p.01 [23] $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은?

⇨ (준식) $= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \right\}$

$$= 1 \times \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4)-4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x+4}+2\right) = 2+2 = 4$$

p.01 [24] $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은?

1 (준식) $= \int_0^1 (1+3x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$

$$= \frac{2}{9}(8-1) = \frac{14}{9}$$

2 (준식) $= \frac{1}{3} \times \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{9}(8-1) = \frac{14}{9}$$

p.02 [25] 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 ❶ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 3$

일 때, a_2의 값은?

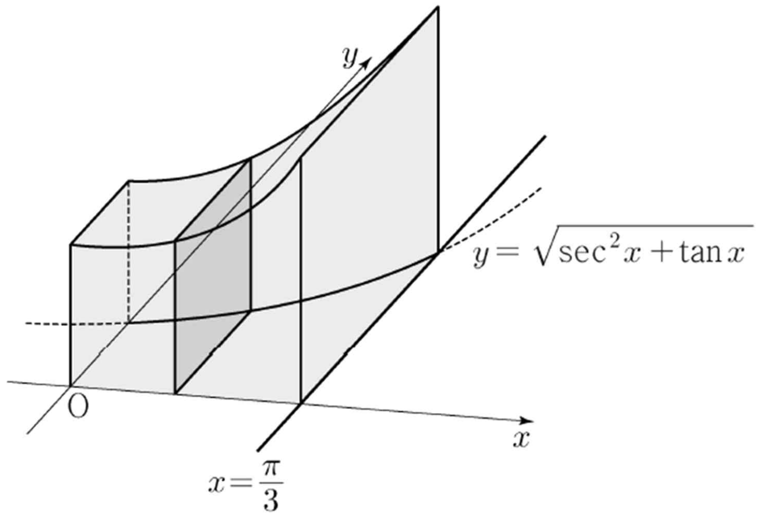
⇨ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항 : a, 공비 : $r \Rightarrow a_n = ar^{n-1}$

❶ $= \lim_{n \to \infty} \frac{a \times \frac{r^{n-1}}{4^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$: 수렴 $\Rightarrow r = 4$

❶ $= \frac{a}{2} = 3 \ \therefore \ a = 6$

$\therefore \ a_2 = 6 \times 4 = 24$

p.02 [26] 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\sec^2 x + \tan x}$ $(0 \le x \le (\pi/3))$와 x축, y축 및 직선 $x = (\pi/3)$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



⇨ 단면의 넓이 : $\left(\sqrt{\sec^2 x + \tan x}\right)^2 = \sec^2 x + \tan x$

$\therefore$ (부피) $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^x - \frac{(\cos x)'}{\cos x}\right) dx$

p.02 [26] 입체도형의 부피는?

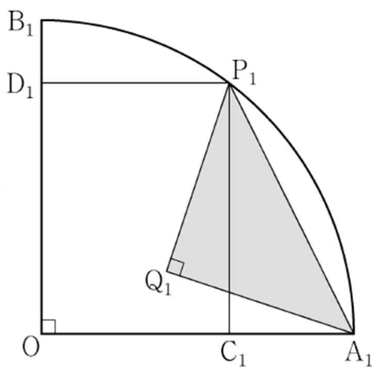
$$⇨ \ (\text{부피}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^x - \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right) dx$$

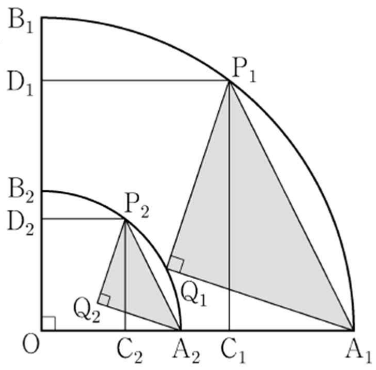
$$= \left[\tan x - \ln|\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \tan\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{3}$$

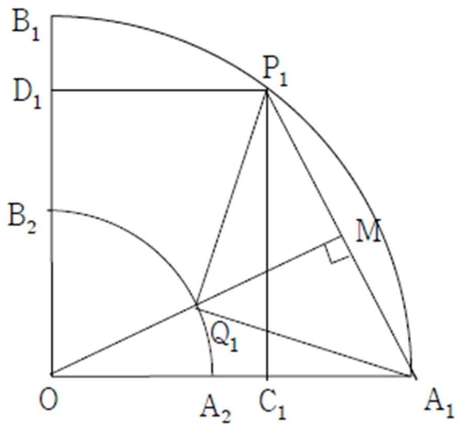
$$= \sqrt{3} - \ln\frac{1}{2} = \sqrt{3} + \ln 2$$

p.03 [27] 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $(\pi/2)$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다. 부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = (\pi/2)$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서





선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, p.03 [27] 중심각의 크기가 $(\pi/2)$인 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{Q_2}$를 잡고, 이등변삼각형 $\mathrm{P_2Q_2A_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, ❶ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?



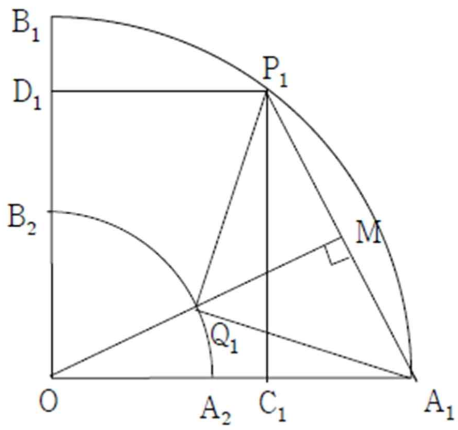
Let $\overline{\mathrm{OC_1}} = 3t$, $\overline{\mathrm{OD_1}} = 4t$ $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{OP_1}} = 5t$

$5t = 1$ $\therefore$ $t = (1/5)$

$$\overline{\mathrm{OC_1}} = \frac{3}{5},\ \overline{\mathrm{A_1C_1}} = \frac{2}{5},\ \overline{\mathrm{C_1P_1}} = \overline{\mathrm{OD_1}} = \frac{4}{5}$$

$$\overline{\mathrm{A_1P_1}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

p.03 [27] ❶ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?



$$\overline{\mathrm{OC_1}} = \frac{3}{5},\ \overline{\mathrm{A_1C_1}} = \frac{2}{5},\ \overline{\mathrm{C_1P_1}} = \overline{\mathrm{OD_1}} = \frac{4}{5}$$

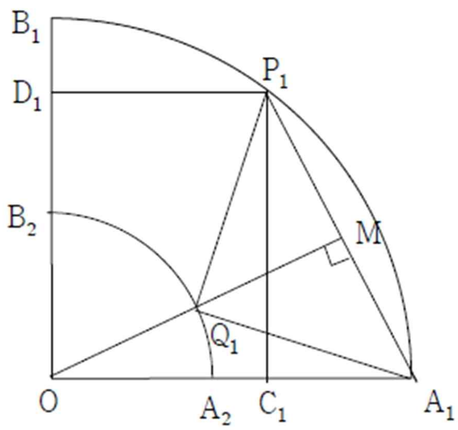
$$\overline{\mathrm{A_1P_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \overline{\mathrm{A_1Q_1}} = \overline{\mathrm{P_1Q_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$S_1 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$, Let $\overline{\mathrm{A_1P_1}}$의 중점 : M

$$\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \overline{\mathrm{Q_1M}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{\mathrm{OQ_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

p.03 [27] ❶ $\lim_{n \to \infty} S_n$ 의 값은?



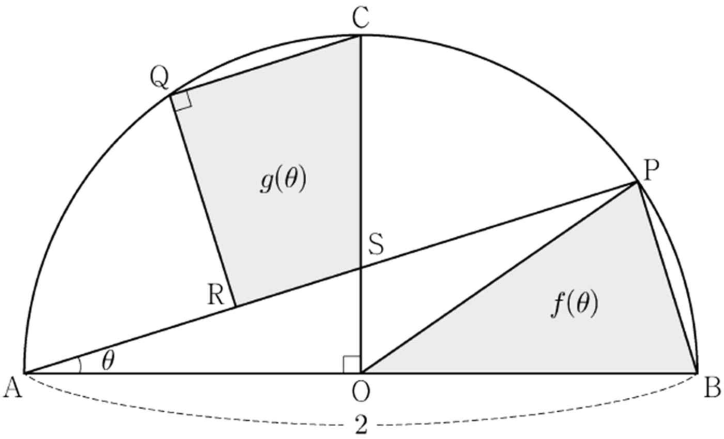
⇨ $S_1 = \frac{1}{5}$, $\overline{OQ_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\triangledown OA_1B_1$, $\triangledown OA_2B_2$ 의 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$

⇒ 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{5}$

$\therefore$ ❶ $= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

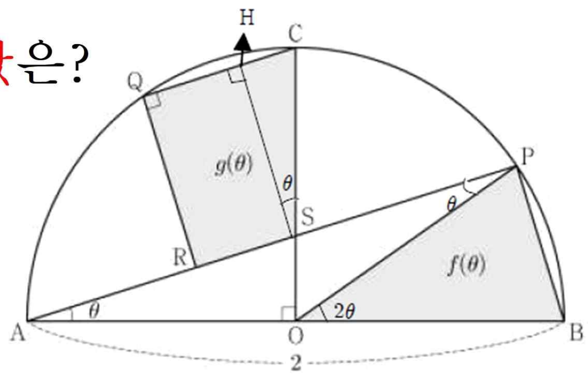
p.03 [28] 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = (\pi/2)$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. ❶ $\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은?



(단, $0 < \theta < (\pi/4)$)

⇨ $\angle OAP = \angle OPA = \theta \Rightarrow \angle BOP = 2\theta$

[28] ❶ $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?



⇨ $f(\theta) = (1/2)\sin 2\theta$

$\overline{OA} = 1, \ \overline{OS} = \tan\theta$

$\overline{CS} = 1 - \tan\theta$

$\angle BOP = \angle COQ = 2\theta \Rightarrow \angle SCQ = (\pi/2) - \theta$

$\angle CSR = \theta + (\pi/2) \Rightarrow \angle QRS = (\pi/2)$

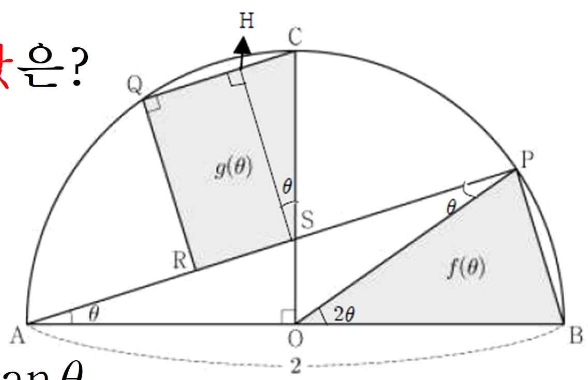
Let $\overline{SH} \perp \overline{CQ} \Rightarrow \angle CSH = \theta, \ \overline{SH} = \overline{RQ} = (1 - \tan\theta)\cos\theta$

$\overline{CH} = (1 - \tan\theta)\sin\theta, \ \overline{CQ} = \overline{BP} = 2\sin\theta$

$\overline{RS} = \overline{QH} = \overline{CQ} - \overline{CH} = 2\sin\theta - (\sin\theta - \sin\theta\tan\theta)$

$= \sin\theta + \sin\theta\tan\theta$

[28] ❶ $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?



⇨ $f(\theta) = (1/2)\sin 2\theta$

$\overline{QR} = (1 - \tan\theta)\cos\theta$

$\overline{CQ} = 2\sin\theta, \ \overline{RS} = \sin\theta + \sin\theta\tan\theta$

$g(\theta) = (1/2) \times (\overline{CQ} + \overline{RS}) \times \overline{QR}$

$= (1/2) \times (3\sin\theta + \sin\theta\tan\theta)(1 - \tan\theta)\cos\theta$

❶ (분자) $= 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta(3 + \tan\theta)(1 - \tan\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta + 2)$

∴ ❶ $= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{\tan\theta}{\theta} \times \cos\theta \times (\tan\theta + 2) \right\}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$

[29] 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$	(나) $f(\ln 2)=0$

❶ 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

❷ $\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. ❸ $p+q$의 값은?

(단, p와 q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

⇨ (가) $\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^{x}+b+\frac{c+6}{e^{x}}\right)=1$ $\therefore$ $b=1$, $c=-6$

(나) $=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$ $\therefore$ $a=1$

$f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$, ❷ : Let $f(k)=14$

p.04 [29] (나) $f(\ln 2)=0$, ❶ 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$,

❷ $\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. ❸ $p+q$의 값은?

⇨ $f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$, ❷ : Let $f(k)=14$

$f(k)=e^{2k}+e^{k}-6=14$

$e^{2k}+e^{k}-20=(e^{k}+5)(e^{k}-4)=0$, $e^{k}=4$ $\therefore$ $k=\ln 4$

(나) & $f(\ln 4)=14$ $\Rightarrow$ ❶ : $g(0)=\ln 2$, $g(14)=\ln 4$

❶ : $f(g(x))=x$ $\Rightarrow$ 미분 : $f'(g(x))\times g'(x)=1$

❷ Let $g(x)=t$ $\Rightarrow$ $g'(x)\,dx=dt$, $\displaystyle dx=\frac{dt}{g'(x)}=f'(t)\,dt$

❷ $\displaystyle=\int_{\ln 2}^{\ln 4}tf'(t)\,dt=\Big[tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(t)\,dt$

p.04 [29] ❷ $\int_0^{14} g(x)\,dx = p + q\ln 2$이다. ❸ $p+q$의 값은?

⇨ $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 6$, $f(\ln 2) = 0$, $f(\ln 4) = 14$

$$❷ = \int_{\ln 2}^{\ln 4} t f'(t)\,dt = \Big[\, t f(t) \Big]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)\,dt$$

$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} \left(e^{2t} + e^{t} - 6\right) dt$$

$$= 28\ln 2 - \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^{t} - 6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= 28\ln 2 - (8 - 6\ln 2) = 34\ln 2 - 8$$

∴ ❸ $= 34 + (-8) = 26$

p.04 [30] ❶ 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = e^{\sin \pi x} - 1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x) = g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

❷ $f(3) = (1/2)$, ❸ $f'(3) = 0$일 때, ❹ $f(2) = q \div p$이다. ❺ $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

⇨ ❶ Let $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (단, $a > 0$)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow$ ❸ : $f'(3) = 27a + 6b + c = 0$

❷ : $f(3) = 27a + 9b + 3c + d = (1/2)$

(가) : $h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin \pi d} - 1 = 0$

p.04 [30] $g(x) = e^{\sin \pi x} - 1$ 합성함수 $h(x) = g(f(x))$

> ㈎ 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 0을 갖는다.

⇨ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, ❸ : $f'(3) = 27a + 6b + c = 0$

❷ : $f(3) = 27a + 9b + 3c + d = (1/2)$

㈎ : $h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin \pi d} - 1 = 0$

$e^{\sin \pi d} = 1$, $\sin \pi d = 0$ $\therefore$ d는 정수

$g'(x) = e^{\sin \pi x} \times \pi \cos \pi x$, $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

㈎ : $h'(0) = g'(f(0)) \times f'(0) = g'(d) \times c$

$= e^{\sin \pi d} \times \pi \cos \pi d \times c = 0$ $\therefore$ $c = 0$

❷ : $27a + 9b + d = (1/2)$, ❸ : $27a + 6b = 0$

❷ $- 3 \times$ ❸ : $3b + d = (1/2)$ $\Rightarrow$ $d > 0$: d는 자연수

p.04 [30] $g(x) = e^{\sin \pi x} - 1$ 합성함수 $h(x) = g(f(x))$

> ㈏ 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x) = 1$의 서로 다른
> 실근의 개수는 7이다.

⇨ $f(x) = ax^3 + bx^2 + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

❷ : $27a + 9b + d = (1/2)$, ❸ : $27a + 6b = 0$

㈏ : $0 < x < 3$에서 $f(3) < f(x) < f(0)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} < f(x) < \pi d$, $\dfrac{\pi}{2} < \pi f(x) < \pi d$

$h(x) = g(f(x)) = e^{\sin \pi f(x)} - 1 = 1$

$e^{\sin \pi f(x)} = 2$, $\sin \pi f(x) = \ln 2$ (단, $0 < \ln 2 < 1$)

함수 $y = \sin \pi t$의 주기는 2 $\therefore$ $d = 8$

❷ : $-6b + 9b + 8 = (1/2)$ $\therefore$ $b = -(5/2)$, $a = (5/9)$

p.04 [30] ❹ $f(2) = q \div p$이다. ❺ $p+q$의 값은?

⇨ $f(x) = ax^3 + bx^2 + d$, $d = 8$, $b = -(5/2)$, $a = (5/9)$

$$f(x) = \frac{5}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8$$

❹ $= \dfrac{40}{9} - 10 + 8 = \dfrac{22}{9} = \dfrac{q}{p}$

∴ ❺ $= 9 + 22 = 31$