -1$

$x \geq 1$ 일 때 곡선 $y = -3x^2 + 12x - 12$ 가 x 축과 만나는 점
의 x 좌표는
 $-3x^2 + 12x - 12 = -3(x-2)^2 = 0$ 에서
 $x = 2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 |f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^0 (-3x^2 + 3) dx + \int_0^1 3 dx + \int_1^2 (3x^2 - 12x + 12) dx \\ &= \left[-x^3 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[3x \right]_0^1 + \left[x^3 - 6x^2 + 12x \right]_1^2 \\ &= 2 + 3 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 ②

- 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가
 $x^3 - 3x^2 + 2x$ 이므로

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극값은

$$f(0) = C, \quad f(1) = \frac{1}{4} + C, \quad f(2) = C$$

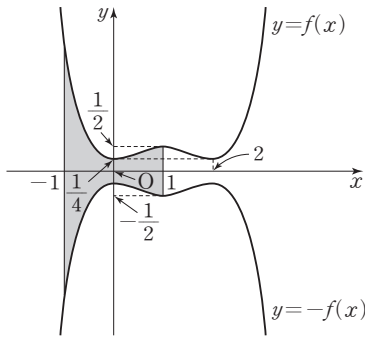
이고, 서로 다른 모든 극값의 합이 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$C + \left(\frac{1}{4} + C \right) = 2C + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{에서}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + \frac{1}{4} \text{이므로}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 은 그림과 같다.

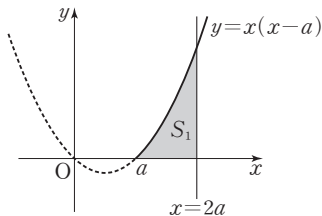


따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |f(x) - \{-f(x)\}| dx \\ &= \int_{-1}^1 2f(x) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{38}{15} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 3 곡선 $y=x(x-a)$ ($x \geq a$)와 x 축 및 직선 $x=2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1 은



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^{2a} (x^2 - ax) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^{2a} \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{a^3}{6} \\ &= \frac{5}{6}a^3 \end{aligned}$$

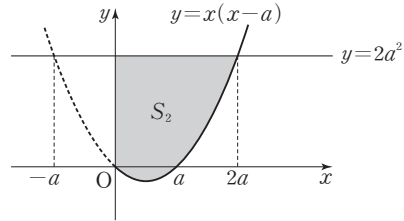
곡선 $y=x(x-a)$ 와 직선 $y=2a^2$ 이 만나는 점의 x 좌표는 $x(x-a)=2a^2$ 에서

$$x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

$$(x+a)(x-2a) = 0$$

$$x = -a \text{ 또는 } x = 2a$$

곡선 $y=x(x-a)$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y=2a^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2 는



$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{2a} (2a^2 - x^2 + ax) dx \\ &= \left[2a^2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{2a} \\ &= 4a^3 - \frac{8}{3}a^3 + 2a^3 \\ &= \frac{10}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{20}{27} \text{에서}$$

$$\frac{10}{3}a^3 - \frac{5}{6}a^3 = \frac{5}{2}a^3 = \frac{20}{27}$$

$$\text{따라서 } a^3 = \frac{8}{27} \text{이므로 } a = \frac{2}{3}$$

답 ④

- 4 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 3$ 이므로

$f(x) = x^2 + 3x + a$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^2 + 3x + a = 0$ 의 두 근을 α , β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = \alpha\beta$$

조건 (나)에서 $\alpha\beta = -3$ 이므로 $a = -3$

$$f(x) = x^2 + 3x - 3 \text{이므로 } f'(x) = 2x + 3$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 $f(x) = f'(x)$ 에서

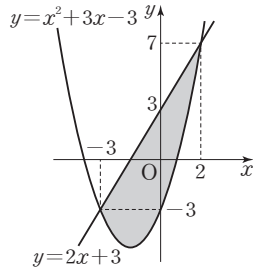
$$x^2 + 3x - 3 = 2x + 3$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

곡선 $y = x^2 + 3x - 3$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

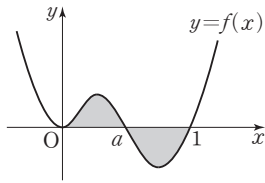
$$\begin{aligned}
 & \int_{-3}^2 |f'(x) - f(x)| dx \\
 &= \int_{-3}^2 \{2x + 3 - (x^2 + 3x - 3)\} dx \\
 &= \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^2 \\
 &= \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2} \right) \\
 &= \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

답 ④

5 $f(x) = x^4 - (1+a)x^3 + ax^2$
 $= x^2(x-1)(x-a)$

(i) $0 < a < 1$ 인 경우

곡선 $y=f(x)$ 는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

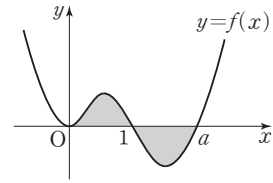
곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \{x^4 - (1+a)x^3 + ax^2\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1+a}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{1+a}{4} + \frac{a}{3} \\
 &= -\frac{1}{20} + \frac{a}{12} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

에서 $a = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

(ii) $a > 1$ 인 경우

곡선 $y=f(x)$ 는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a \{x^4 - (1+a)x^3 + ax^2\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1+a}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{5}a^5 - \frac{1+a}{4} \times a^4 + \frac{1}{3}a^4 \\
 &= a^4 \left(-\frac{a}{20} + \frac{1}{12} \right) = 0
 \end{aligned}$$

에서 $a \neq 0$ 이므로 $a = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a 의 값의 합은

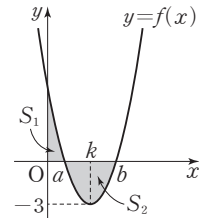
$$\frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15}$$

답 ②

6 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-3$ 이 한 점에서만 만나므로 포물선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점의 y 좌표가 -3 임을 알 수 있다.

즉, $f(x) = (x-k)^2 - 3$ ($k = \frac{a+b}{2}$)로 놓을 수 있다.

곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=k$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.



한편, $S_1 = \int_0^a f(x) dx$, $\frac{1}{2}S_2 = -\int_a^k f(x) dx$ 이므로

$S_2 = 2S_1$ 에서

$$-2 \int_a^k f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$2 \int_0^a f(x) dx + 2 \int_a^k f(x) dx = 2 \int_0^k f(x) dx = 0$$

$$\text{즉, } \int_0^k f(x)dx=0$$

$$\begin{aligned}\int_0^k f(x)dx &= \int_0^k (x^2 - 2kx + k^2 - 3)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - kx^2 + (k^2 - 3)x \right]_0^k \\ &= \frac{1}{3}k^3 - 3k = 0\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}k(k^2 - 9) = 0 \text{에서 } k > 0 \text{이므로 } k = 3$$

$$\text{즉, } f(x) = (x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 6$$

$$\text{한편, } f(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab \text{에서}$$

$$a+b=6, ab=6$$

$$\text{따라서 } f\left(\frac{a+b}{ab}\right) = f(1) = 1 - 6 + 6 = 1$$

답 ①

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 12$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표는

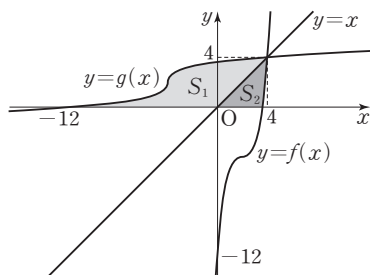
$$x^3 - 6x^2 + 12x - 12 = x \text{에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\text{따라서 } x = 4$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=x$ 는 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 넓이 S 는

$$S = S_1 + S_2$$

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^4 \{x - f(x)\}dx \\ &= \int_0^4 \{x - (x^3 - 6x^2 + 12x - 12)\}dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^4 (-x^3 + 6x^2 - 11x + 12)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 12x \right]_0^4$$

$$= 24$$

$$S_2 = \int_0^4 \{g(x) - x\}dx$$

$$= \int_0^4 g(x)dx - \int_0^4 xdx$$

$$= \int_0^4 g(x)dx - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4$$

$$= \int_0^4 g(x)dx - 8$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$= 24 + \left\{ \int_0^4 g(x)dx - 8 \right\}$$

$$= 16 + \int_0^4 g(x)dx$$

$$\text{따라서 } S - \int_0^4 g(x)dx = 16$$

답 16

8 시각 $t=0$ 에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 t ($0 \leq t \leq 3$)에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_1(t) = \int_0^t (2t^3 - 2t)dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right]_0^t = \frac{1}{2}t^4 - t^2$$

$$x_2(t) = \int_0^t (t^2 + 4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2$$

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_2(t)| &= \left| \left(\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right) - \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 \right|\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 2t^3 - t^2 - 6t = t(2t+3)(t-2)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$t = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

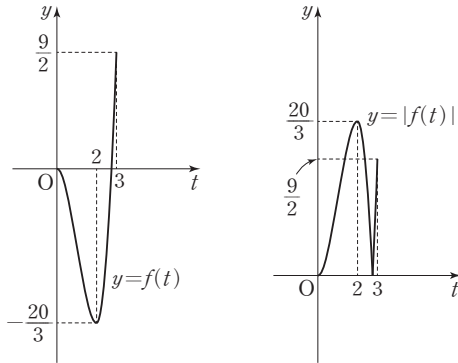
$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...	3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	\	극소	/	$\frac{9}{2}$

$$f(2) = 8 - \frac{8}{3} - 12 = -\frac{20}{3}$$

$$f(3) = \frac{81}{2} - 9 - 27 = \frac{9}{2}$$

이므로 $0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y=f(t)$ 와 함수 $y=|f(t)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $|x_1(t) - x_2(t)|$ 의 최댓값은 $\frac{20}{3}$ 이다.

답 ③

Level 3

실력 완성

본문 100~101쪽

1 ② 2 ⑤ 3 8 4 ① 5 ④

1
$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) & (f(x) < 0) \\ 0 & (f(x) \geq 0) \end{cases}$$

조건 (가)에서 $g(0)=0$ 이므로 $f(0) \geq 0$

$f(0) > 0$ 이라 하면 열린구간 $(0, c)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) > 0$, $g(x)=0$ 인 양수 c 가 존재한다.

이때 열린구간 $(0, c)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여

$$\int_0^x g(t)dt = 0 \text{이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.}$$

따라서 $f(0)=0$ 이어야 한다.

한편, $a < 0 < b$ 인 어떤 두 실수 a, b 에 대하여

(i) $a < x < 0$ 에서 $f(x) < 0$, $0 < x < b$ 에서 $f(x) > 0$ 이면
열린구간 $(0, b)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여 $g(x)=0$ 이

고 $\int_0^x g(t)dt = 0$ 이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a < x < 0$ 에서 $f(x) > 0$, $0 < x < b$ 에서 $f(x) < 0$ 이면
열린구간 $(a, 0)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여 $g(x)=0$ 이

고 $\int_0^x g(t)dt = 0$ 이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a < x < 0$ 에서 $f(x) > 0$, $0 < x < b$ 에서 $f(x) > 0$ 이면
열린구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $g(x)=0$ 이

고 $\int_0^x g(t)dt = 0$ 이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a < x < 0$ 에서 $f(x) < 0$, $0 < x < b$ 에서 $f(x) < 0$ 이어야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 가지므로

$f(x) = x^2(x-p)$ (p 는 양수)로 놓을 수 있다.

$f(1) = -1$ 에서 $1^2 \times (1-p) = -1$ 이므로

$p=2$

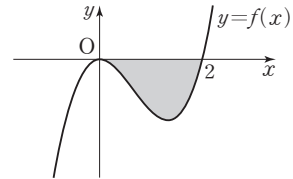
즉, $f(x) = x^2(x-2)$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표는

$x^2(x-2)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^3 - 2x^2| dx &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= -4 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ②

2 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^3 - 2x^2) = a^3 - 2a^2$$

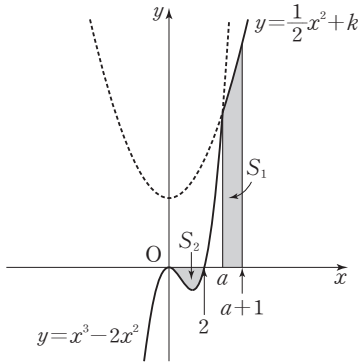
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \left(\frac{1}{2}x^2 + k \right) = \frac{1}{2}a^2 + k$$

$$f(a) = \frac{1}{2}a^2 + k$$

즉, $a^3 - 2a^2 = \frac{1}{2}a^2 + k$ 이므로

$$k = a^3 - \frac{5}{2}a^2 = a^2 \left(a - \frac{5}{2} \right) > 0 \text{에서 } a > \frac{5}{2}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=a+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1 은

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^{a+1} f(x) dx \\ &= \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{2}x^2 + k \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + kx \right]_a^{a+1} \\ &= \left\{ \frac{1}{6}(a+1)^3 + k(a+1) \right\} - \left(\frac{1}{6}a^3 + ka \right) \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} + k \end{aligned}$$

이때 $k = a^3 - \frac{5}{2}a^2$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} + a^3 - \frac{5}{2}a^2 \\ &= a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2 는

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^2 |f(x)| dx \\ &= \int_0^2 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= -4 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$S_1 = 8S_2 = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \text{에서}$$

$$a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} = \frac{32}{3}$$

$$a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{21}{2} = 0$$

$$2a^3 - 4a^2 + a - 21 = 0$$

$$(a-3)(2a^2+2a+7)=0$$

$$2a^2+2a+7=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}>0 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } k=3^3-\frac{5}{2}\times 3^2=\frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$a+k=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

⑤

3 $f(-x) = -f(x)$ ㉠

$f(x) = f(x-2) + 2a$ ㉡

㉠에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$x>0$ 일 때 $f(x)>f(0)=0$

㉠에서 곡선 $y=f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이다.

㉠, ㉡에 $x=1$ 을 각각 대입하면

$f(1) = -f(-1)$, $f(1) = f(-1) + 2a$ 이므로

$f(1) = a$, $f(-1) = -a$

㉡에서 곡선 $y=f(x-2)+2a$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

$f(2) = f(0) + 2a = 2a$

$f(3) = f(1) + 2a = 3a$

$f(4) = f(2) + 2a = 4a$

$f(5) = f(3) + 2a = 5a$

$f(6) = f(4) + 2a = 6a$

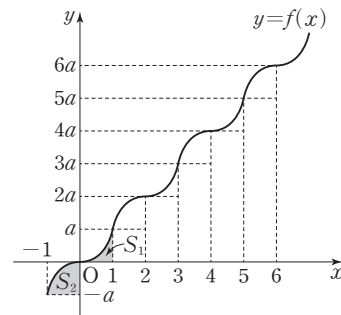
⋮

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$S_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = 2$

또한 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=-a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 S_2 는 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



$$\text{즉, } S_2 = a \times 1 - \int_0^1 f(x) dx = a - 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_3^6 f(x) dx &= \int_3^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx + \int_5^6 f(x) dx \\ &= (3a + S_2) + (4a + S_1) + (5a + S_2) \\ &= (3a + a - 2) + (4a + 2) + (5a + a - 2) \\ &= 14a - 2 \end{aligned}$$

$$\int_3^6 f(x) dx > 100 \text{에서}$$

$$14a - 2 > 100$$

$$a > \frac{51}{7}$$

따라서 구하는 자연수 a 의 최솟값은 8이다.

답 8

- 4 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a > 0$)이라 하면 조건 (가)에서

$$f'(x) = 3a(x-2)(x+2) = 3ax^2 - 12a$$

로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= ax^3 - 12ax + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

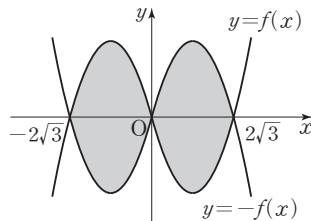
두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.

- (i) $f(2)f(-2) < 0$ 일 때

$$\text{조건 (다)에서 } f(0) = C = 0$$

$$f(x) = ax^3 - 12ax = ax(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 는 그림과 같다.



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} |f(x) - \{-f(x)\}| dx \\ &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2|f(x)| dx \\ &= 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \{-2f(x)\} dx \end{aligned}$$

$$= 4 \int_0^{2\sqrt{3}} (-ax^3 + 12ax) dx$$

$$= 4a \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 \right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= 4a(-36 + 72)$$

$$= 144a$$

$S = 24$ 에서 $144a = 24$ 이므로

$$a = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x) \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{1}{6}(1 - 12) = -\frac{11}{6}$$

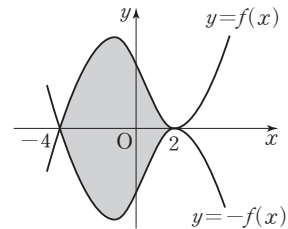
- (ii) $f(2) = 0$ 인 경우

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(2) = 8a - 24a + C = 0 \text{이므로}$$

$$C = 16a$$

$$f(x) = ax^3 - 12ax + 16a = a(x-2)^2(x+4)$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 는 그림과 같다.



$$S = \int_{-4}^2 |f(x) - \{-f(x)\}| dx$$

$$= \int_{-4}^2 2f(x) dx$$

$$= 2 \int_{-4}^2 (ax^3 - 12ax + 16a) dx$$

$$= 2a \left[\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x \right]_{-4}^2$$

$$= 2a\{12 - (-96)\}$$

$$= 216a$$

$S = 24$ 에서 $216a = 24$ 이므로

$$a = \frac{1}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{9}(x-2)^2(x+4) \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{1}{9} \times (-1)^2 \times 5 = \frac{5}{9}$$

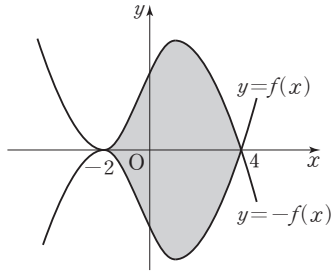
- (iii) $f(-2) = 0$ 인 경우

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(-2) = -8a + 24a + C = 0 \text{이므로}$$

$$C = -16a$$

$$f(x) = ax^3 - 12ax - 16a = a(x+2)^2(x-4)$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 는 그림과 같다.



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^4 |f(x) - \{-f(x)\}| dx \\
 &= \int_{-2}^4 \{-2f(x)\} dx \\
 &= 2 \int_{-2}^4 (-ax^3 + 12ax + 16a) dx \\
 &= 2a \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 + 16x \right]_{-2}^4 \\
 &= 2a \{96 - (-12)\} \\
 &= 216a
 \end{aligned}$$

$$S=24 \text{에서 } 216a=24 \text{이므로 } a=\frac{1}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{9}(x+2)^2(x-4) \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{1}{9} \times 3^2 \times (-3) = -3$$

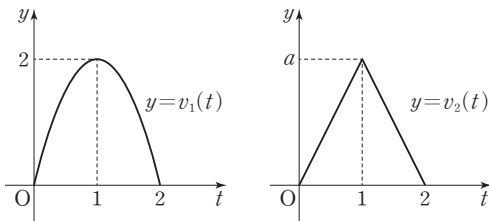
(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$ 의 최솟값은 -3 , 최댓값은 $\frac{5}{9}$ 이므로

$f(1)$ 의 최솟값과 최댓값의 합은

$$-3 + \frac{5}{9} = -\frac{22}{9}$$

답 ①

5 두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 점 P, Q의 시간 t ($0 \leq t \leq 2$)에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면 시간 $t=0$ 에서 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \text{이고}$$

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(t) dt$$

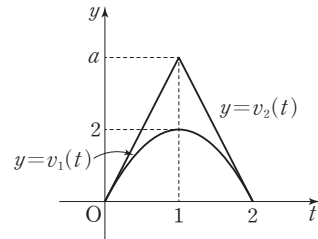
$$x_2(t) = \int_0^t v_2(t) dt$$

$0 \leq t \leq 2$ 에서 $v_1(t) \geq 0$, $v_2(t) \geq 0$ 이므로

$$x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0$$

따라서 점 P가 점 Q보다 항상 원점에 가깝거나 같은 위치에 있으려면 $0 \leq t \leq 2$ 인 모든 t 에 대하여 $x_1(t) \leq x_2(t)$ 이어야 한다.

두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$ 의 그래프는 각각 직선 $t=1$ 에 대하여 대칭이므로 $0 \leq t \leq 2$ 에서 $x_1(t) \leq x_2(t)$ 이려면 그림과 같이 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v_1(t) \leq v_2(t)$ 이어야 한다.



따라서 $0 \leq t \leq 1$ 에서

$$-2t^2 + 4t \leq at$$

$$\text{즉, } 2t\left(t - \frac{4-a}{2}\right) \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

을 만족시켜야 한다.

이때 $\frac{4-a}{2} > 0$ 이면 $0 < t < \frac{4-a}{2}$ 에서

$$2t\left(t - \frac{4-a}{2}\right) < 0 \text{이므로 } ㉠ \text{을 만족시키지 못한다.}$$

$$\frac{4-a}{2} \leq 0 \text{이면 } t \geq 0 \text{에서 } 2t\left(t - \frac{4-a}{2}\right) \geq 0 \text{이므로}$$

㉠을 만족시킨다.

따라서 $\frac{4-a}{2} \leq 0$ 에서 $a \geq 4$ 이므로 구하는 양수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④