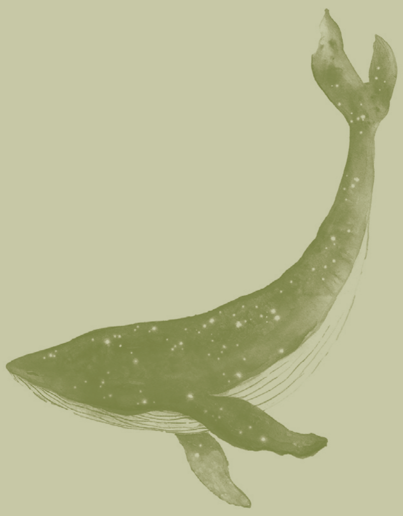


수능완성

수학영역 **수학 나형**

이 책의
구성과 특징

이 책의 구성

❶ 유형편
출제유형에 제시된 유형의 대표기출문제와 유제들로 유형별 학습을 할 수 있도록 하였다.

❷ 실전편
실전모의고사 5회 구성으로 수능에 대비할 수 있도록 하였다.

2021학년도 대학수학능력시험 수학영역

❶ 출제기본원칙
수학 교과의 특성을 고려하여 개념과 원리를 바탕으로 한 사고력 중심의 문항을 출제한다.

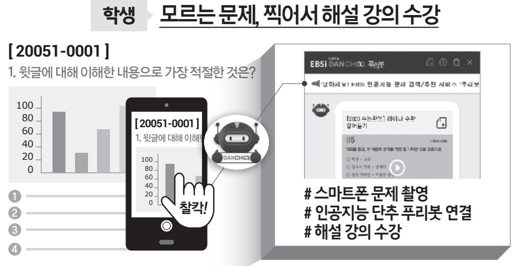
❷ 출제범위
- 단순 암기에 의하여 해결할 수 있는 문항이나 지나치게 복잡한 계산 위주의 문항 출제를 지양하고 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제한다.
- 교육과정에 따라 이수한 수학 과목의 개념과 원리 등은 출제범위에 속하는 내용과 통합하여 출제할 수 있다.

구분 / 영역		문항수	문항유형	배점		시험 시간	출제범위(선택과목)
				문항	전체		
수학 (택1)	가형	30	1~21번 5지 선다형, 22~30번 단답형	2점 3점 4점	100점	100분	수학Ⅰ, 미적분, 확률과 통계
	나형						수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계

EBS 스마트북 활용 안내

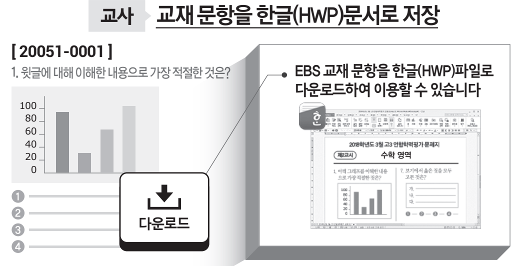
EBS 스마트북은 스마트폰으로 바로 찍어 해설 영상을 수강할 수 있고, 교재 문제를 파일(한글, 이미지)로 다운로드하여 쉽게 활용할 수 있습니다.

학생 모르는 문제, 찍어서 해설 강의 수강



※ EBSi 고교강의 앱 설치 후 이용하실 수 있습니다.
※ EBSi 홈페이지 및 앱 검색창에서 문항코드 입력으로도 확인이 가능합니다.

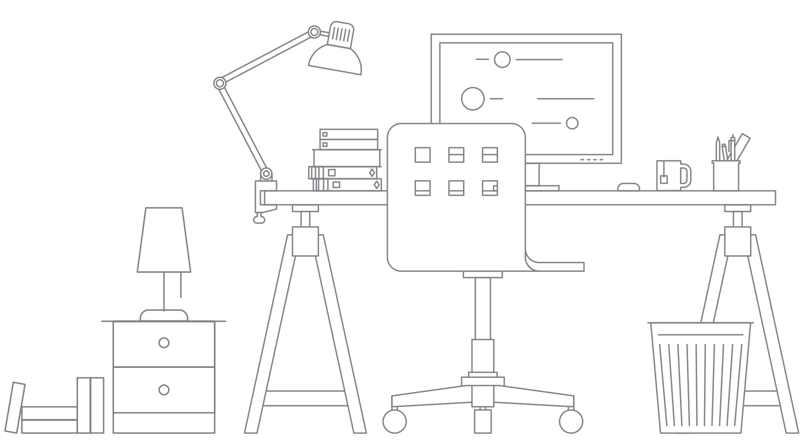
교사 교재 문항을 한글(HWP)문서로 저장



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사 인증'을 통해 이용 가능

이 책의 **차례**

유형편



01 지수함수와 로그함수

1 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n번 곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

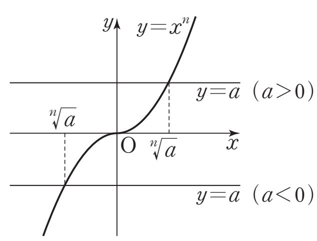
이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

(2) 실수인 거듭제곱근

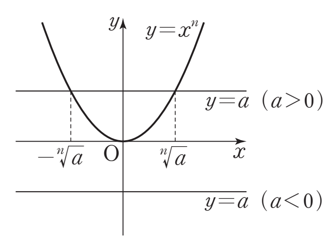
실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

참고 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 할 때, x의 개수는 x에 대한 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수와 같다.



[n이 홀수인 경우]



[n이 짝수인 경우]

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장(1)–정수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n=a^{m+n}$

② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^m=a^m b^m$

4 지수의 확장(2)－유리수

(1) 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^ra^s=a^{r+s}$　　② $a^r\div a^s=a^{r-s}$　　③ $(a^r)^s=a^{rs}$　　④ $(ab)^r=a^rb^r$

5 지수의 확장(3)－실수

(1) 무리수인 지수

예를 들어 무리수 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$에 대하여 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, $\cdots$를 지수로 가지는 수 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $\cdots$은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a>0$일 때, 임의의 무리수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$　　② $a^x\div a^y=a^{x-y}$　　③ $(a^x)^y=a^{xy}$　　④ $(ab)^x=a^xb^x$

6 로그의 정의

(1) $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나만 존재한다.

이 x를 $\log_a N$으로 나타내고, 이것을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 하며, N을 $\log_a N$의 진수라고 한다. 즉,

$$a>0,\ a\neq1,\ N>0\text{일 때, } a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$$

(2) $\log_a N$이 정의될 조건

① 밑의 조건 : $a>0$, $a\neq1$　　② 진수의 조건 : $N>0$

7 로그의 성질

(1) 로그의 기본 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$　　② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

(2) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때 $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

(3) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고, $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

8 상용로그

(1) **상용로그** : 양수 N에 대하여 $\log_{10} N$과 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다. 예를 들어 2의 상용로그는 $\log 2$이고 이것은 $\log_{10} 2$를 뜻한다.

(2) **상용로그표** : 상용로그표는 1.00부터 9.99까지의 0.01 간격의 수에 대한 상용로그의 값을 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

참고 $\log 2.75$의 값은 상용로그표에서 2.7의 가로줄과 5의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수인 0.4393이다. 즉, $\log 2.75=0.4393$이다.

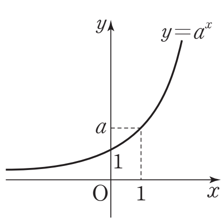
수	…	5	…
⋮			
2.7		.4393	
⋮			

9 지수함수의 뜻과 그래프

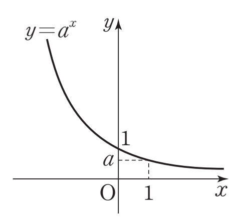
(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x의 값이 하나씩 정해지므로 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

(2) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

① $a>1$일 때



② $0<a<1$일 때



10 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축(직선 $y=0$)이다.

참고 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

11 지수함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq 1$일 때, $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$
$0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

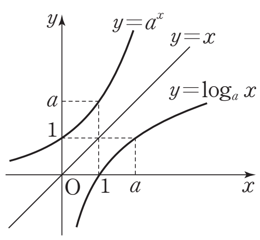
12 로그함수의 뜻과 그래프

(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 양의 실수 x에 대하여 $\log_a x$의 값이 하나씩 정해지므로 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$는 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

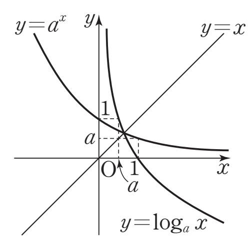
(2) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 지수함수 $y=a^x$의 역함수가 존재한다. 로그의 정의로부터 $y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y$이고, $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 $y=\log_a x$이므로 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다.

(3) 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

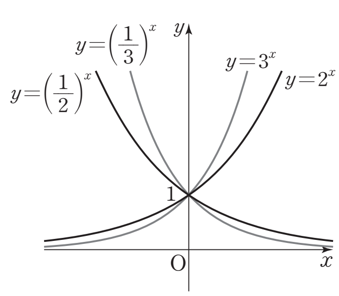
① $a>1$일 때



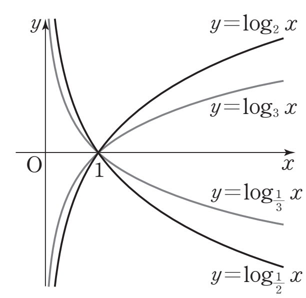
② $0<a<1$일 때



참고 밑의 크기에 따른 지수함수와 로그함수의 그래프



[지수함수]



[로그함수]

13 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축(직선 $x=0$)이다.

(4) 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

참고 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

14 로그함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq1$일 때, $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$
$0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근과 서로 같다.

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$

② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

필수 유형

| 2013학년도 대수능 |

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

출제 의도

자연수의 n제곱근의 정의를 이해하여 n의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^5}}=\sqrt[6]{3^5}$

이때 $\sqrt[6]{3^5}$이 어떤 자연수 x의 n제곱근이므로 제곱근의 정의에 의해

$(\sqrt[6]{3^5})^n=x$

즉, $x=\sqrt[6]{3^{5n}}=3^{\frac{5}{6}n}$

자연수 x에 대하여 $\dfrac{5}{6}n$은 음이 아닌 정수이어야 하므로 n은 6의 배수이다.

이때 n은 $2\le n\le 100$인 자연수이므로 조건을 만족시키는 n의 개수는 16이다.

답 16

01

▸ 20051-0001

$\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[6]{9}}}{\sqrt[6]{2}}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt[6]{2}$ ③ $\sqrt[6]{3}$
④ $\sqrt[3]{2}$ ⑤ $\sqrt[3]{3}$

02

▸ 20051-0002

2 이상의 자연수 n에 대하여 $-n^2+23n+24$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 2인 n의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

03

▸ 20051-0003

$x>1$인 실수 x에 대하여 x의 제곱근 중 음수인 것을 $f(x)$, x의 세제곱근 중 실수인 것을 $g(x)$라 하자. $(f\circ g)(x)$의 값이 정수가 되도록 하는 1보다 큰 실수 x의 최솟값은?

① 8 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 128

유형 2 지수의 확장과 지수법칙

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제, 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq 0$이고 n은 양의 정수일 때

① $a^0=1$ ② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

$2^{-1}\times 16^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$2^{-1}\times 16^{\frac{1}{2}}=2^{-1}\times(2^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{-1}\times 2^{4\times\frac{1}{2}}$$
$$=2^{-1}\times 2^2$$
$$=2^{-1+2}=2$$

답 ②

04

▸ 20051-0004

$5^0\times 27^{\frac{5}{6}}\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt[6]{3}$ ③ $\sqrt[3]{3}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt[3]{9}$

05

▸ 20051-0005

두 양수 a, b가 $a^3=2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{b^2}=4^{-1}$을 만족시킬 때, ab의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

06

▸ 20051-0006

한 변의 길이가 $18^{\frac{1}{4}}$인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $36\sqrt{6}$인 삼각기둥의 부피는?

① 81 ② 162 ③ 243 ④ 324 ⑤ 405

수학 I

유형 3 로그의 뜻과 기본 성질

출제유형 | 로그의 뜻과 기본 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리하거나 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 뜻과 기본 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

(2) $\log_a N$이 정의될 조건

① 밑의 조건 : $a>0$, $a\neq1$

② 진수의 조건 : $N>0$

(3) 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

좌표평면 위의 두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

로그의 성질을 이용하여 직선의 기울기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\frac{\log_2 \frac{10}{5}}{1}=\log_2 2=1$$

답 ①

07

▸ 20051-0007

$\log_3(2\sqrt[3]{2}-1)-\log_3(\sqrt[3]{4}+1)+\log_3(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08

▸ 20051-0008

방정식 $3x^2-6x+1=0$의 두 실근을 각각 $\log\alpha$, $\log\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 4 ② $4\sqrt{5}$ ③ 20
④ $20\sqrt{5}$ ⑤ 100

09

▸ 20051-0009

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. $a>b>1$인 두 정수 a, b에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(\log_4 a, 0)$, $(\log_4 b, 0)$을 지날 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은?

① -4 ② -2 ③ -1
④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

유형 4 로그의 여러 가지 성질

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1$일 때

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0,\ a\neq1,\ b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m,\ n$은 실수이고, $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

필수 유형 [2018학년도 대수능 9월 모의평가]

두 실수 $a,\ b$가

$ab=\log_3 5,\ b-a=\log_2 5$

를 만족시킬 때, $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$의 값은? [3점]

① $\log_5 2$　② $\log_3 2$　③ $\log_3 5$
④ $\log_2 3$　⑤ $\log_2 5$

출제 의도

로그의 밑의 변환을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}=\frac{\frac{1}{\log_5 2}}{\frac{1}{\log_5 3}}$$

$$=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\log_2 3$$

답 ④

10
▸ 20051-0010

$\log_2\sqrt{10}\times\log_9 8\times\log 27$의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{9}{4}$
④ 3　⑤ $\dfrac{15}{4}$

11
▸ 20051-0011

등식 $\dfrac{3}{\log_2 a}=\dfrac{2+\log_3 a}{\log_9 a}$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$　② $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$　③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$
④ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

12
▸ 20051-0012

이웃한 두 변의 길이가 각각 $a,\ b$인 직사각형의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라 하자. 한 변의 길이가 l인 정사각형의 넓이가 $16S$일 때, $\log_{b^2}\sqrt[3]{ab}$의 값은? (단, $b\neq1$)

① $\dfrac{1}{12}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{12}$

수학 I

유형 5 지수함수와 그 그래프

출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.
출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소 및 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 [2019학년도 대수능 9월 모의평가]

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

출제 의도

지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
또 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프의 점근선이 직선 $y=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=k$이다.
그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le 0$이어야 한다.
즉, $f(0)=-2^4+k\le 0$
따라서 $k\le 16$이므로 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

13

▸ 20051-0013

곡선 $y=4^{3-x}-5$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선의 점근선이 직선 $y=1$일 때, 상수 k의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

14

▸ 20051-0014

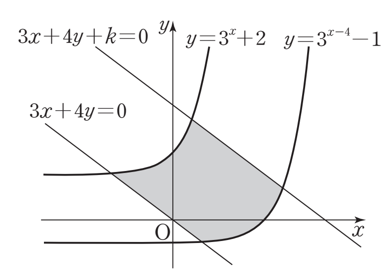
1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^{6-4x}+3$이 a의 값에 관계없이 지나는 점을 A, 곡선 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{2x-3}-1$이 a의 값에 관계없이 지나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

15

▸ 20051-0015

그림과 같이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$ $(k<0)$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 20일 때, 상수 k의 값은?



① -25 ② -20 ③ -15
④ -10 ⑤ -5

유형 6 지수함수의 활용

출제유형 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식은 다음 성질을 이용하여 해를 구한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때
$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

(2) $a>1$일 때
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

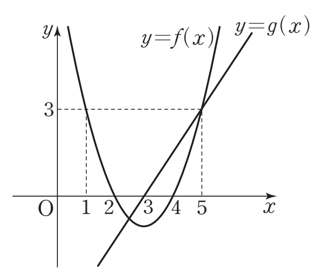
(3) $0<a<1$일 때
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

필수 유형 [2019학년도 대수능]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

출제 의도

지수함수의 성질을 이용하여 지수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x)\leq3g(x)$, $g(x)\{f(x)-3\}\leq0$

(i) $g(x)<0$인 경우
$f(x)-3\geq0$에서 $f(x)\geq3$
그림에서 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x<3$이고, $f(x)\geq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x\leq1$ 또는 $x\geq5$이므로 $x\leq1$

(ii) $g(x)=0$인 경우
$g(x)\{f(x)-3\}=0\leq0$이므로 $x=3$

(iii) $g(x)>0$인 경우
$f(x)-3\leq0$에서 $f(x)\leq3$
그림에서 $g(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>3$이고, $f(x)\leq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $1\leq x\leq5$이므로 $3<x\leq5$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는
$x\leq1$ 또는 $3\leq x\leq5$
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은
$1+3+4+5=13$

답 ④

16

▸ 20051-0016

방정식

$$2^{5-2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+14$$

의 해를 α라 할 때, 10α의 값을 구하시오.

17

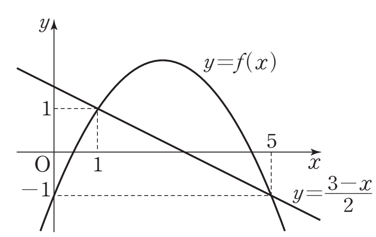
▸ 20051-0017

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=\frac{3-x}{2}$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$9^{f(x)-1}\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

(단, $f(1)=1$, $f(5)=-1$)



18

▸ 20051-0018

두 함수

$$f(x)=2^{x-1}-1,\ g(x)=x^3-10x^2+21x+1$$

에 대하여 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 모든 실근의 합을 구하시오.

유형 7 로그함수와 그 그래프

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동, 대칭이동, 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소를 이해하고, 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

출제 의도

로그함수의 그래프와 직선이 만나는 점의 y좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점이 각각 $\mathrm{A}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, -\log_2(8-k))$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$|\log_2 k-\{-\log_2(8-k)\}|=2$

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$, $|\log_2 k(8-k)|=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=2$인 경우

$k(8-k)=2^2$

방정식 $k^2-8k+4=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=16-4=12>0$이므로 이 방정식의 서로 다른 두 실근을 a, b라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $ab=4$

(ii) $\log_2 k(8-k)=-2$인 경우

$k(8-k)=2^{-2}$

방정식 $k^2-8k+\frac{1}{4}=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=16-\frac{1}{4}=\frac{63}{4}>0$이므로 이 방정식의 서로 다른 두 실근을 c, d라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$cd=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은

$a\times b\times c\times d=4\times\frac{1}{4}=1$

답 ②

19

▶ 20051-0019

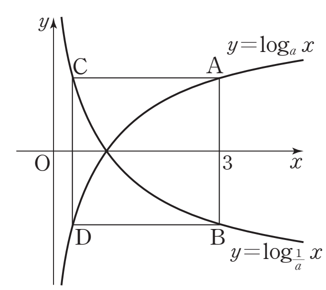
함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_3(9x+1)$의 그래프와 일치한다. $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

① $\frac{22}{9}$ ② $\frac{23}{9}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{25}{9}$ ⑤ $\frac{26}{9}$

20

▶ 20051-0020

그림과 같이 직선 $x=3$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{\frac{1}{a}} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ACDB가 정사각형일 때, 1보다 큰 상수 a의 값은?



① $\sqrt[4]{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt[4]{27}$
④ 3 ⑤ $3\sqrt[4]{3}$

21

▶ 20051-0021

$x>3$에서 정의된 함수 $f(x)=-\frac{1}{x-3}+1$이 있다. 좌표평면에서 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$, $y=\log(k-2x)$와 만나지 않도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

유형 8 로그함수의 활용

출제유형 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식은 다음 성질을 이용하여 해를 구한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$

(2) $a>1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$

(3) $0<a<1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$

필수 유형

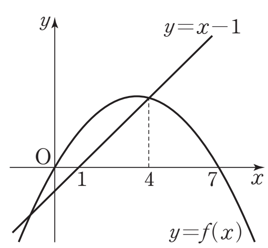
| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$) [3점]



출제 의도

로그의 정의와 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$이므로

$f(x)>0$, $x-1>0$, $f(x)\le x-1$

(i) $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<7$

(ii) $x-1>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$

(iii) $f(x)\le x-1$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$일 때 $x\ge4$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$4\le x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

답 15

22

▶ 20051-0022

방정식

$$\log_2\frac{x}{4}+\log_4\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}$$

의 해를 α라 할 때, α^2의 값을 구하시오.

23

▶ 20051-0023

부등식

$$\log_2|x|+\log_2(x+20)\le6$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

24

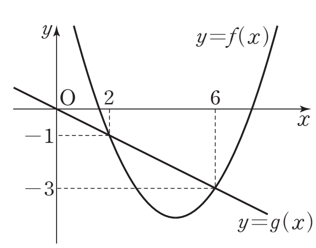
▶ 20051-0024

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식

$$\log\{f(x)+2\}=\log\frac{f(x)\{g(x)\}^2+8}{\{f(x)\}^2-2f(x)+4}$$

의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

(단, $f(2)=g(2)=-1$, $f(6)=g(6)=-3$)



유형 9 지수함수와 로그함수의 관계

출제유형 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 활용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프, 지수의 성질과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

출제 의도

지수함수와 로그함수를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=2^{x-m}+2$ …… ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_2 8(x-2)$ …… ㉡

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는

$x=2^{y-m}+2$에서

$2^{y-m}=x-2$

$y=\log_2(x-2)+m$

$=\log_2(x-2)+\log_2 2^m$

$=\log_2 2^m(x-2)$

이 함수가 함수 ㉡과 같아야 하므로

$2^m=8$

따라서 $m=3$

답 ③

25

▸ 20051-0025

함수 $f(x)=5^x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지날 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $ax+by+1=0$이다. $a+b$의 값은?

(단, k, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

26

▸ 20051-0026

두 함수

$f(x)=2^{x-a}$, $g(x)=\log_2 x+a$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 교점 중 한 점의 x좌표가 4일 때, $f(8)+g(8)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

27

▸ 20051-0027

두 함수

$f(x)=3^{ax-2}+1$, $g(x)=\log_9(x-1)+1$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=-x+12$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A의 x좌표가 2일 때, 선분 AB의 길이는? (단, a는 양수이다.)

① $6\sqrt{2}$　② $7\sqrt{2}$　③ $8\sqrt{2}$
④ $9\sqrt{2}$　⑤ $10\sqrt{2}$

유형 10 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 주어진 범위에서 지수함수와 로그함수의 증가와 감소를 이해하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소를 이해하고, 복잡한 식은 치환을 이용하여 간단한 식으로 변형한 후 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

출제 의도

주어진 범위에서 지수함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 $1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 $1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^0=2$

답 ②

28

▸ 20051-0028

$\frac{1}{4}\le x\le 4$에서 함수

$$f(x)=\log_2 \frac{x}{4}-\log_{\frac{1}{2}} x^2$$

의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29

▸ 20051-0029

두 함수

$$f(x)=x^2-4x+1,\ g(x)=2^{3-x}$$

에 대하여 $0\le x\le 3$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은?

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

30

▸ 20051-0030

이웃한 두 변의 길이가 각각 $\log_{\sqrt{3}} x$, $\log_3 \frac{81}{x}$인 직사각형의 넓이는 $x=a$일 때, 최댓값 M을 갖는다. $a+M$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

수학 I

02 삼각함수

1 일반각과 호도법

(1) 일반각

시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 $\alpha°$라 할 때, 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

$360° \times n + \alpha°$ (n은 정수)

(2) 육십분법과 호도법

① 1라디안$=\dfrac{180°}{\pi}$　　② $1°=\dfrac{\pi}{180}$라디안

참고 호도법을 사용할 때는 보통 각의 단위인 라디안을 생략한다.

(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

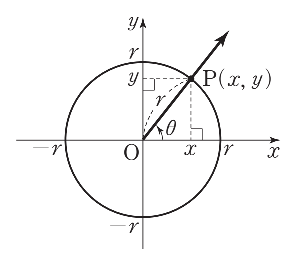
반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

① $l=r\theta$　　② $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

2 삼각함수

(1) 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P(x, y)라 하고, x축의 양의 방향을 시초선으로 하는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 한다.

(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=\sin x$와 그 그래프의 성질

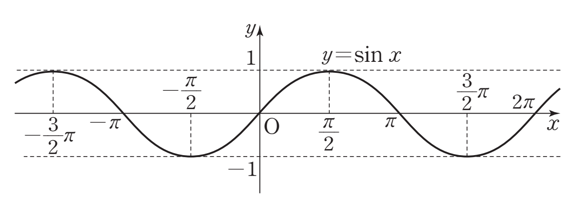
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $\sin(-x)=-\sin x$이다.

③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여

$\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (n은 정수)이다.



(2) 함수 $y=\cos x$와 그 그래프의 성질

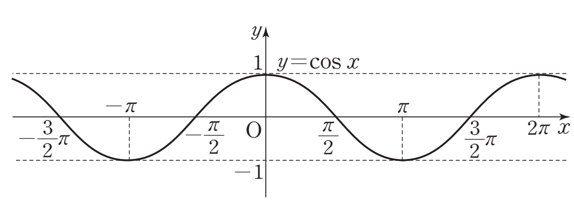
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $\cos(-x)=\cos x$이다.

③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여

$\cos(x+2n\pi)=\cos x$ (n은 정수)이다.



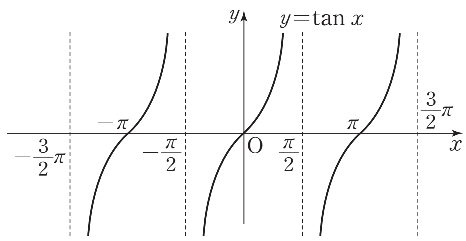
(3) 함수 $y=\tan x$와 그 그래프의 성질

① 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
즉, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\tan(-x)=-\tan x$이다.

③ 주기가 π인 주기함수이다. 즉, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\tan(x+n\pi)=\tan x$ (n은 정수)이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.



4 삼각함수의 성질

(1) $\pi+x$의 삼각함수

① $\sin(\pi+x)=-\sin x$　② $\cos(\pi+x)=-\cos x$　③ $\tan(\pi+x)=\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2}+x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$　② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

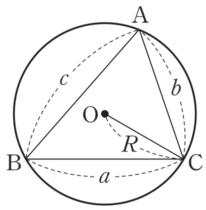
5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

$\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 풀 수 있다.

6 사인법칙

삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



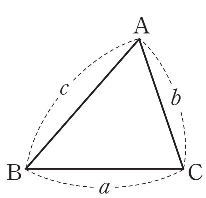
7 코사인법칙

삼각형 ABC에서

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ➡ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ ➡ $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ➡ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



8 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

유형 1 부채꼴의 호의 길이와 넓이

출제유형 | 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 할 때, 다음과 같은 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 구하는 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

필수 유형

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{5}$인 부채꼴의 넓이가 $\frac{8}{5}\pi$일 때, 이 부채꼴의 호의 길이는?

① $\frac{\pi}{5}$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$
④ $\frac{4}{5}\pi$ ⑤ π

출제 의도

부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{5}$이므로 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r^2\times\frac{\pi}{5}=\frac{8}{5}\pi$

$r^2=16$

$r>0$이므로 $r=4$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$4\times\frac{\pi}{5}=\frac{4}{5}\pi$

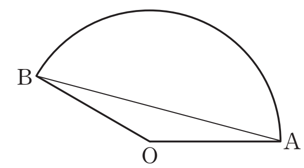
답 ④

01

▸ 20051-0031

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 OAB의 현 AB의 길이가 $6\sin\frac{5}{12}\pi$일 때, 부채꼴 OAB의 넓이는?

(단, 부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 π보다 작다.)



① $\frac{11}{4}\pi$ ② 3π ③ $\frac{13}{4}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{15}{4}\pi$

02

▸ 20051-0032

높이가 4인 원뿔의 옆면의 전개도인 부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$일 때, 밑면의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

03

▸ 20051-0033

밑면의 반지름의 길이가 1인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 겉넓이가 4π일 때, 이 원뿔의 옆면의 전개도인 부채꼴의 중심각의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

유형 2 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계

출제유형 | 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 각 θ를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 r인 원의 교점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

필수 유형

좌표평면에서 직선 $y=2x$가 원점이 중심인 한 원과 만나는 두 점 중 한 점의 x좌표가 2이다. 이 직선이 x축과 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $(\cos\theta-\sin\theta)\tan\theta$의 값은?

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0　④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

출제 의도

삼각함수의 정의를 이해하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

직선 $y=2x$가 원점이 중심인 한 원과 만나는 점의 x좌표가 2이므로 이 원은 점 $(2, 4)$를 지난다.

즉, 직선이 x축과 이루는 각의 크기 θ에 대하여 이 각의 동경이 한 원과 만나는 점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

이 원의 반지름의 길이는 원점과 점 $(2, 4)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\sin\theta=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\tan\theta=\dfrac{4}{2}=2$이므로

$$(\cos\theta-\sin\theta)\tan\theta=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times 2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ①

04

▸ 20051-0034

좌표평면에서 시초선이 x축의 양의 방향인 각 θ의 동경과 원점이 중심인 원이 만나는 점의 좌표가 $(6, -8)$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\dfrac{4}{5}$　② $-\dfrac{2}{5}$　③ 0　④ $\dfrac{2}{5}$　⑤ $\dfrac{4}{5}$

05

▸ 20051-0035

제1사분면의 각 θ에 대하여 이차방정식 $8x^2-ax+1=0$의 두 근이 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$일 때, 상수 a의 값은?

① $2\sqrt{19}$　② $4\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{21}$　④ $2\sqrt{22}$　⑤ $2\sqrt{23}$

06

▸ 20051-0036

제4사분면의 각 θ에 대하여

$$3\cos\frac{\theta}{2}=\left|\cos\frac{\theta}{2}-5\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

일 때, $\tan\dfrac{\theta}{2}$의 값은?

① $-\dfrac{8}{5}$　② -1　③ $-\dfrac{2}{5}$　④ $\dfrac{1}{5}$　⑤ $\dfrac{4}{5}$

수학 I

유형 3 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질

출제유형 | 삼각함수의 그래프에서 삼각함수의 값, 주기를 구하는 문제와 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 삼각함수의 값, 주기를 구하고, 다음과 같은 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\pi+\theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

(2) $\frac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\sin\frac{7}{3}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

출제 의도

사인함수의 주기를 이해하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

07

▸ 20051-0037

$\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

08

▸ 20051-0038

두 양수 a, b에 대하여 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 함수

$f(x)=\tan(\pi+ax)+b$

의 그래프가 점 $(0,\ 5)$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

09

▸ 20051-0039

함수 $f(x)=3\sin ax+2$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열하면 k_1, k_2, k_3, k_4, $\cdots$라 하자. $k_1+k_2+k_3+k_4=3$일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$

④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

유형 4 삼각함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

출제 의도

사인함수의 치역을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$에서

$x-\frac{3}{4}\pi=\theta$라 하면 $x=\theta+\frac{3}{4}\pi$, $x-\frac{\pi}{4}=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)&=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k\\&=\cos^2\theta+\sin\theta+k\\&=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k\\&=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

모든 실수 θ에 대하여 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $k=\frac{7}{4}$

또 함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$m=\frac{3}{4}$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

답 ③

10 ▸ 20051-0040

함수

$$f(x)=3\sin(2x+1)+k$$

의 최솟값이 -1일 때, 최댓값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

11 ▸ 20051-0041

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 정의된 함수

$$f(x)=-2\cos(x-\pi)\tan^2(x+\pi)+k$$

의 최댓값이 7일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12 ▸ 20051-0042

함수

$$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}-2\sin^2 x$$

의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ -1

수학 I

유형 5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

출제유형 | 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질을 이용하여 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프와 직선의 교점이나 위치 관계를 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식의 해나 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

$0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$　② π　③ $\frac{7}{6}\pi$　④ $\frac{4}{3}\pi$　⑤ $\frac{3}{2}\pi$

출제 의도

이차방정식의 판별식을 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta+2>0$

즉, $2\sin\theta-1>0$에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

13

▸ 20051-0043

$0\le x<2\pi$에서 방정식

$$2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\tan x$$

를 만족시키는 모든 실근의 합은?

① π　② 2π　③ 3π　④ 4π　⑤ 5π

14

▸ 20051-0044

$-\pi<x<\pi$에서 부등식

$$|\sqrt{3}\sin x|<\cos x$$

의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{\pi}{2}$　④ $\frac{2}{3}\pi$　⑤ $\frac{5}{6}\pi$

15

▸ 20051-0045

부등식

$$3\cos\frac{\pi(x+3)}{6}-2\sin^2\frac{\pi x}{6}>1$$

을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 38　② 44　③ 50　④ 56　⑤ 62

유형 6 사인법칙

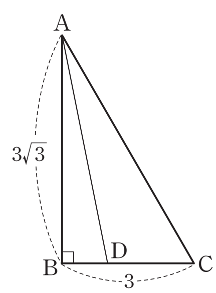
출제유형 | 삼각형에서 사인법칙을 이용하여 각의 삼각함수의 값이나 변의 길이, 외접원의 반지름의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

필수 유형

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{DC}}=2$일 때, 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이는?



① $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　② $\dfrac{5\sqrt{21}}{6}$　③ $\sqrt{21}$
④ $\dfrac{7\sqrt{21}}{6}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

출제 의도

사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC에서 $\tan C=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$이므로

$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$　…… ㉠

또한 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=3-2=1$

즉, 직각삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$　…… ㉡

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

㉠, ㉡으로부터 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}=2R$, $\dfrac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

따라서 $R=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

답 ①

16

▸ 20051-0046

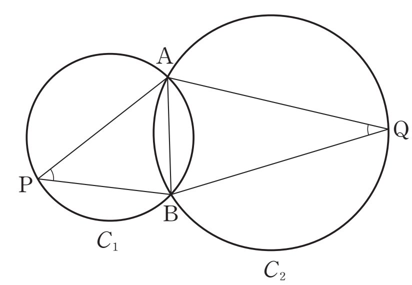
예각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}$이고 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 6π일 때, $\angle\mathrm{A}$의 크기는?

① 15°　② 30°　③ 45°
④ 60°　⑤ 75°

17

▸ 20051-0047

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원 C_1, C_2가 두 점 A, B에서 만난다. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{APB})=\sqrt{2}\sin(\angle\mathrm{AQB})$이고, 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합이 9π일 때, r_1r_2의 값은?

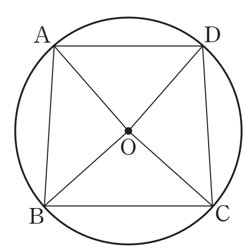


① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{14}$　③ 4
④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{5}$

18

▸ 20051-0048

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 등변사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$일 때, 삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이는?



① $\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$　② $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$　③ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
④ $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$　⑤ $\dfrac{9\sqrt{7}}{14}$

유형 7 코사인법칙

출제유형 | 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 각의 삼각함수의 값이나 변의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때

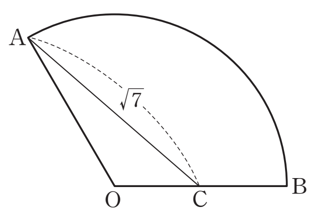
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

필수 유형

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 $90^\circ<\angle AOB<180^\circ$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB의 중점을 C라 하자. $\overline{AC}=\sqrt{7}$일 때, 호 AB의 길이는?



① π ② $\frac{7}{6}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$

④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

출제 의도

코사인법칙을 이용하여 각의 크기와 호의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\overline{OA}=2$이고 점 C는 선분 OB의 중점이므로 $\overline{OC}=1$

삼각형 AOC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle AOC)=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OC}}=\frac{4+1-7}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$$

$90^\circ<\angle AOC<180^\circ$이므로 $\angle AOC=120^\circ$

따라서 호 AB의 길이는

$2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ③

19

▶ 20051-0049

예각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}=2\sqrt{2},\ \overline{BC}=\sqrt{5},\ \sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

일 때, 선분 AC의 길이는?

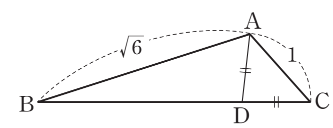
① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$

④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

20

▶ 20051-0050

그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=1$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=\overline{CD}$일 때, 선분 BC의 길이는?



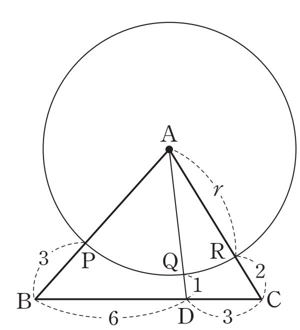
① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ 3

④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

21

▶ 20051-0051

그림과 같은 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=3$이다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 세 선분 AB, AD, AC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, $\overline{PB}=3$, $\overline{QD}=1$, $\overline{RC}=2$이다. r의 값은?



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

유형 8 사인법칙과 코사인법칙의 활용

출제유형 | 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 해결하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 각의 삼각함수의 값이나 변의 길이 등을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\angle A=30^\circ$일 때,

$$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{4}$$

를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값은? (단, $xy\neq 0$)

① $\sqrt{15}$　② $3\sqrt{2}$　③ $\sqrt{21}$
④ $2\sqrt{6}$　⑤ $3\sqrt{3}$

출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각함수의 값의 비를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=8^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 8\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=28$$

이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{7}$

한편, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{8}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin C}{4}$

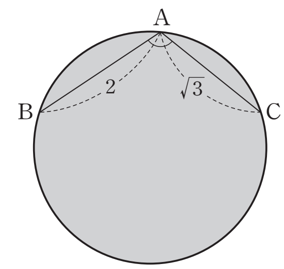
따라서 $xy=\sqrt{7}\times\sqrt{3}=\sqrt{21}$

답 ③

22

▶ 20051-0052

그림과 같이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\cos(\angle BAC)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$일 때, 이 원의 넓이는?



① $\dfrac{32}{13}\pi$　② $\dfrac{34}{13}\pi$　③ $\dfrac{36}{13}\pi$
④ $\dfrac{38}{13}\pi$　⑤ $\dfrac{40}{13}\pi$

23

▶ 20051-0053

삼각형 ABC에서

$$4\sin A=3\sin B=2\sin(A+B)$$

일 때, $\cos B=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

24

▶ 20051-0054

삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=6,\ \cos A=\frac{9}{16}$$

이고 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\dfrac{16}{7}\pi$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?

① $\dfrac{11}{2}$　② 6　③ $\dfrac{13}{2}$
④ 7　⑤ $\dfrac{15}{2}$

25

▸ 20051-0055

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 할 때, 등식

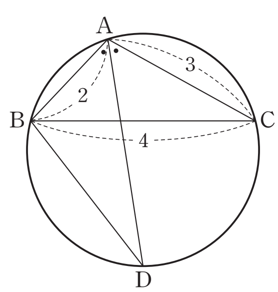
$$(a-b)\sin^2 C=a\sin^2 A-b\sin^2 B$$

가 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, $a\neq b$)

26

▸ 20051-0056

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 원 위의 한 점 D가 $\angle BAD=\angle DAC$를 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{4}$

ㄴ. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$이다.

ㄷ. $\overline{BD}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

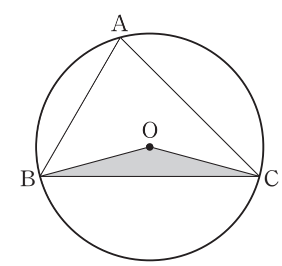
유형 9 삼각형의 넓이

출제유형 | 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 삼각형의 넓이에 대한 공식을 이용한다.
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때
삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

필수 유형

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, $\overline{AB}=4$, $\angle CAB=75^\circ$, $\angle BCA=45^\circ$이다. 삼각형 OBC의 넓이를 구하시오.



출제 의도

삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BCA)}=2\overline{OB}$

$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\overline{OB}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$

원주각과 중심각의 관계에 의해
$\angle BOC=2\angle BAC=150^\circ$이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin(\angle BOC)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{2}$

$=2$

답 2

27
▸ 20051-0057

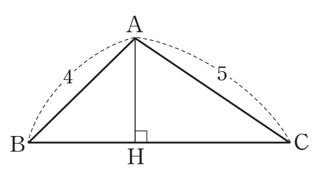
삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=9$, $\overline{CA}=6$, $\sin(A+B)=\frac{1}{3}$

일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

28
▸ 20051-0058

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{5}$일 때, 선분 AH의 길이는?

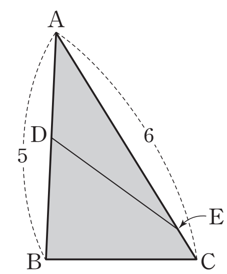


① $\frac{8\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{8\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{16}{7}$
④ $\frac{8\sqrt{5}}{7}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{6}}{7}$

29
▸ 20051-0059

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D, 선분 AC 위의 점 E가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $\overline{AD}+\overline{AE}=8$
(나) 삼각형 ADE의 넓이와 사각형 DBCE의 넓이는 같다.
(다) $\overline{DE}=\sqrt{14}$



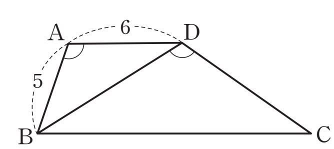
① $5\sqrt{3}$ ② 10 ③ $5\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

30
▸ 20051-0060

그림과 같이 사각형 ABCD가

$\overline{AB}=5$, $\overline{AD}=6$, $\cos(\angle BAD)=\cos(\angle BDC)=-\frac{1}{3}$

을 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이가 $35\sqrt{2}$일 때, 선분 CD의 길이는?



① 8 ② $\frac{25}{3}$ ③ $\frac{26}{3}$
④ 9 ⑤ $\frac{28}{3}$

수학 I

03 수열

1 등차수열

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d \text{ (단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 $b-a=c-b$이므로 $b=\dfrac{a+c}{2}$

참고 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $a_n=An+B$ (A, B는 상수, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 A인 등차수열이다.

2 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

참고 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 대한 이차식 $S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 $2A$인 등차수열이다.

3 등비수열

(1) 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1} \text{ (단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$

4 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r=1$일 때, $S_n=na$

(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1} \text{ (단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

6 합의 기호 $\sum$의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

제n항까지

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

일반항

첫째항부터

7 합의 기호 $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

8 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$

9 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어져 있을 때, 부분분수로 분해하는 방법, 즉

$\displaystyle\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$을 이용하여 계산한다.

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq0$)

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어져 있을 때, 분모를 유리화하는 방법을 이용하여 계산한다.

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq0$)

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

10 수열의 귀납적 정의

처음 몇 개의 항의 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

예를 들면 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$a_2=2a_1=2\times1=2$, $a_3=2a_2=2\times2=4$, $a_4=2a_3=2\times4=8$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 8, $\cdots$이다.

11 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

정답과 풀이 12쪽

유형 1 등차수열

출제유형 | 등차수열의 일반항을 이용하여 공차나 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 두 자연수 m, n에 대하여

$a_m-a_n=(m-n)d$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=-15,\ |a_3|-a_4=0$

일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

출제 의도

등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(ⅰ) $a_3\ge 0$인 경우

$a_4=|a_3|=a_3$에서 $d=0$이므로 $a_3=a_2=a_1=-15$이고

이것은 $a_3\ge 0$에 모순이다.

(ⅱ) $a_3<0$인 경우

$a_4=|a_3|=-a_3$에서

$-15+3d=-(-15+2d)$, $5d=30$, $d=6$

따라서 $a_7=-15+(7-1)\times 6=21$

답 ①

01

▸ 20051-0061

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=7$, $a_3+a_6=17$일 때, a_7의 값은?

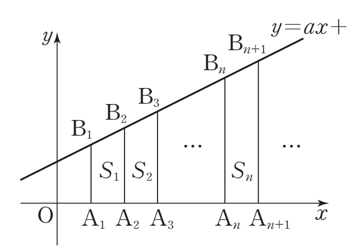
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

02

▸ 20051-0062

그림과 같이 좌표평면 위에 직선 $y=ax+b$가 있다. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 직선 $y=ax+b$가 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_2=3$, $S_{10}-S_6=2$이다. ab의 값은?

(단, a, b는 양의 상수이다.)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

03

▸ 20051-0063

첫째항이 모두 1이고 공차가 각각 l, m인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) l, m은 모두 0이 아닌 정수이다.
(나) $|a_5|=|b_8|$, $|a_7|=|b_{11}|$

$|a_5|+|b_{11}|$의 값을 구하시오.

유형 2 등차수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 첫째항, 공차, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공차를 구하고 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9,\ \sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

출제 의도

등차수열의 일반항과 합을 이용하여 등차수열의 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_5+a_{13}=3a_9$이므로

$(a+4d)+(a+12d)=3(a+8d)$에서

$a+8d=0$ …… ㉠

또 $\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{18}{2}\times(a_1+a_{18})=9(2a+17d)$이므로

$9(2a+17d)=\frac{9}{2}$에서

$2a+17d=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ d=\frac{1}{2}$이므로

$a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

답 ①

04

▸ 20051-0064

첫째항이 -9인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3=S_7$일 때, S_{11}의 값을 구하시오.

05

▸ 20051-0065

공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 1이 아닌 자연수 m에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=40,$$
$$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_{2m}=115$$

를 만족시킬 때, a_{3m}의 값을 구하시오.

06

▸ 20051-0066

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\geq S_{10}$이다. $S_{10}=S_m$을 만족시키는 10이 아닌 자연수 m이 존재하도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① -40 ② -38 ③ -36
④ -34 ⑤ -32

유형 3 등비수열

출제유형 | 등비수열의 일반항을 이용하여 공비나 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq0)$라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_1=a,\ a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 두 자연수 m, n에 대하여

$\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$ (단, $a_n\neq0$, $r\neq0$)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{1}{4}$$

일 때, $a_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

등비수열의 일반항을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_3}{a_2}=r$, $\frac{a_6}{a_4}=r^2$이므로

$r-r^2=\frac{1}{4}$, $4r-4r^2=1$, $4r^2-4r+1=0$, $(2r-1)^2=0$

즉, $r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_5=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$이므로

$p+q=16+3=19$

답 19

07

▸ 20051-0067

첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2=9a_4,\ \frac{a_5a_7}{a_6}=4$$

를 만족시킬 때, a_9의 값은?

① $-\frac{5}{27}$ ② $-\frac{4}{27}$ ③ $-\frac{1}{9}$
④ $-\frac{2}{27}$ ⑤ $-\frac{1}{27}$

08

▸ 20051-0068

첫째항이 8인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3a_5=1,\ a_4<a_5$$

일 때, $0<a_m<\frac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 구하시오.

09

▸ 20051-0069

모든 항이 양수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_1=3b_1,\ a_5=b_3,\ a_4=b_6$$

을 만족시킬 때, $\frac{a_3}{b_7}$의 값은?

① $3^{\frac{1}{7}}$ ② $3^{\frac{2}{7}}$ ③ $3^{\frac{3}{7}}$
④ $3^{\frac{4}{7}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{7}}$

유형 4 등비수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 합을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 첫째항, 공비, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.
첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) $r=1$일 때, $S_n=na$
(2) $r\neq 1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ \frac{a_5}{a_3}=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등비수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\dfrac{a_5}{a_3}=r^2=9$에서 $r>0$이므로 $r=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{4} a_k=\sum_{k=1}^{4}(2\times 3^{k-1})=\dfrac{2(3^4-1)}{3-1}=80$

답 80

10 ▸ 20051-0070

첫째항이 -3이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은?

① 251 ② 252 ③ 253
④ 254 ⑤ 255

11 ▸ 20051-0071

첫째항이 a이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_7=30$이고, 자연수 m에 대하여 $a_{2m+1}=90$, $\dfrac{S_{3m}}{S_{2m}}=\dfrac{13}{4}$일 때, $a+m$의 값을 구하시오.

(단, a, m은 상수이다.)

12 ▸ 20051-0072

첫째항이 자연수이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합

$$A=\{a_n\,|\,a_n>1,\ n\text{은 자연수}\}$$

의 모든 원소의 합을 S라 하자. $n(A)=5$일 때, S의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

수학 I

유형 5 등차중항과 등비중항

출제유형 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제에서는 등차중항 또는 등비중항의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$가 성립한다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$가 성립한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2-nx+4(n-4)=0$$

이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

출제 의도

등차중항의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ …… ㉠

(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$

즉, $n=11$

(ii) $\alpha=n-4$, $\beta=4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$

즉, $n=\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

13 ▸ 20051-0073

두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킬 때, $x+y$의 값은?

(가) 세 수 3, x, y는 이 순서대로 공차가 음수인 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 x^2, y^2, 49는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

14 ▸ 20051-0074

x에 대한 방정식 $(x+1)(8x^2+ax-1)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 이 세 실근을 적당한 순서로 나열하면 등비수열을 이룰 때, a^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

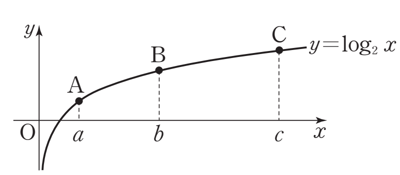
15 ▸ 20051-0075

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하면 세 양수 a, b, c는 이 순서대로 공비가 1보다 큰 등비수열을 이룬다.
(나) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(7, \log_2 6)$이다.

직선 AC의 기울기를 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



유형 6 수열의 합과 일반항 사이의 관계

출제유형 | 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하거나 일반항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$일 때, a_4의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{22}$ ② $\dfrac{1}{20}$ ③ $\dfrac{1}{18}$ ④ $\dfrac{1}{16}$ ⑤ $\dfrac{1}{14}$

출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$S_n=\dfrac{n}{n+1}$에서

$a_4=S_4-S_3=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{20}$

답 ②

16

▸ 20051-0076

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=p\times 3^n+n$이고, $a_1+a_4=230$일 때, a_2+a_3의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

17

▸ 20051-0077

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\log_2(n^2+3n+2)$일 때, $a_m=\log_2\dfrac{6}{5}$인 자연수 m의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

18

▸ 20051-0078

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=pn^2+20n$이고 $a_1+a_3+a_5+a_7=24$일 때, $a_2+a_4+a_6+a_8$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

수학 I

유형 7 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질

출제유형 | 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 수열의 합을 구하거나 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$에서 합의 기호 $\sum$가 포함된 문제는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) $\sum$의 뜻

① $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=\sum_{k=m}^{n}a_k$ (단, $m\le n$)

③ $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$ (단, $2\le m\le n$)

(2) $\sum$의 성질

임의의 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

필수 유형

| 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10}{a_k}^2=7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2{a_k}^2-a_k)$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

출제 의도

합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2{a_k}^2-a_k)&=2\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=2\times7-3\\&=11\end{aligned}$$

답 ④

19

▸ 20051-0079

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=6,\ \sum_{k=1}^{5}b_k=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}\left(a_k+\frac{1}{2}b_k-1\right)$의 값을 구하시오.

20

▸ 20051-0080

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}k(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})=25,\ \sum_{k=1}^{10}\sqrt{a_k}=30$$

일 때, a_{11}의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

21

▸ 20051-0081

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{20}\log_2(2a_k)=6,\ \sum_{k=1}^{19}(\log_{\frac{1}{4}}a_k-2)=-18$$

일 때, $\log_2 a_{20}$의 값을 구하시오.

유형 8 자연수의 거듭제곱의 합

출제유형 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\frac{1}{2}x+2$에서 $f(2k)=\frac{1}{2}\times 2k+2=k+2$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} f(2k)&=\sum_{k=1}^{15}(k+2)\\&=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2\\&=\frac{15\times 16}{2}+2\times 15\\&=120+30=150\end{aligned}$$

답 150

22

▸ 20051-0082

$\sum_{k=1}^{8} k(k+1)$의 값을 구하시오.

23

▸ 20051-0083

양수 a와 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2-n(n-5)x-n(n^2+1)=0$의 두 실근을 a_n, b_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=22$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$의 값은?

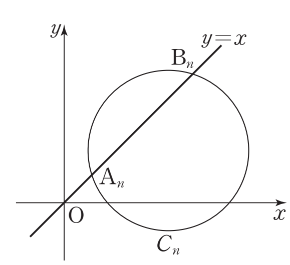
① -649 ② -638 ③ -627
④ -616 ⑤ -605

24

▸ 20051-0084

좌표평면에서 모든 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$와 원 C_n : $(x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$와 원 C_n의 교점을 A_n, B_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{8}(\overline{\mathrm{OA}_k}\times\overline{\mathrm{OB}_k})$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



유형 9 여러 가지 수열의 합

출제유형 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형할 때에는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

필수 유형

| 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

합의 기호 $\sum$를 포함하고 있는 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_n=4+(n-1)\times1=n+3$이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}}{(k+4)-(k+3)}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$$
$$=\sqrt{16}-\sqrt{4}$$
$$=4-2$$
$$=2$$

답 ②

25

▸ 20051-0085

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)}=\frac{10}{39}$일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26

▸ 20051-0086

모든 항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=4n^2S_n$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{S_k}{a_{k+1}}$의 값은?

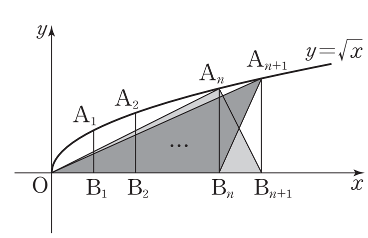
① $\frac{5}{21}$ ② $\frac{5}{11}$ ③ $\frac{10}{21}$
④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{20}{21}$

27

▸ 20051-0087

그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A_n, x축과 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_{n+1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OB}_n$의 넓이의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}=\frac{7}{4}$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



유형 10 수열의 귀납적 정의

출제유형 | 주어진 항의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$에서

(1) 등차수열

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇨ 공차가 d인 등차수열

② $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

(2) 등비수열

① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) ⇨ 공비가 r인 등비수열 (단, $a_n\neq 0$)

② $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 또는 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$ (단, $a_na_{n+1}\neq 0$)

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+(-1)^n\times a_n=2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은? [3점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

출제 의도

수열의 귀납적 정의를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$a_{n+1}=-(-1)^n\times a_n+2^n=(-1)^{n+1}\times a_n+2^n$

이므로

$a_2=(-1)^2\times a_1+2^1=1+2=3$

$a_3=(-1)^3\times a_2+2^2=-3+4=1$

$a_4=(-1)^4\times a_3+2^3=1+8=9$

따라서 $a_5=(-1)^5\times a_4+2^4=-9+16=7$

답 ④

28

▸ 20051-0088

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$3a_{n+1}=2a_n$$

을 만족시킨다. $a_4=8$일 때, a_1의 값을 구하시오.

29

▸ 20051-0089

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}({a_n}^2-1)=12$$

를 만족시킨다. a_4의 값은?

① $-\dfrac{25}{3}$　② $-\dfrac{50}{3}$　③ -25　④ $-\dfrac{100}{3}$　⑤ $-\dfrac{125}{3}$

30

▸ 20051-0090

수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 양수이고 공비가 r인 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_1=2b_1,\ a_{n+1}=2(b_{n+1}+a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $r=-1$이면 $a_3=3a_1$이다.

ㄴ. $r=2$이고 $a_4=32$이면 $a_1=\dfrac{1}{2}$이다.

ㄷ. $r=\dfrac{2}{3}$이면 $a_3+b_3=12b_1$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학 I

유형 11 다양한 수열의 규칙성 찾기

출제유형 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 나열하여 수열의 규칙성을 찾는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 구하여 규칙성을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

출제 의도

주어진 조건에 따라 나열되는 수의 규칙성을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$n=1$일 때, $a_2=a+(-1)^1\times 2=a-2$
$n=2$일 때, $a_3=(a-2)+(-1)^2\times 2=a$
$n=3$일 때, $a_4=a+1$
$n=4$일 때, $a_5=(a+1)+(-1)^4\times 2=a+3$
$n=5$일 때, $a_6=(a+3)+(-1)^5\times 2=a+1$
$n=6$일 때, $a_7=(a+1)+1=a+2$
$n=7$일 때, $a_8=(a+2)+(-1)^7\times 2=a$
$n=8$일 때, $a_9=a+(-1)^8\times 2=a+2$
$n=9$일 때, $a_{10}=(a+2)+1=a+3$
⋮
따라서 $n=3k$ (k는 자연수)일 때, $a_{n+1}=a+k$이다.
이때 $a_{15}=43$에서 $a_{16}=a_{15}+1$이고
$a_{16}=a+5$이므로
$a+5=43+1$
따라서 $a=39$

답 ⑤

31 ▸ 20051-0091

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (\sqrt{a_n}\text{이 자연수가 아닌 경우}) \\ \sqrt{a_n} & (\sqrt{a_n}\text{이 자연수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

32 ▸ 20051-0092

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\pi\cos(\pi-a_n)$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 $n=k$일 때 최솟값 m을 갖는다. $k\times m$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

33 ▸ 20051-0093

첫째항이 모두 자연수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=(-1)^{a_n}$$

을 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a_1=3$, $b_1=1$이면 $a_{10}+b_{10}=3$이다.
ㄴ. $a_2=10$, $a_4>10$이면 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=113$이다.
ㄷ. $a_2>a_4$이면 $a_3>a_{10}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 12 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 앞뒤 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 9월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고

$$na_{n+1}-2na_n+\frac{n+2}{n+1}=0\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n=2^n+\frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\frac{1}{1}=3$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{(가)}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로

$n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n+\frac{1}{n}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)\times g(4)$의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

출제 의도

수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

(ii) $n=k$일 때, $a_k=2^k+\frac{1}{k}$이 성립한다고 가정하면

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}=\boxed{2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+2-\frac{k+2}{k+1}=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$$

따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

이상에서 $f(k)=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)$, $g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$$f(3)\times g(4)=6\times\left(2^3+\frac{1}{3}\right)\times\frac{4}{5}=50\times\frac{4}{5}=40$$

답 ⑤

34

▸ 20051-0094

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\log 3+\log 5+\log 7+\cdots+\log(2n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{2} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\log 3$,

(우변)$=\sum_{k=1}^{2}\log\frac{2+k}{2}=\log\frac{2+1}{2}+\log\frac{2+2}{2}=\log 3$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\log 3+\log 5+\log 7+\cdots+\log(2m-1)+\log(2m+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\log\frac{m+k}{2}+\boxed{(가)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}$$
$$+\{\log(m+1)-\boxed{(나)}\}+\boxed{(가)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\log(m+1)$$
$$+\log\frac{(m+1)+\boxed{(다)}}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\log\frac{(m+1)+k}{2}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

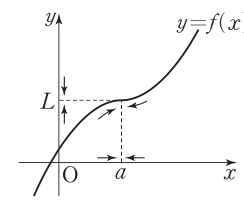
(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(7)+g(6)+p$의 값은?

① $5+\log 3$ ② $6+\log 2$ ③ $6+\log 3$
④ $7+\log 2$ ⑤ $7+\log 3$

04 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한



(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=L$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때

① $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$

② $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$

(3) ① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=M$ 또는 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to M$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 N에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=N$ 또는 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to N$

2 함수의 좌극한과 우극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to a-} f(x)=M$ 또는 $x \to a-$일 때 $f(x) \to M$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 N에 한없이 가까워지면 N을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to a+} f(x)=N$ 또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to N$

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재하면서 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다. 또한 그 역도 성립한다. 즉, $\lim\limits_{x \to a-} f(x)=\lim\limits_{x \to a+} f(x)=L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)=L$ (단, L은 실수)

3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때

(1) $\lim\limits_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x \to a} f(x)+\lim\limits_{x \to a} g(x)=L+M$

(2) $\lim\limits_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x \to a} f(x)-\lim\limits_{x \to a} g(x)=L-M$

(3) $\lim\limits_{x \to a} cf(x)=c\lim\limits_{x \to a} f(x)=cL$ (단, c는 상수)

(4) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to a} f(x)\times\lim\limits_{x \to a} g(x)=LM$

(5) $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (단, $M \neq 0$)

4 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $L\le M$이다.

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $L=M$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=L$이다.

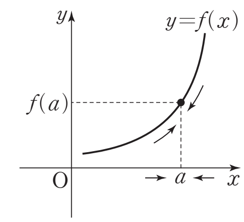
5 함수의 연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$



(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

즉, 위 세 조건 중에서 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(3) 함수 $f(x)$가 열린구간에 속하는 모든 실수에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 열린구간에서 연속 또는 그 열린구간에서의 연속함수라고 한다. 한편, 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하며, $f(x)$는 그 닫힌구간에서의 연속함수라고 한다.

6 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

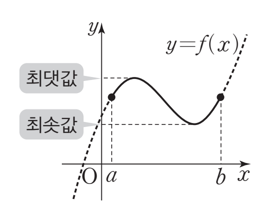
(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

7 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

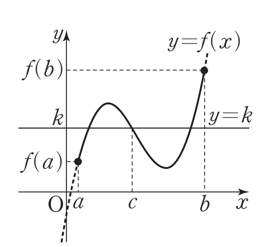


8 사잇값의 정리

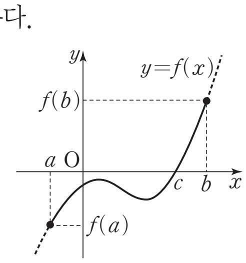
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



참고 사잇값의 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다를 때, $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



유형 1 함수의 좌극한과 우극한

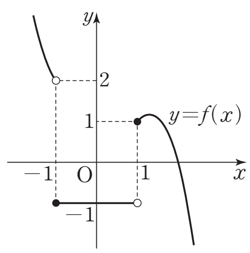
출제유형 | 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한 또는 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프가 주어진 함수, x의 값의 범위에 따라 다르게 정의된 함수 등에서 좌극한과 우극한을 각각 구하는 과정을 이해한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

출제 의도

그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -1-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x)=2-1=1$

답 ④

01

▸ 20051-0095

$\lim_{x\to 1+} \frac{|x^2-1|}{x-1}=a$, $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{|x-1|}=b$라 할 때, ab의 값은?

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

02

▸ 20051-0096

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=\left|\frac{1}{x}-2\right|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 할 때,

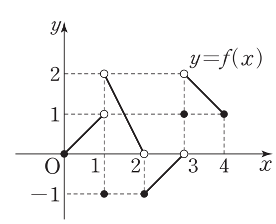
$\lim_{t\to 0-} f(t) + \lim_{t\to 2+} f(t)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

03

▸ 20051-0097

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+1$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{4} \lim_{x\to (3k)+} f(x)$의 값을 구하시오.

유형 2 함수의 극한에 대한 성질

출제유형 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=L+M$

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=L-M$

(3) $\lim_{x\to a} cf(x)=cL$ (단, c는 상수)

(4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=LM$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (단, $M\neq0$)

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

함수의 극한의 성질을 이용하여 이차방정식의 두 근의 차를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\lim_{x\to a} f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\dfrac{3}{5}$이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0$

따라서 $a=\alpha$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}\\&=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

즉, $5(\alpha-\beta-1)=3(\alpha-\beta+1)$에서

$2(\alpha-\beta)=8$이므로

$|\alpha-\beta|=4$

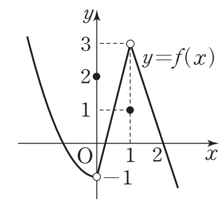
답 ④

04

▸ 20051-0098

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{x\to1}2f(x)-\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

05

▸ 20051-0099

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x+1}=2$, $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)+1}{f(x)}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}f(x)\{g(x)-2f(x)\}$의 값을 구하시오.

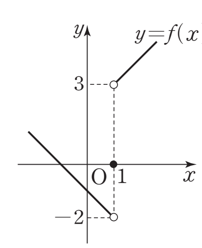
(단, $f(x)\neq0$)

06

▸ 20051-0100

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 $g(x)$가

$g(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{2} & (x\le1)\\ ax+2 & (x>1)\end{cases}$ 이다. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=b$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



유형 3 $\frac{0}{0}$ 꼴과 $0\times\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 분수식인 경우 분모와 분자를 각각 인수분해한 후 약분하여 구하고, 무리식인 경우 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$을 이용하여 식을 변형한 후 구한다.
(2) $0\times\infty$ 꼴인 경우 통분을 하거나 유리화하여 극한값을 구한다.

필수 유형

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

출제 의도

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+2}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

답 ③

07

▸ 20051-0101

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+x+4}-2}$의 값을 구하시오.

08

▸ 20051-0102

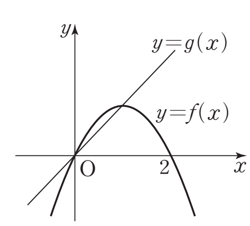
$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2x-9}\right)$의 값은?

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$
④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

09

▸ 20051-0103

그림과 같이 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점과 점 $(2,\ 0)$을 지나고 직선 $y=g(x)$는 원점과 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 지난다. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은?



① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

유형 4 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값 또는 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분수식인 경우 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 각각 나눈 후 구한다.
(2) $\infty-\infty$ 꼴인 경우 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$을 이용하여 식을 변형한 후 구한다.

필수 유형

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

출제 의도

$\infty-\infty$ 꼴을 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+2)-(x^2-2x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

10 ▸ 20051-0104

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1-2x}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

11 ▸ 20051-0105

$x>1$인 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{f(x)}-f(\sqrt{x})}$의 값은?

① 0 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

12 ▸ 20051-0106

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식
$$\sqrt{2x+1}<f(x)<\sqrt{2x+3}$$
을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{x}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

수학 II

유형 5 미정계수의 결정

출제유형 | 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 |

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

임을 이용하여 미정계수를 결정한다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면

$(f(x)$의 차수$)=(g(x)$의 차수$)$이고

$\alpha=\frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

출제 의도

함수의 극한에 대한 조건을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

(ⅰ) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(4x^2+3x+a)=a$이므로 $a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로 $f(1)=4+3+4=11$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=4$를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}(10x+b)=b$이므로 $b=4$

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로 $f(1)=10+4=14$

(ⅲ) $n\geq3$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=4$를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}(6x+c)=c$이므로 $c=4$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로 $f(1)=6+4=10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

답 ③

13

▸ 20051-0107

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^3-1}=1$일 때, $a-b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

14

▸ 20051-0108

$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+ax})=-3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

15

▸ 20051-0109

$\lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{13-x}-\sqrt{5+x}}=b$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 0이 아닌 상수이다.)

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

16

▸ 20051-0110

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)-x^3}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

17

▸ 20051-0111

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2)f(x)}{x^3+x}=4$
(나) $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(5)}{5}$

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

18

▸ 20051-0112

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 일차항의 계수가 1인 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)g(x)}=2$
(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-xg(x)}{2x+3}=2$

$f(1)+g(1)$의 값을 구하시오.

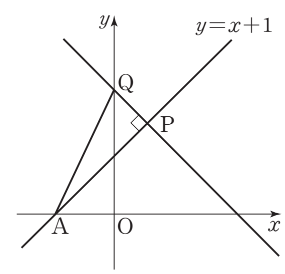
유형 6 함수의 극한의 활용

출제유형 | 좌표평면에서의 선분의 길이 또는 도형의 넓이에 대한 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 극한값을 구하려고 하는 식에 포함된 선분의 길이 또는 도형의 넓이를 한 문자에 대한 식으로 나타낸 다음 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 |

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 A$(-1, 0)$과 P$(t, t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

점 P의 좌표를 이용하여 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 다음 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

직선 $y=x+1$과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로
점 P$(t, t+1)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은
$y-(t+1)=-(x-t)$, 즉 $y=-x+2t+1$
이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는
$(0, 2t+1)$
따라서
$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$,
$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$
이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

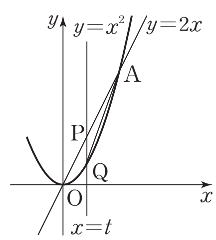
답 ③

수학Ⅱ

19

▸ 20051-0113

그림과 같이 직선 $y=2x$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A, 직선 $y=2x$와 곡선 $y=x^2$이 직선 $x=t$ $(0<t<2)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\lim_{t\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은?

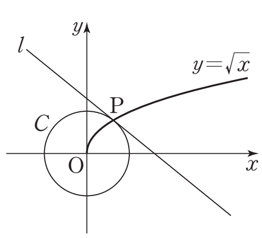


① $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ③ 2
④ $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

20

▸ 20051-0114

그림과 같이 양의 실수 t에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 C가 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P라 하자. 원 C 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 $(f(t),\ 0)$이라 할 때, $\lim_{t\to 0+}f(t)$의 값은?



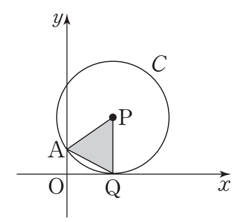
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

21

▸ 20051-0115

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나고 x축에 접하는 원 C의 중심을 P, x축과 접하는 점을 Q라 하자. 원 C의 반지름의 길이를 r, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(r)$라 할 때, $\lim_{r\to\infty}\frac{\{S(r)\}^2}{r^3}$의 값은?

$\left(\text{단, } r>\frac{1}{2}\text{이고 점 Q의 } x\text{좌표는 양수이다.}\right)$

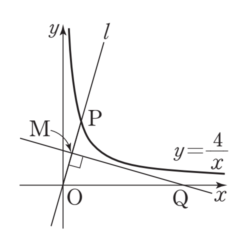


① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

22

▸ 20051-0116

그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 k $(k>0)$인 직선 l이 곡선 $y=\frac{4}{x}$ $(x>0)$와 만나는 점을 P라 하자. 선분 OP의 중점 M을 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2\times\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{OQ}}^2}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

유형 7 함수의 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 조건을 이용하여 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq3) \\ b & (x=3) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

출제 의도

주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 함수가 $x=3$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x \to 3} f(x)=f(3)$을 만족시키면 된다.

즉, $\lim_{x \to 3}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3}=b$가 성립해야 하고 $x \to 3$일 때

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x \to 3}(x^2-5x+a)=9-15+a=0$에서 $a=6$

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x \to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} \\ &=\lim_{x \to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \\ &=\lim_{x \to 3}(x-2) \\ &=1 \end{aligned}$$

이므로

$a+b=6+1=7$

답 ④

23 ▸ 20051-0117

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-a}{x-1} & (x\neq1) \\ b & (x=1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{5}{2}$　② 3　③ $\dfrac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{2}$

24 ▸ 20051-0118

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<-1) \\ 1 & (x\geq-1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} -2 & (x<2) \\ x^2+x+b & (x\geq2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $h(-3)+h(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

25 ▸ 20051-0119

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5})f(x)=ax+b$$

를 만족시킨다. $f(2)=-5$일 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -50　② -40　③ -30　④ -20　⑤ -10

수학Ⅱ

26

▸ 20051-0120

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값은?

(가) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (0\le x<2) \\ -2x+b & (2\le x<4) \end{cases}$ (a, b는 상수)

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27

▸ 20051-0121

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)+x^3}{x^2+x-2} & (x<-2 \text{ 또는 } x>1) \\ k\left|x+\dfrac{1}{2}\right| & (-2\le x\le 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

28

▸ 20051-0122

다음 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

함수

$f(x)=\begin{cases} |x^2-5| & (x<k) \\ a & (x\ge k) \end{cases}$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 k의 개수는 4이다.

29

▸ 20051-0123

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$, 직선 $y=t$가 함수 $y=\cos x-2$ $(0\le x\le 2\pi)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $h(t)=f(t)+g(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는?

(가) 극한값 $\lim_{t\to a} h(t)$가 존재한다.

(나) 함수 $h(t)$는 $t=a$에서 불연속이다.

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

유형 8 연속함수의 성질

출제유형 | 연속 또는 불연속인 함수들의 합, 차, 곱 또는 몫의 연속성을 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $f(a)$, $\lim_{x \to a} f(x)$의 값을 비교하여 $x=a$에서 연속성을 조사하고 구간에 따라 나누어 정의된 함수의 경우는 구간의 경계인 x의 값에서 좌극한과 우극한의 값을 비교하여 연속성을 조사한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x \ge 2) \end{cases},$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$
④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

출제 의도

두 함수의 몫으로 표현된 함수가 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x \ge 2$일 때, $f(x)=1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데 $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다. 즉,

$$\lim_{x \to 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6} = \frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 2+} \frac{ax+1}{1} = 2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)} = 2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2$, $2a=-1$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$

답 ④

30

▸ 20051-0124

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (x<0) \\ -x+4 & (x \ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이다. k가 음수일 때, $f(-1)$의 값은?

① -2 ② -3 ③ -4
④ -5 ⑤ -6

31

▸ 20051-0125

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & (x<0) \\ x^2+4 & (x \ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

32

▸ 20051-0126

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<1) \\ x+1 & (x \ge 1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 3x-a & (x<1) \\ -x-3 & (x \ge 1) \end{cases}$$

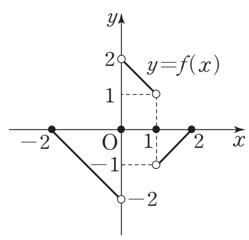
에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

수학Ⅱ

33

▸ 20051-0127

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



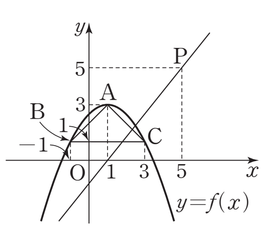
닫힌구간 $[-2, 1]$에서 정의된 함수 $g(x)=f(x)+kf(x+1)$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

34

▸ 20051-0128

그림과 같이 세 점 $A(1, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 A, B, C를 지난다. 실수 a에 대하여 점 $P(5, 5)$를 지나고 기울기가 a인 직선이 삼각형 ABC의 세 변과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(x)\{f(x)-t\}$가 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은?



① $\frac{41}{8}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{45}{8}$ ④ $\frac{47}{8}$ ⑤ $\frac{49}{8}$

유형 9 최대 · 최소 정리와 사잇값의 정리

출제유형 | 최대 · 최소 정리 또는 사잇값의 정리를 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) 함수 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

필수 유형

사차함수 $y=x^4-2x^2-4x$의 그래프와 이차함수 $y=-3x^2+7x$의 그래프는 두 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$에서만 만난다. 다음 중 a가 속한 구간은?

① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ ④ $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

출제 의도

사잇값의 정리를 이용하여 방정식의 실근이 존재하는 구간을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$f(x)=x^4-2x^2-4x-(-3x^2+7x)$$
$$=x^4+x^2-11x$$
$$=x(x^3+x-11)$$

이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=x^3+x-11$이라 하면

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-11=-\frac{83}{8}<0$

$g(1)=1+1-11=-9<0$

$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}+\frac{3}{2}-11=-\frac{49}{8}<0$

$g(2)=8+2-11=-1<0$

$g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{125}{8}+\frac{5}{2}-11=\frac{57}{8}>0$

$g(3)=27+3-11=19>0$

이때 $f(2)f\left(\frac{5}{2}\right)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 a가 속한 구간은 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$이다.

답 ④

35

▸ 20051-0129

삼차방정식 $x^3+2x-5=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간은?

① $(-2, -1)$ ② $(-1, 0)$ ③ $(0, 1)$
④ $(1, 2)$ ⑤ $(2, 3)$

36

▸ 20051-0130

$a\ge 0$일 때 x에 대한 방정식 $x^3+ax+4=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. 그 실근이 열린구간 $(-1, 2)$에 존재하도록 하는 양의 정수 a의 최솟값을 구하시오.

37

▸ 20051-0131

삼차방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 가지고, 그 근은 열린구간 $(-2, 2)$에 속한다. 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지는 방정식만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(2x)=0$
ㄴ. $(x-3)f(x)=0$
ㄷ. $f(x)+f(-x)=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

38

▸ 20051-0132

함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 3 & (0\le x\le 1) \\ 2\sqrt{x-1}+1 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 실수 a의 개수는 2이다.
ㄴ. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $xf(x)$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
ㄷ. $g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$일 때 방정식 $g(x)\{f(x)-2\}=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학Ⅱ

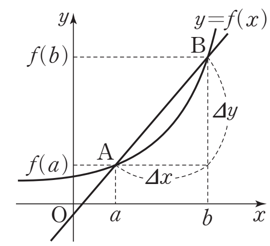
05 다항함수의 미분법

1 평균변화율

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

(2) 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

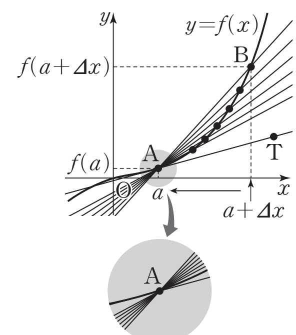


2 미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.



참고 (1) $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서 Δx 대신에 h를 이용하여 나타낸다. 즉,

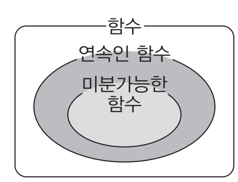
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(2) $\Delta x\to 0$일 때 점 B의 x좌표가 a에 한없이 가까워지므로 점 B는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 A에 한없이 가까워진다. 이때 직선 AB는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워지는데 이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A는 접점이라고 한다.

3 미분가능성과 연속성

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라고 한다.



(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역 '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다'는 반드시 성립하는 것은 아니다.

참고 미분계수 $f'(a)$가 존재한다는 뜻은 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이므로 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것이고, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것은 좌극한값 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 우극한값 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 모두 존재하고 서로 같아야 한다는 뜻이다.

4 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 각각의 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) 함수 $y=f(x)$에서 그 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $y=f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

5 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ ($n\geq 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$ ② $y=x$이면 $y'=1$ ③ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) 함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수) ② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ ③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(3) 함수의 곱의 미분법

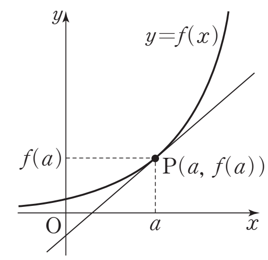
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

6 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$



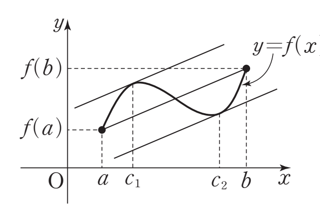
7 평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
$f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



8 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

참고 위의 명제의 역이 반드시 성립하는 것은 아니다. 함수 $f(x)=x^3$은 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

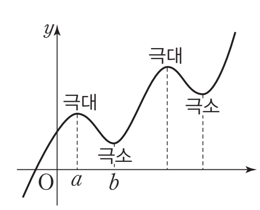
9 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소: 함수 $f(x)$에서

① $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

② $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.



(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

10 함수의 그래프

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

① 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

② $f'(x)$의 부호 변화를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 좌표축과의 교점의 좌표 등을 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

11 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 가지므로 다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾는다.

① 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.

② 닫힌구간 $[a, b]$에서의 양 끝의 함숫값 $f(a)$와 $f(b)$를 구한다.

③ ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 따라 적당한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 구한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

12 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표이다.

(3) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

참고 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)$\times$(극솟값)>0이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

② (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

③ (극댓값)$\times$(극솟값)<0이면 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

13 부등식에의 활용

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하는 것을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

14 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

(1) $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) $a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

유형 1 미분계수의 뜻과 정의

출제유형 | 주어진 극한값의 식의 변형을 응용하여 미분계수를 구하거나 미분계수의 기하학적 의미가 접선의 기울기임을 이해하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 미분계수의 정의를 여러 변형된 식으로 활용할 수 있어야 하고 미분계수가 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 이해하고 활용할 줄 알아야 한다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}$$

(단, k는 0이 아닌 상수)

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 p이면

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p$$

필수 유형

| 2016학년도 대수능 변형 |

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$

(나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

$f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

미분계수의 정의와 변형을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (나)에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $f(2)=g(2)$ ······ ㉠

조건 (가)의 식에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$이므로

$g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$

$f(2)=g(2)=1$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}=f'(2)-g'(2)=2$$

따라서 $f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)=1+1+2=4$

답 ④

01

▸ 20051-0133

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=1$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{h}$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

02

▸ 20051-0134

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 2일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a-3h)}{h}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

03

▸ 20051-0135

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to3}f(x)=2$

(나) $\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)f\left(3+\frac{h}{2}\right)-2f(3+2h)}{h}=4$

$f'(3)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수학Ⅱ

유형 2 미분가능과 연속

출제유형 | 함수가 특정한 x에서 미분가능한지, 즉 미분계수가 존재하는지에 대하여 묻는 문제, 구간에 따라 주어진 함수가 다르고 미정계수를 포함한 함수가 미분가능함을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이면 미분계수 $f'(a)$가 존재하고, 미분가능하면 연속임을 이용한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x\le -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

출제 의도

미분가능하면 연속임을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 미분가능하다.

또한 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$

$\lim_{x\to -2-}(x^2+ax+b)=4-2a+b$, $\lim_{x\to -2+}2x=-4$

$4-2a+b=-4$

$b=2a-8$ …… ㉠

이때

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{(-2+h)^2+a(-2+h)+(2a-8)\}+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2+(a-4)h}{h}=a-4$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2(-2+h)+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h}=2$$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=4$이므로

$a+b=10$

답 ⑤

04 ▸ 20051-0136

$x=0$에서 미분가능한 함수를 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x<0) \\ x^2+1 & (x\ge 0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=|x|+2$

ㄷ. $h(x)=2|x|^3-x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 ▸ 20051-0137

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+b & (x<1) \\ ax+3 & (x\ge 1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

06 ▸ 20051-0138

함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+c & (x<2) \\ -x^2+2ax+b-a^2 & (x\ge 2) \end{cases}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $3(a+b+c)$의 값을 구하시오.

(단, a, b, c는 상수이다.)

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

(나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{26}{3}$이다.

유형 3 도함수와 미분법

출제유형 | 미분법을 이용하여 미분계수를 구하거나 여러 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도함수를 구하고 이 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있어야 하며 여러 변형된 식에서도 활용할 수 있어야 한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=x^n$ ($n\ge 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=x$이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(4) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

(5) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(6) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(7) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 의도

곱의 미분법을 이용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $f(2)=0$이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

$a=-2$일 때 $\frac{1}{2+a}$의 값은 존재하지 않으므로

$a\ne -2$

따라서 $\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

즉, $f(3)=2\times 1\times 5=10$

답 ④

07

▸ 20051-0139

함수 $f(x)=(2x^3-x+1)(ax-x^2)+x+1$에 대하여 $f'(1)=13$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08

▸ 20051-0140

두 함수 $f(x)=x^2-2x-1$, $g(x)=x^3+ax+b$에 대하여

$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$ 이라 하자.

$h'(0)=5$, $h'(2)=15$일 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -3 ③ -4
④ -5 ⑤ -6

09

▸ 20051-0141

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수

$A(x)=f(x)+g(x)$, $B(x)=f(x)-g(x)$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 함수 $A(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A(x)=\sum_{k=1}^{2n}kx^k$ (단, n은 자연수)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$이다.

$A'(1)=650$일 때, $B'(1)$의 값은?

① 72 ② 74 ③ 76
④ 78 ⑤ 80

유형 4 접선의 방정식

출제유형 | 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기와 미분계수가 같음을 이용하여 접점의 좌표, 접선의 기울기, 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)$임을 이해하고 이를 이용하여 여러 형태로 제시된 문제를 해결할 수 있어야 한다. 특히 접선의 방정식은 직선의 방정식임을 이해하고 이와 관련된 기본적인 사항을 활용할 줄 알아야 한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

미분을 이용하여 접선의 기울기를 구하고 수직인 두 직선 사이의 관계를 이용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$y'=3x^2-a$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $3-a$이다.

이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$에서 $3-a=2$

즉, $a=1$

또한 점 $(1, 1)$은 곡선 $y=x^3-x+b$ 위의 점이므로

$1=1^3-1+b$에서 $b=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

답 2

10

▸ 20051-0142

곡선 $y=x^3-10$ 위의 제4사분면에 있는 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 12일 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

11

▸ 20051-0143

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선과 수직이고 점 $(1, f(1))$을 지나는 직선의 방정식이 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$이다. $f'(2)=1$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

12

▸ 20051-0144

함수 $f(x)=2x^3+ax^2+b$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(-2, f(-2))$에서의 접선 l_1이 곡선 $y=f(x)$와 점 A가 아닌 점 B에서 만난다. 또한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}(1, f(1))$에서의 접선 l_2가 곡선 $y=f(x)$와 점 C가 아닌 점 D에서 만난다. 두 직선 l_1과 l_2의 기울기가 같을 때, 두 점 B, D의 x좌표의 곱은?

(단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{43}{4}$ ② $-\frac{39}{4}$ ③ $-\frac{35}{4}$
④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{27}{4}$

13

▸ 20051-0145

함수 $f(x)=2x^3-x^2-ax+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 기울기가 7이고 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(2,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 l의 기울기는 3일 때, 접선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 접점의 좌표는 $(c,\ d)$이다. 네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

14

▸ 20051-0146

곡선 $y=x^3$ 위의 점 P에서의 접선 l이 곡선 $y=x^3$과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 점 Q에서의 접선의 기울기와 점 P에서의 접선 l의 기울기의 차는 18이다. 접선 l의 기울기는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

15

▸ 20051-0147

함수 $f(x)=x^3+ax$의 그래프와 함수 $g(x)=-x^2+bx+c$의 그래프가 만나는 두 점 중 한 점 A에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 모두 접하는 접선의 방정식이 $y=-x-2$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 두 점 중 A가 아닌 점의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

유형 5 함수의 증가와 감소

출제유형 | 함수의 증가와 감소를 문제에서 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 구하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 증가와 감소를 문제에서 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 판단할 수 있어야 한다.
함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 증가와 감소를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서
$f'(x)=x^2-9$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 열린구간 $(-a,\ a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

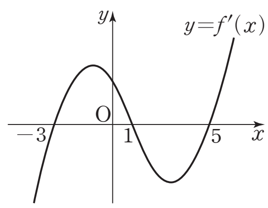
답 3

수학Ⅱ

16

▸ 20051-0148

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$가 감소하는 구간인 것은?



① $(-4,\ -2)$ ② $(-3,\ -1)$ ③ $(-2,\ 1)$
④ $(0,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 5)$

17

▸ 20051-0149

실수 k에 대하여 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+kx+12$, $g(x)=x^2+k^2x+1$이 있다. $h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1,\ h(1))$에서의 접선의 기울기를 $i(k)$라 하자. 함수 $i(k)$가 감소하는 구간에 속하는 모든 정수의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

18

▸ 20051-0150

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+3x-2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

> 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ a+1)$에서 증가하다가 감소하거나 감소하다가 증가한다.

유형 6 함수의 극대와 극소

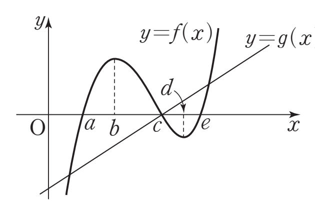
출제유형 | 문제에서 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극대, 극댓값과 극소, 극솟값을 구하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 문제에서 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극대, 극댓값과 극소, 극솟값을 판단할 수 있어야 한다.
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

필수 유형

| 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$) [4점]

① $a<p<b$이고 $c<q<d$
② $a<p<b$이고 $d<q<e$
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

출제 의도

함수의 그래프에서 극대와 극소를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 그래프를 이용하여 x의 값의 범위에 따라 y'의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)g(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y'	$-$	$-$		$+$	$+$	0	$-$	$-$		$+$	$+$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=c$에서 극대이고, $p<q$이므로 p는 열린구간 $(a,\ b)$에 포함되고, q는 열린구간 $(d,\ e)$에 포함된다.
따라서 $a<p<b$이고 $d<q<e$이다.

답 ②

19

▸ 20051-0151

함수 $f(x)=2x^3-2x^2-10x$가 $x=a$와 $x=b$에서 극값을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, $a\neq b$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

20

▸ 20051-0152

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^2+x-2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

21

▸ 20051-0153

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 함수 $y=f'(x)-a$의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(5, 0)$을 지날 때, 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

22

▸ 20051-0154

삼차함수 $f(x)=ax^3+(a^2-3)x^2+bx$ $(a\neq 0)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다. $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $10\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $14\sqrt{3}$
④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

23

▸ 20051-0155

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$와 이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지고 $x=1$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$는 극값 -45를 갖는다. $g(1)$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이고, $a\neq 0$이다.)

① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

24

▸ 20051-0156

최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고, 상수항은 0, 나머지 항의 계수가 모두 자연수인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 삼차함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)=\frac{22}{3}$
(나) 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

수학Ⅱ

유형 7 함수의 그래프와 최대, 최소

출제유형 | 다양하게 주어진 조건을 이용하여 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제와 도형의 길이, 넓이, 부피의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 등이 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 극댓값, 극솟값을 구하고 닫힌구간의 양 끝 값에서의 함숫값과 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다. 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 주어진 조건에 따라 미지수 x로 놓고 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타내어 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 그래프에서 극대와 극소를 활용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극대이고 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)$를 갖는다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\frac{a}{3}+2$$
$$=-\frac{5}{27}a^3+2$$

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$에서 $a^3=8$, $a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$에서

$f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2=10$

이므로 $M=10$

따라서 $a+M=2+10=12$

답 12

25

▸ 20051-0157

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수

$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-2$$

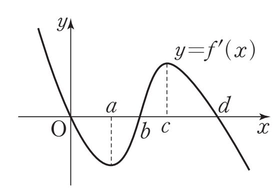
의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-\frac{3}{2}$　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

26

▸ 20051-0158

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 점의 개수가 3일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(0)$이 만나는 점의 개수를 p, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{f(a)+f(b)}{2}$가 만나는 점의 개수를 q라 하자. $p+q$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

27

▸ 20051-0159

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

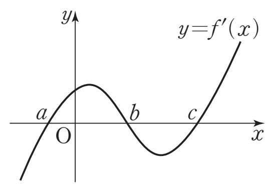
(가) $f(-2)=f(4)=0$
(나) $f'(-2)=f'(4)=0$

닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오.

28

▸ 20051-0160

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f'(a)=f'(b)=f'(c)=0$이고 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[0, c]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 7이다.
> (다) 닫힌구간 $[a, c]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 9이다.

$|f(c)-f(a)|$의 값을 구하시오. (단, $a<0<b<c$)

29

▸ 20051-0161

삼차함수

$$f(x)=ax^3+\frac{3a+1}{2}x^2+2(1-3a)x+2a+4$$

가 $x=-2$에서 극대이고 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(-2)$가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 범위는 $a\ge\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

30

▸ 20051-0162

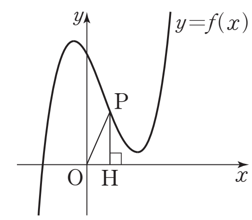
구간 $[a, \infty)$에서 함수 $f(x)=x^3-3x-6$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)\neq f(a)$인 실수 a의 값의 범위는 $p<a<q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

31

▸ 20051-0163

그림과 같이 함수 $f(x)=3x^3-8x^2-6x+24$의 그래프 위의 한 점 $P(t, f(t))$ $(t\neq0)$에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여 삼각형 OHP의 넓이를 $S(t)$라 하자. $-\sqrt{2}<t<0$, $0<t<2$일 때, 함수 $S(t)$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



32

▸ 20051-0164

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
> (나) 어떤 양수 k에 대하여 두 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'(3)>0$
ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, 2)$에서 x축과 만난다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33

▸ 20051-0165

$-1\le x\le3$에서 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\ (0<a<3)$$

의 최솟값을 $g(a)$라 하자. 함수 $h(a)=|g(a)|$에 대하여 $h\left(\frac{4}{3}\right)+h(2)+h(\sqrt[3]{9})$의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{23}{6}$ ③ 4
④ $\frac{25}{6}$ ⑤ $\frac{13}{3}$

유형 8 방정식에의 활용

출제유형 | 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수, 근의 종류를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 증가, 감소, 극대, 극소를 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 x축, 직선 $y=k$와 만나는 점 등을 이용하여 방정식의 실근의 개수 등을 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은? [4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

출제 의도

다항함수의 미분법을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$x^3-3x^2-9x=k$에서 $f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f'(x)=3x^2-6x-9$

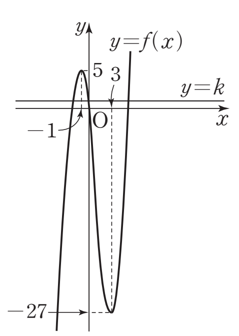
$\quad=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=5$, $f(3)=-27$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



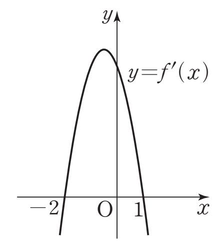
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$이고, 정수 k의 최댓값은 4이다.

답 ②

34

▸ 20051-0166

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(-2)f(1)<0$일 때, 방정식 $f(x-5)=0$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

35

▸ 20051-0167

삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a, 방정식 $f(x)-5=0$의 서로 다른 실근의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

36

▸ 20051-0168

두 곡선 $y=\frac{2}{3}x^3-2x^2+x$와 $y=x^2-3x+a$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. pq의 값은?

① $\frac{20}{9}$　② $\frac{22}{9}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{26}{9}$　⑤ $\frac{28}{9}$

37

▸ 20051-0169

함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하였더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -15 ② -13 ③ -11
④ -9 ⑤ -7

38

▸ 20051-0170

삼차방정식 $x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-k^2+\frac{9}{2}k=0$이 $x=a$를 중근으로 가지고 $x=b$를 다른 한 실근으로 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 p라 할 때, $\frac{4}{9}abp$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$)

39

▸ 20051-0171

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sqrt{a}x^2+\frac{a}{4}x+1$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 음수이다. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 p, 서로 다른 실근 중 음수의 개수를 q라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

40

▸ 20051-0172

사차방정식 $x^4-4x^3+16=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 n보다 클 때, 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

41

▸ 20051-0173

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx-4$의 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, 2)$를 지난다.
(나) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

자연수 a에 대하여 a가 최소일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3$이 만나는 점의 개수는? (단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

42

▸ 20051-0174

최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 중에서 $f(1)$의 값이 최소인 함수를 $g(x)$라 하자.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
(나) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 차는 2이다.

방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(a)$라 하자. $h(1)+h\left(\frac{1}{3}\right)+h(-1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

유형 9 부등식에의 활용

출제유형 | 부등식 $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$의 해를 구하는 문제와 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 증가, 감소, 극대, 극소를 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 부등식을 만족시키는 해를 구한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식 $f(x)\geq 3g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

도함수를 이용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$이고, 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서

$f(x)\geq 3g(x)$이려면 $h(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소임을 알 수 있다.

즉, 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)=3-k$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 $h(x)\geq 0$이려면 $3-k\geq 0$이어야 한다.

따라서 $k\leq 3$이어야 하므로 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

43

▸ 20051-0175

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 부등식 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+a\geq 0$이 항상 성립할 때, 실수 a의 최솟값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

44

▸ 20051-0176

다음은 $x>0$일 때, $2x^3+28>9x^2$임을 증명하는 과정이다.

> $f(x)=2x^3-9x^2+28$이라 하면
>
> $f'(x)=6x(x-3)$
>
> $x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=\boxed{(가)}$에서 극소이면서 최소이다.
>
> 이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{(나)}$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $f(x)=2x^3-9x^2+28\geq\boxed{(나)}>0$
>
> 따라서 $2x^3+28>9x^2$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

45

▸ 20051-0177

$x\leq 0$일 때, 부등식 $x^3+4x^2\leq ax+18$이 항상 성립하도록 하는 양수 a의 최댓값을 구하시오.

유형 10 속도와 가속도

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점의 함수식이나 그래프에서 물체의 위치, 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

$$v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$a=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-5t^2+at+5$$

이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

출제 의도

도함수를 이용하여 속도에 대한 응용 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이거나 항상 $v\leq 0$이어야 한다.

이때

$$v=3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+a-\frac{25}{3}$$

이므로 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\leq 0$일 수는 없다.

즉, 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이어야 하므로 $a-\frac{25}{3}\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a\geq \frac{25}{3}$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

답 ①

46

▸ 20051-0178

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^2-4t+2$일 때, $t=10$에서의 점 P의 가속도는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

47

▸ 20051-0179

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3+at^2+bt$$

이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도가 15이고 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 16일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

48

▸ 20051-0180

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=\frac{1}{3}t^3+at^2+bt$$

이고 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P의 $t=2$에서의 위치가 $\frac{20}{3}$이다.
(나) 점 P가 $t=t_1$, $t=t_2$에서 각각 운동 방향을 바꾸고 $t_2-t_1=2$이다.

$t=8$에서의 점 P의 속도는? (단, a, b는 상수이다.)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

06 다항함수의 적분법

1 부정적분

(1) 부정적분의 뜻

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때, $F(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분이라 하고, $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 부정적분의 표현

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 모두

$$F(x)+C\ (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ (C\text{는 상수})$$

이다. 이때 상수 C를 적분상수라고 한다.

미분

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

부정적분

2 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 함수 $y=1$의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(2) $\int 1\,dx=x+C\ (C\text{는 적분상수})$

3 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

4 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

참고 ① $a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ② $\int_a^a f(x)dx=0$

5 정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\ (\text{단, } a<x<b)$$

6 정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

7 정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

8 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

9 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

10 수직선 위를 움직이는 점의 위치

점 P가 수직선 위를 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직일 때, 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 $f(a)$라 하면

(1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(2) 점 P의 시각 $t=b$에서의 위치 $f(b)$는

$$f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$$

11 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

유형 1 부정적분의 정의와 성질

출제유형 | $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분과 부정적분의 성질을 이용하여 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) n이 양의 정수일 때

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k는 0이 아닌 상수)

② $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

필수 유형

| 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$$

이고 $f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$
④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

출제 의도

부정적분의 정의와 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx\\&=\int\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx\\&=\int(x+1)dx\\&=\frac{1}{2}x^2+x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$$f(4)=\frac{1}{2}\times4^2+4+1=13$$

답 ④

01

▸ 20051-0181

함수 $f(x)=3x^2-4x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=f'(x)-\int f(x)dx$라 하자. $g(1)=6$일 때, $g(2)$의 값을 구하시오.

02

▸ 20051-0182

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+3$이고 $f(1)=3$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

03

▸ 20051-0183

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x)+1}{x}=6$
(나) $f'(x)=x^2+x+a$ (단, a는 상수이다.)

$f(a)$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

유형 2 정적분의 성질과 계산

출제유형 | 정적분의 성질을 이용한 계산 문제와 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

정적분의 성질을 이해하고 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 (x+|x-3|)dx+\int_3^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 \{x-(x-3)\}dx+\int_3^4 \{x+(x-3)\}dx$

$=\int_1^3 3dx+\int_3^4 (2x-3)dx$

$=\Big[3x\Big]_1^3+\Big[x^2-3x\Big]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=6+4$

$=10$

답 10

04

▸ 20051-0184

$\int_0^2 x^2(x+1)dx+\int_2^0 x(x+1)dx+\int_0^2 (x+1)dx$의 값을 구하시오.

05

▸ 20051-0185

함수 $f(x)=\begin{cases} x(x+1) & (x<0) \\ x(x-1) & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여 $\int_{-1}^2 |f(x)|dx$의 값은?

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

06

▸ 20051-0186

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$이다.

(나) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $\int_{-3}^0 f'(x)dx=-63$, $\int_{-1}^4 f'(x)dx=-15$이다.

$\int_{-1}^7 f'(x)dx$의 값은?

① -78 ② -48 ③ 0

④ 48 ⑤ 78

수학 II

유형 3 함수의 성질을 이용한 정적분

출제유형 | 함수의 그래프가 y축 또는 원점에 대하여 대칭일 때, 함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

필수 유형

| 2016학년도 대수능 |

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3} (x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

조건으로부터 함수의 대칭성을 발견하고 이를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $y=h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$

(n은 0 또는 자연수, a_{2n+1}, a_{2n-1}, $\cdots$, a_1은 상수)

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

또한 $(-x)h'(-x)=-\{xh'(x)\}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} \{xh'(x)+5h'(x)\}dx&=0+2\int_{0}^{3} 5h'(x)dx\\&=10\Big[h(x)\Big]_0^3\\&=10\{h(3)-h(0)\}\end{aligned}$$

$10\{h(3)-h(0)\}=10$에서

$h(3)-h(0)=1$

따라서 $h(3)=h(0)+1=0+1=1$

답 ①

07

▸ 20051-0187

$\int_{-1}^{1} (x^2+x+1)^2dx$의 값은?

① 4 ② $\frac{22}{5}$ ③ $\frac{24}{5}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{28}{5}$

08

▸ 20051-0188

$f(x)=\int (2x-9)dx$이고 $\int_{-3}^{3} f(x)dx=6$일 때, $f(-1)$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

09

▸ 20051-0189

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면
$\int_{-1}^{1} g(x)dx=-16$, $\int_{-1}^{1} xg(x)dx=4$이다.

$f(2)$의 값을 구하시오.

유형 4 정적분으로 표현된 함수

출제유형 | 정적분으로 표현된 함수의 미분을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a<x<b$)

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

정적분으로 표현된 함수의 미분을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2$에서 $a=1$

$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\frac{d}{dx}(x^3+x^2-2)$

$\frac{d}{dx}f(x)=3x^2+2x$

즉, $f'(x)=3x^2+2x$

따라서 $f'(a)=f'(1)=3+2=5$

답 ⑤

10 ▸ 20051-0190

다항함수 $f(x)$가 양수 a와 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-4x$$

를 만족시킨다. $f(a)$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

11 ▸ 20051-0191

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x+1)f(x)=x^3-3x+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

12 ▸ 20051-0192

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^4-2x^3+x^2=\int_1^x (x^2-t^2)f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하시오.

유형 5 정적분으로 표현된 함수의 극한

출제유형 | 정적분으로 표현된 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

필수 유형

등식 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x(t^2-6t+4)dt=3$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

출제 의도

정적분으로 표현된 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(t)=t^2-6t+4$로 놓고, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x(t^2-6t+4)dt&=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\\&=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[F(t)\Big]_a^x\\&=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\\&=F'(a)=f(a)\end{aligned}$$

$f(a)=a^2-6a+4=3$에서

$a^2-6a+1=0$ ······ ㉠

a에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times1=8>0$이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

답 ④

13 ▸ 20051-0193

$f(x)=|x^2-2x-3|$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14 ▸ 20051-0194

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=3x^2+2x+\int_0^2 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}f(t)dt$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

15 ▸ 20051-0195

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_{-3}^x g(t)dt,\ g(x)=\int_{-3}^x(t^2-10t+1)dt$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_3^{x+3}f'(t)dt$의 값을 구하시오.

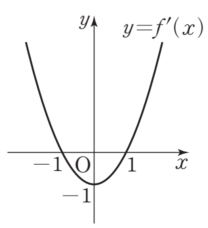
유형 6 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 주로 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선이 주어지고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 주로 출제되지만 문제에 주어지는 조건이 도함수, 함수의 성질 등을 이용하도록 주어지는 경우도 있으므로 이런 조건에 대비하여야 한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이다.



$f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

출제 의도

도함수 $f'(x)$의 그래프를 이해하여 함수 $f(x)$를 구하고 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f'(x)=x^2-1$에서

$f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x=\frac{1}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나고 $0\le x\le\sqrt{3}$에서 $f(x)\le 0$이다.

또 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right\}dx=-2\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=-2\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ④

16 ▸ 20051-0196

함수

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낼 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\int_0^1 f(x)dx$

② $\int_0^2 f(x)dx$

③ $2\int_1^2 f(x)dx$

④ $\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

⑤ $\int_2^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

17 ▸ 20051-0197

직선 $y=x+4$가 곡선 $y=-x^2+k$에 접할 때, 곡선 $y=-x^2+k$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{2}$

18 ▸ 20051-0198

0 이상인 실수 t에 대하여 $0\le x\le 1$에서 함수 $f(x)=|x^3-3t^2x|$의 최댓값을 함수 $M(t)$라 하자. 곡선 $y=M(t)$와 t축, y축 및 직선 $t=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{27}{32}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{29}{32}$ ④ $\frac{15}{16}$ ⑤ $\frac{31}{32}$

유형 7 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 곡선이 만나는 점을 구할 필요가 있을 때는 방정식을 이용하여 만나는 점의 x좌표를 구하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다. 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

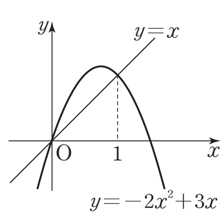
출제 의도

두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$-2x^2+3x=x$에서 $2x^2-2x=0$, $2x(x-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$이므로 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는 0, 1이고 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 \{(-2x^2+3x)-x\}dx$$
$$=\int_0^1 (-2x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{2}{3}+1$$
$$=\frac{1}{3}$$

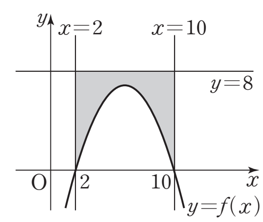
따라서 $p+q=3+1=4$

답 4

19 ▸ 20051-0199

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $f(2)=f(10)=0$이다. 곡선 $y=f(x)$와 세 직선 $x=2$, $x=10$, $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이가 26일 때, $\int_2^6 f(x)dx$의 값은?

(단, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<8$이다.)



① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

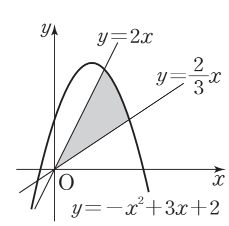
20 ▸ 20051-0200

두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^4$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{25}$ ③ $\frac{1}{20}$
④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

21 ▸ 20051-0201

그림과 같이 좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=-x^2+3x+2$와 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{2}{3}x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 4 ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

22

▸ 20051-0202

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x(1-x)^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 x축, y축에 각각 내린 두 수선의 발 $\mathrm{Q}(a, 0)$, $\mathrm{R}(0, b)$에 대하여 사각형 OQPR가 정사각형일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=b$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $\frac{16S}{ab}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P는 제1사분면에 있다.)

23

▸ 20051-0203

두 함수 $f(x)=-x^2+1$, $g(x)=x-1$에 대하여 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)| & (|f(x)| \le |g(x)|\text{일 때}) \\ |g(x)| & (|f(x)| > |g(x)|\text{일 때}) \end{cases}$$

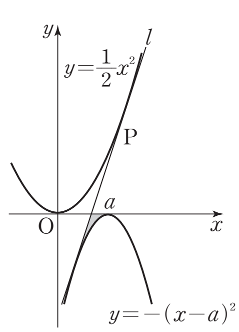
곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=-2x^2+2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

24

▸ 20051-0204

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 P에서의 접선 l은 곡선 $y=-(x-a)^2$과 접한다. 곡선 $y=-(x-a)^2$과 접선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6일 때, 양수 a의 값은?
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① $2\times\sqrt[3]{6}$ ② $2\times\sqrt[3]{9}$ ③ $3\times\sqrt[3]{3}$
④ $3\times\sqrt[3]{6}$ ⑤ $3\times\sqrt[3]{9}$

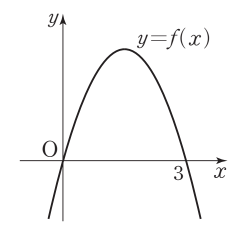
유형 8 여러 형태의 조건이 주어진 넓이

출제유형 | 함수의 성질, 정적분의 정의와 성질, 역함수의 관계 등을 이용하여 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 함수의 성질과 특징, 정적분의 정의와 넓이의 관계, 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 특징을 이용하여 넓이를 구한다.

필수 유형 | 2015학년도 대수능 9월 모의평가 변형 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다.



$\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{6}$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 4 ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

출제 의도

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 해석하고 정적분의 정의와 넓이의 관계를 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서
$f(x)=ax(x-3)$ $(a<0)$이라 하자.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1 ax(x-3)dx\\&=a\int_0^1 (x^2-3x)dx\\&=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1\\&=a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=-x(x-3)=-x^2+3x$이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^3 (-x^2+3x)dx&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3\\&=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

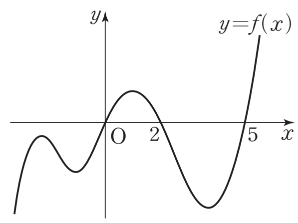
답 ④

수학Ⅱ

25

▸ 20051-0205

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $x<0$, $x>5$일 때, $f(x)\neq 0$이고 $f(0)=f(2)=f(5)=0$이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이다.
(나) $F(2)-F(0)=4$, $F(5)-F(0)=-8$

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

26

▸ 20051-0206

곡선 $y=1-x^4$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때,

$$a\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2S$$

를 만족시킨다. 상수 a의 값은?

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

27

▸ 20051-0207

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

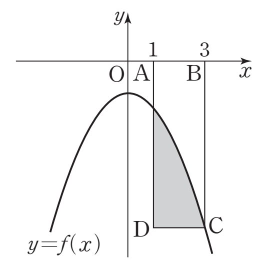
(가) $f(x)=|x|\ (-1\le x\le 1)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

$0\le x\le 4$에서 함수 $y=\{f(x)\}^4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $20S$의 값을 구하시오.

28

▸ 20051-0208

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=t\ (t\ge 1)$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(t)$는 $S(t)=3t^3+2t+a$이다. 그림과 같이 네 점 A$(1, 0)$, B$(3, 0)$, C$(3, f(3))$, D$(1, f(3))$을 꼭짓점으로 하는 직사각형이 곡선 $y=f(x)$에 의하여 나누어진 두 부분 중 색칠한 부분의 넓이를 구하시오. (단, a는 상수이다.)



29

▸ 20051-0209

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2+x-4$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 a라 할 때, $\int_{a}^{17}\{g(x)-1\}dx=\frac{n}{12}$이다. 두 자연수 a, n에 대하여 $a+n$의 값을 구하시오.

30

▸ 20051-0210

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ (x-1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{37}{20}$ ④ $\frac{19}{10}$ ⑤ $\frac{39}{20}$

유형 9 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 거리

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점 또는 물체의 시각 t에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치와 위치의 변화량, 움직인 거리의 차이점을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도에 대한 식에서 위치를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1(t)=v_2(t)$일 때이므로

$3t^2+t=2t^2+3t$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2 (3t^2+t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2 (2t^2+3t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}+6=\frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a는

$$a=\left|\frac{34}{3}-10\right|=\frac{4}{3}$$

이므로

$$9a=9\times\frac{4}{3}=12$$

답 12

31

▸ 20051-0211

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 $v(t)=3t^2+2t$이다. 속도가 1일 때 점 P의 위치는?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

32

▸ 20051-0212

수직선 위에 두 점 A(5), B$\left(\frac{16}{3}\right)$이 있다. 점 A를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$는 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} t(t-4) & (0\leq t\leq 4) \\ t-4 & (t>4) \end{cases}$$

점 P가 점 B$\left(\frac{16}{3}\right)$을 지날 때의 시각은 $a+b\sqrt{22}$이다. 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

33

▸ 20051-0213

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}이 있다. 10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 각각의 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $\cdots$, $v_{10}(t)$의 그래프는 모두 두 점 (0, 0), (2, 0)을 지나며 꼭짓점이 각각 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$, $\left(1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)$, $\cdots$, $\left(1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$인 이차함수의 그래프의 일부이다. 10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}이 다시 원점을 지나는 시각은 모두 $t=a\ (a>0)$이다. 10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}이 $t=0$에서 $t=a+1$까지 움직인 거리를 각각 s_1, s_2, s_3, $\cdots$, s_{10}이라 할 때, $s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{10}$의 값은?

① $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ② $4-\left(\frac{1}{2}\right)^9$ ③ $4-\left(\frac{1}{2}\right)^8$
④ $8-\left(\frac{1}{2}\right)^7$ ⑤ $8-\left(\frac{1}{2}\right)^6$

07 경우의 수

1 원순열

서로 다른 대상을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 하고, 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다. 따라서 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

설명 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $n!$이지만 이 각각을 원형으로 배열하면 $n!$ 중 n가지씩 같은 것이 있다. 따라서 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다. n개에 대한 원순열의 수는 어느 1개를 고정시키고 나머지 $(n-1)$개를 일렬로 나열하는 순열의 수 $(n-1)!$로도 생각할 수 있다.

참고 $n!$은 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$이며 n의 계승이라고 한다.

2 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 각 자리에 올 수 있는 것은 n가지씩이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_n\Pi_r=n^r$이다.

참고 ${}_n\Pi_r$의 Π는 Product(곱)의 첫 글자인 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이(pi)'로 읽는다.

3 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들 모두를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

설명 5개의 문자 a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구해보자.

구하는 경우의 수를 x라 하고, 그 중 한 가지 나열인 $aabbb$를 생각하자. 이때 2개의 a를 각각 a_1, a_2, 3개의 b를 각각 b_1, b_2, b_3으로 구별하면 다음과 같이 서로 다른 $2!\times3!$개의 나열이 생긴다.

$a_1a_2b_1b_2b_3$	$a_1a_2b_1b_3b_2$	$a_1a_2b_2b_1b_3$	$a_1a_2b_2b_3b_1$	$a_1a_2b_3b_1b_2$	$a_1a_2b_3b_2b_1$
$a_2a_1b_1b_2b_3$	$a_2a_1b_1b_3b_2$	$a_2a_1b_2b_1b_3$	$a_2a_1b_2b_3b_1$	$a_2a_1b_3b_1b_2$	$a_2a_1b_3b_2b_1$

이와 마찬가지로 x가지 각각에 대하여 2개의 a와 3개의 b를 구별하면 서로 다른 $2!\times3!$개의 나열이 생긴다. 따라서 5개의 문자 a, a, b, b, b를 a_1, a_2, b_1, b_2, b_3으로 구별하여 일렬로 나열하면 모든 경우의 수는 $x\times2!\times3!$이고 서로 다른 5개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $5!$이므로 $x\times2!\times3!=5!$에서 $x=\frac{5!}{2!\times3!}$

4 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명 두 개의 문자 A, B에서 중복을 허락하여 4개의 문자를 택하는 경우는

AAAA, AAAB, AABB, ABBB, BBBB

이다. 그림과 같이 그 각각의 경우는 두 문자의 경계를 나타내는 $(2-1)$개의 ‘|’와 문자를 놓을 수 있는 공간을 나타내는 4개의 ‘○’를 일렬로 배열하여 ‘|’ 앞의 ‘○’에는 A를, 뒤의 ‘○’에는 B를 놓는 것에 대응시킬 수 있다(‘○’가 없으면 해당 문자를 놓지 않는다). 따라서 이렇게 배열하는 경우의 수는 $(2+4-1)$개의 자리 중 ‘○’를 놓을 자리 4개를 택하는 경우의 수 ${}_{2+4-1}\mathrm{C}_{4}$와 같다.

$${}_{2}\mathrm{H}_{4}\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{AAAA} & \Longleftrightarrow & ○○○○| \\ \mathrm{AAAB} & \Longleftrightarrow & ○○○|○ \\ \mathrm{AABB} & \Longleftrightarrow & ○○|○○ \\ \mathrm{ABBB} & \Longleftrightarrow & ○|○○○ \\ \mathrm{BBBB} & \Longleftrightarrow & |○○○○ \end{array}\right\}{}_{(2-1)+4}\mathrm{C}_{4}$$

즉, ${}_{2}\mathrm{H}_{4}={}_{2+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{4}=5$이다.

참고 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$의 H는 homogeneous monomials(동차단항식) 또는 homogeneous product(동차곱)의 첫 글자이다.

5 중복조합의 활용

(1) 다항식의 항의 개수

설명 다항식 $(a+b+c)^{5}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=21$이다.

(2) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수

설명 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$이다.

(3) 대소 관계를 만족시키는 정수의 순서쌍의 개수

설명 부등식 $0\le x\le y\le z\le 4$를 만족시키는 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_{5}\mathrm{H}_{3}={}_{5+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{7}\mathrm{C}_{3}=35$이다.

6 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^{n}$을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n}&={}_{n}\mathrm{C}_{0}a^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}a^{n-1}b+{}_{n}\mathrm{C}_{2}a^{n-2}b^{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^{r}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}b^{n}\\&=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^{r}\end{aligned}$$

이를 $(a+b)^{n}$에 대한 이항정리라고 한다. 이 전개식에서 각 항의 계수 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{1}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$, $\cdots$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$, $\cdots$, ${}_{n}\mathrm{C}_{n}$을 이항계수라 하며 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^{r}$을 $(a+b)^{n}$의 전개식의 일반항이라고 한다.

7 이항계수의 성질

자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}=0$

(3) n이 홀수일 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

(4) n이 홀수일 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}={}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$

참고 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$ $(0\le r\le n)$이므로 n이 홀수일 때 위의 식이 성립한다.

유형 1 원순열

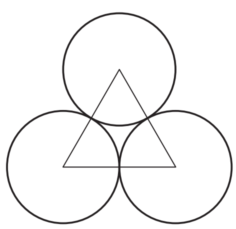
출제유형 | 원형으로 사람이나 물건 등을 배열하거나 균등하게 원형으로 배열된 영역에 색칠하는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 원순열의 뜻을 알고 구하는 경우의 수가 원순열의 수인지 파악한다. 회전하여 같은 것이 몇 가지인지 파악하여 구하거나 하나를 먼저 고정한 후 나머지를 나열하는 순열의 수로 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 6월 모의평가 |

그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

출제 의도

원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는 $7!$

회전하였을 때 같은 것이 3가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3}=1680$

답 ②

[다른 풀이]

삼각형의 내부와 세 원의 외부의 공통영역인 가운데 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수는 7

나머지 6가지 색 중 삼각형의 내부와 세 원의 내부의 공통부분인 세 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

위에서 택한 3가지 색 각각에 대하여 지정한 세 곳에 칠하는 경우의 수는 $(3-1)!=2$

이 각각에 대하여 남은 3가지 색을 남은 세 영역에 칠하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

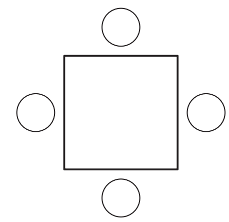
$7\times20\times2\times6=1680$

01

▸ 20051-0214

그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에 놓인 4개의 의자 중 3개를 택하여 3명의 학생이 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

02

▸ 20051-0215

어느 고등학교에서 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓인 원탁에 둘러앉으려고 한다. 같은 학년의 학생들끼리 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

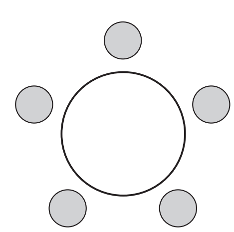
① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

03

▸ 20051-0216

부모 2명과 자녀 3명을 포함한 5명의 가족이 그림과 같이 5개의 의자가 일정한 간격으로 놓인 원탁에 둘러앉으려고 한다. 자녀 3명 모두 어머니 또는 아버지와 이웃하여 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



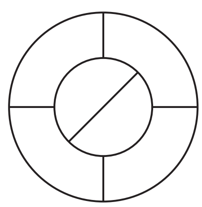
① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

04

▸ 20051-0217

그림과 같이 중심이 일치하고 반지름의 길이가 서로 다른 두 원이 있다. 원의 중심을 지나고 서로 수직인 두 직선에 의해 작은 원의 외부와 큰 원의 내부의 공통부분이 4개의 영역으로 나뉘고, 서로 수직인 두 직선이 이루는 각의 이등분선 중 하나에 의해 작은 원의 내부가 2개의 영역으로 나뉜다. 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적힌 스티커를 6개의 영역에 각각 하나씩 붙일 때, 작은 원의 내부의 2개 영역에는 모두 소수가 적힌 스티커를 붙이는 경우의 수를 구하시오.

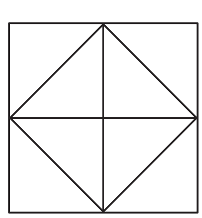
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



05

▸ 20051-0218

그림과 같이 8개의 합동인 직각이등변삼각형으로 이루어진 도형이 있다. 8개의 영역에 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 각 영역에 1가지 색만을 칠하려고 한다. 이때 빨간색을 칠한 도형과 파란색을 칠한 도형이 변을 공유하지 않도록 칠하는 경우의 수는 $k\times6!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



유형 2 중복순열

출제유형 | 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 중복순열의 뜻을 알고, 나열하는 경우 중 순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 구분할 수 있어야 한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점]

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

출제 의도

중복순열을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자는 5이어야 한다.
따라서 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

답 ③

확률과 통계

06

▸ 20051-0219

같은 종류의 사탕 12개를 3명의 학생에게 나누어 줄 때, 3명의 학생 모두 1개 이상 4개 이하의 사탕을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 나누어 주지 않은 사탕이 있을 수 있다.)

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

07

▸ 20051-0220

한 개의 주사위를 5번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 주사위의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

(가) a_1은 4의 약수이다.
(나) $a_2 < a_1 \le a_3$
(다) $a_4 < a_1 \le a_5$

08

▸ 20051-0221

다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 X로의 함수 f의 개수는?

(가) $f(1) \ge 4$
(나) $a \times f(a)$의 값이 홀수인 a $(a \in X)$가 존재한다.

① 1050 ② 1075 ③ 1100
④ 1125 ⑤ 1150

유형 3 같은 것이 있는 순열

출제유형 | 같은 것이 2개 이상 섞여 있는 문자 또는 숫자를 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 같은 것이 있는 순열의 수를 정확히 이해하여 중복순열과 구분할 수 있어야 한다. 일렬로 나열하는 경우 중 특정한 몇몇의 순서가 결정되어 있는 경우 같은 것이 있는 순열 또는 조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수를 구하시오. [4점]

출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) a가 4번 나오는 경우
$aaaa$로 경우의 수는 1이다.

(ii) a가 3번 나오는 경우
a가 3번 나오고 b 또는 c가 1번 나오므로 b, c 중 하나를 택한 뒤 a, a, a, ○을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
즉, ${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{4!}{3!}=8$

(iii) a가 2번 나오는 경우
a가 2번 나오고 b, c가 각각 1번씩 나오는 경우의 수는 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{4!}{2!}=12$
a가 2번 나오고 b가 2번 또는 c가 2번 나오는 경우의 수는 b, c 중 하나를 택한 뒤 a, a, ○, ○을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{4!}{2! \times 2!}=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$1+8+24=33$

답 33

09

▸ 20051-0222

7개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열할 때, a끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는?

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 155

10

▸ 20051-0223

어느 학교의 축제에서 장기자랑 프로그램의 시상을 위해 서로 다른 세 종류의 상품을 각각 3개씩 총 9개 준비하였다. 이 장기자랑 무대에 6명의 학생들이 참가하였을 때, 6명의 참가자 모두에게 상품을 하나씩 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 같은 종류의 상품끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 510 ② 540 ③ 570
④ 600 ⑤ 630

11

▸ 20051-0224

숫자 1, 2, 3 중 중복을 허락하여 4번 택한 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값이 4의 배수가 되도록 하는 a_1, a_2, a_3, a_4의 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수를 구하시오.

12

▸ 20051-0225

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열할 때, 홀수가 적힌 카드는 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 나열하고 가장 오른쪽에는 짝수가 적힌 카드가 오도록 나열하는 경우의 수는?

① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

13

▸ 20051-0226

단어 employee에 사용된 8개의 알파벳을 다음 조건을 만족시키도록 위에서 아래로 일렬로 나열하는 경우의 수는?

(가) 모든 e는 o보다 위쪽에 나열한다.
(나) m, p, l은 위쪽부터 이 순서대로 나열하거나 이와 반대의 순서대로 나열한다.

① 520 ② 540 ③ 560
④ 580 ⑤ 600

14

▸ 20051-0227

어느 도시의 하루 동안의 여행 계획을 세우려고 한다. 점심 식사, 저녁 식사, 박물관 견학, 유람선 탑승을 포함하여 모두 8가지 활동을 계획하고 있다. 이때 박물관 견학은 점심 식사 전의 활동에 포함시키고, 유람선 탑승은 저녁 식사 후의 활동에 포함시키며, 점심 식사와 저녁 식사 사이에는 나머지 4가지의 활동 중에서 적어도 한 가지 활동을 반드시 포함시키도록 여행 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오.

유형 4 같은 것이 있는 순열의 활용 – 최단거리

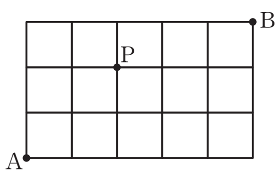
출제유형 | 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 제시된 도로망에서 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 조건에 맞게 최단거리로 가는 경로를 직사각형으로 나타낸 후 가로로 이동하는 횟수와 세로로 이동하는 횟수를 파악하여 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구한다. 필요한 경우 반드시 지나는 점을 파악하여 각각의 경우의 수를 구한 후 더한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 도로망을 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 2회, 위쪽으로 2회 가야 한다. 이 경우의 수는 오른쪽 가는 것을 a, 위쪽으로 가는 것을 b라 할 때, 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

P지점에서 B지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 3회, 위쪽으로 1회 가야 한다. 이 경우의 수는 위와 마찬가지로 4개의 문자 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

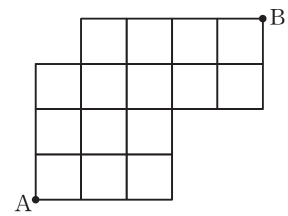
$6\times 4=24$

답 ⑤

15

▶ 20051-0228

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?

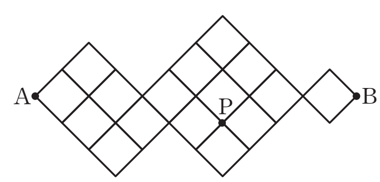


① 102 ② 104 ③ 106
④ 108 ⑤ 110

16

▶ 20051-0229

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



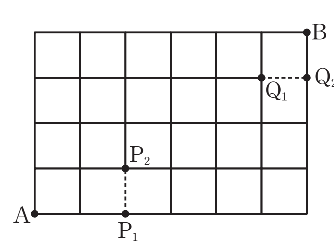
① 164 ② 166 ③ 168
④ 170 ⑤ 172

17

▶ 20051-0230

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 두 지점 P_1, P_2를 연결하는 도로와 두 지점 Q_1, Q_2를 연결하는 도로를 지날 수 없을 때, A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오.

(단, 4개의 지점 P_1, P_2, Q_1, Q_2는 지날 수 있다.)



유형 5 중복조합

출제유형 | 서로 다른 n개 중 중복을 허락하여 r개를 택하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 중복조합의 수를 정확히 이해하여 택하는 대상과 택하는 횟수를 파악한 후 중복조합의 수를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

서로 다른 종류의 사탕 3개와 같은 종류의 구슬 7개를 같은 종류의 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니에 사탕과 구슬이 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

출제 의도

중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

서로 다른 종류의 사탕 3개를 같은 종류의 주머니 3개에 각각 하나씩 넣는 경우의 수는 1이고, 사탕을 넣은 후부터 주머니는 구별할 수 있다. 이 주머니를 각각 A, B, C라 하자.
각 주머니에 구슬이 1개 이상씩 있어야 하므로 7개의 구슬 중 3개를 각각 하나씩 세 주머니에 넣는다.
남은 구슬 4개를 3개의 주머니 A, B, C에 담는 경우의 수는 서로 다른 3개의 주머니에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$
따라서 구하는 경우의 수는
$1\times15=15$

답 ⑤

18

▸ 20051-0231

같은 종류의 공책 9권을 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 학생 A가 2권 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 120　② 130　③ 140　④ 150　⑤ 160

19

▸ 20051-0232

무게가 모두 같은 설탕 6봉지와 소금 6봉지를 3개의 비어 있는 장바구니 A, B, C에 남김없이 나누어 담으려고 한다. 3개의 장바구니의 무게가 모두 같도록 나누어 담는 경우의 수는?
(단, 비어 있는 장바구니 A, B, C의 무게는 모두 같으며, 설탕끼리는 서로 구별하지 않고, 소금끼리도 서로 구별하지 않는다.)

① 15　② 17　③ 19　④ 21　⑤ 23

20

▸ 20051-0233

같은 종류의 연필 5자루와 서로 다른 색의 볼펜 2자루를 같은 종류의 비어 있는 필통 3개에 빈 필통이 없도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

유형 6 중복조합의 활용

출제유형 | 방정식을 만족시키는 정수해의 순서쌍의 개수를 구하거나 대소 관계로 정의된 정수해의 순서쌍의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 여러 조건을 고려하여 주어진 문제를 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수를 구하는 문제로 변형한다. 또한 대소 관계로 정의된 문제의 경우 등호를 포함하지 않은 부등호를 등호를 포함한 부등호로 변형하여 순서쌍의 개수를 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는? [4점]

(가) $n=1,\ 2,\ 3$일 때, $x_{n+1}-x_n\geq 2$이다.
(나) $x_4\leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

출제 의도

중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

조건 (가)에서
$x_2\geq x_1+2,\ x_3\geq x_2+2,\ x_4\geq x_3+2$이므로
$x_2+4\geq x_1+6,\ x_3+2\geq x_2+4,\ x_4\geq x_3+2$
따라서 $x_1+6\leq x_2+4\leq x_3+2\leq x_4$
이때 $x_1+6=a_1,\ x_2+4=a_2,\ x_3+2=a_3$이라 하면
$a_1,\ a_2,\ a_3$은 정수이고 $x_1\geq 0$에서 $a_1\geq 6$이며
조건 (나)에서 $x_4\leq 12$이므로
$6\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq x_4\leq 12$
위의 관계식을 만족시키는 정수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ x_4$의 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ x_4)$의 개수는 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수와 같고, 이는 6 이상 12 이하의 7개의 정수에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 ${}_7\mathrm{H}_4={}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}=210$

답 ①

21 ▸ 20051-0234

$0<a\leq b<c\leq d<10$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 310 ② 320 ③ 330
④ 340 ⑤ 350

22 ▸ 20051-0235

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) 어떤 자연수 n에 대하여 $f(3)=3n$이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\leq f(b)$이다.

23 ▸ 20051-0236

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

(가) $x+y+z=15$
(나) xy의 값은 0 또는 짝수이다.

① 104 ② 108 ③ 112
④ 116 ⑤ 120

24

▸ 20051-0237

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수는?

(가) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$
(나) $x_1+x_2\le 2$

① 78 ② 79 ③ 80
④ 81 ⑤ 82

25

▸ 20051-0238

다항식 $(x+y+z+w)^8$을 전개하여 정리하였을 때, xy를 인수로 갖지 않는 서로 다른 항의 개수는?

① 81 ② 83 ③ 85
④ 87 ⑤ 89

26

▸ 20051-0239

다음 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수 N의 개수는?

(가) 각 자리의 수의 합은 11이다.
(나) 5로 나누어떨어지지 않는다.

① 191 ② 193 ③ 195
④ 197 ⑤ 199

유형 7 이항정리

출제유형 | 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구하거나 항의 계수 사이의 관계식을 만족시키는 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | n이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 일반항 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$에서 조건을 만족시키는 r의 값을 구한 후 항의 계수를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

다항식 $(x+a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 40일 때, x의 계수는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

출제 의도

이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

다항식 $(x+a)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}a^r={}_5\mathrm{C}_r a^r x^{5-r}$
x^3의 계수는 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이고 x^3의 계수가 40이므로
${}_5\mathrm{C}_2 a^2=40$, $a^2=4$
x의 계수는 $5-r=1$, 즉 $r=4$일 때이므로
${}_5\mathrm{C}_4 a^4=5\times(a^2)^2=5\times 4^2=80$

답 ⑤

확률과 통계

27

▸ 20051-0240

다항식 $(3x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 185 ② 187 ③ 189 ④ 191 ⑤ 193

28

▸ 20051-0241

다항식 $(x+1)(2x+a)^6$의 전개식에서 x^6의 계수가 160일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

29

▸ 20051-0242

다항식

$$(x+2)+(x+2)^2+(x+2)^3+(x+2)^4+(x+2)^5$$

의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 111 ② 112 ③ 113 ④ 114 ⑤ 115

30

▸ 20051-0243

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 x^4의 계수가 서로 같을 때, a^2의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

31

▸ 20051-0244

$\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수가 5일 때, $60a$의 값을 구하시오. (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

32

▸ 20051-0245

$\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 x항이 존재하도록 하는 모든 자연수 n을 크기가 작은 것부터 크기순으로 n_1, n_2, n_3, $\cdots$이라 하고 $n=n_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때 x의 계수를 a_i라 하자. a_1+a_2의 값을 구하시오.

유형 8 이항정리의 활용

출제유형 | 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$의 전개식에서 얻을 수 있는 이항계수의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음 식을 유도하는 과정을 기억하며 활용한다.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) ${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$ (단, n은 홀수)

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ (단, n은 짝수)

(4) ${}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{n-1}=2^{2n-2}$

${}_{2n-1}C_n+{}_{2n-1}C_{n+1}+{}_{2n-1}C_{n+2}+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1}=2^{2n-2}$

필수 유형 [2010학년도 대수능 6월 모의평가]

50 이하의 자연수 n 중에서 $\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

출제 의도

이항계수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k&={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n\\&=({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)-{}_nC_0\\&=2^n-1\end{aligned}$$

2^n-1이 3의 배수가 되기 위해서는 2^n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 1이어야 한다.

2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, $\cdots$, 2^{49}, 2^{50}을 3으로 나누었을 때의 나머지는 각각 2, 1, 2, 1, 2, 1, $\cdots$, 2, 1이므로 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 2^2, 2^4, 2^6, $\cdots$, 2^{50}이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 4, 6, $\cdots$, 50의 25개이다.

답 25

33

▸ 20051-0246

$\log_4({}_{16}C_1+{}_{16}C_2+{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{15}+2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

34

▸ 20051-0247

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}C_{2k-1}$이라 할 때, 부등식 $90<f(n+1)-f(n)<9000$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

35

▸ 20051-0248

자연수 n에 대하여 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n-1}$의 전개식에서 x^{2k-1} $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 계수를 a_k라 할 때, $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하자. $\log_8 f(n)=100$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

확률과 통계

08 확률

1 시행과 사건

(1) **시행** : 동일한 조건에서 여러 번 반복할 수 있고, 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰

(2) **표본공간** : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과들의 집합

참고 표본공간(sample space)은 보통 S로 나타내고, 공집합이 아닌 경우만 다룬다.

(3) **사건** : 표본공간의 부분집합

(4) **근원사건** : 한 개의 원소로 이루어진 사건

2 여러 가지 사건

표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여

(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$로 나타낸다.

(2) 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$로 나타낸다.

(3) 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 두 사건 A, B는 서로 배반이라 하고, 이 두 사건을 서로 배반사건이라고 한다.

예 하나의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 5의 약수인 눈이 나오는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 동시에 일어날 수 없다. 즉, $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반이고, 이 두 사건은 서로 배반사건이다.

(4) 표본공간 S의 부분집합인 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

참고 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 두 사건 A, A^C은 서로 배반사건이다.

3 확률

(1) **수학적 확률** : 어떤 시행의 표본공간 S가 유한개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률을 기호로 $\mathrm{P}(A)$와 같이 나타내고, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$로 정의한다.

(2) **통계적 확률** : 같은 조건에서 동일한 시행을 n회 반복하였을 때, 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 이 값 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 한다.

참고 통계적 확률을 구할 때 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다. 또한 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

4 확률의 기본 성질

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$이다.

(2) 표본공간 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$이다.

(3) 절대로 일어날 수 없는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이다.

5 확률의 덧셈정리

(1) 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

6 여사건의 확률

사건 A의 여사건 A^C의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

7 조건부확률

표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$인 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

참고 표본공간에 속하는 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

8 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

참고 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

9 사건의 독립과 종속

(1) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는 확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다. 즉, 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다.

참고 ① 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$일 때에도 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

② $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이면 다음 각 두 사건도 서로 독립이다.

(i) 두 사건 A^C과 B (ii) 두 사건 A와 B^C (iii) 두 사건 A^C과 B^C

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A, B는 서로 종속이라고 한다. 즉, 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 종속이라고 한다.

10 두 사건이 서로 독립이기 위한 조건

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

11 독립시행의 확률

(1) **독립시행** : 주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 동일한 조건에서 어떤 시행을 반복할 때 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 주지 않을 경우, 즉 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) **독립시행의 확률** : 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r} \text{ (단, } r\text{는 0 이상 } n \text{ 이하의 정수이다.)}$$

확률과 통계

유형 1 수학적 확률

출제유형 | 수학적 확률을 이해하고 경우의 수를 구하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같다고 판단될 때, 표본공간 S의 원소의 개수와 사건 A의 원소의 개수를 모두 구한 후 수학적 확률의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$에 대하여 $f(a)f(b)<0$이 성립할 확률은? [4점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

출제 의도

확률의 뜻을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 확률을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
$f(x)=x^2-7x+10=(x-2)(x-5)=0$에서
$x=2$ 또는 $x=5$
즉, $x<2$ 또는 $x>5$일 때, $f(x)>0$
$f(2)=f(5)=0$
$2<x<5$일 때, $f(x)<0$이다.
$f(a)f(b)<0$이 되려면 a, b 중 하나는 1 또는 6이 나오고 다른 하나는 3 또는 4가 나와야 하므로 $f(a)f(b)<0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(1, 3)$, $(1, 4)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$,
$(3, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$
의 8개이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

답 ④

01 ▸ 20051-0249

두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 두 눈의 수의 곱이 4의 배수일 확률은?

① $\frac{13}{36}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{17}{36}$
④ $\frac{19}{36}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

02 ▸ 20051-0250

주머니에 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 카드를 한 장씩 두 번 꺼내어 카드에 적힌 수를 차례로 a, b라 할 때, $a+b$의 값이 짝수일 확률은? (단, 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

03 ▸ 20051-0251

전체집합 $U=\{1, 2, 3\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 택할 때, 택한 두 집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

유형 2 순열의 수를 이용한 확률

출제유형 | 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 구하는 문제가 출제된다.

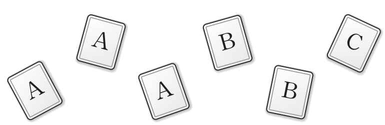
출제유형잡기 | 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이용하여 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수와 사건이 일어나는 경우의 수를 구한 후 확률을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열될 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$



출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

A가 적혀 있는 카드 3장, B가 적혀 있는 카드 2장, C가 적혀 있는 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열하는 경우의 수는 A가 적힌 카드 1장, B가 적힌 카드 2장, C가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

답 ②

04

▶ 20051-0252

주머니에 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 공 3개와 문자 A, B가 각각 하나씩 적힌 공 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 1개씩 모두 꺼내어 꺼낸 순서대로 왼쪽부터 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이고 3이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 오른쪽에 놓이며, A가 적힌 공은 B가 적힌 공보다 왼쪽에 놓일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

05

▶ 20051-0253

한 개의 주사위를 4번 던질 때 3의 배수의 눈이 2회만 나오면서 연속으로 나올 확률은?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

06

▶ 20051-0254

선생님 2명과 1학년 학생 1명, 2학년 학생 3명이 모두 원 모양의 식탁에 일정한 간격으로 놓인 의자 6개에 임의로 앉을 때, 1학년 학생이 적어도 1명의 선생님과 이웃하여 앉을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

유형 3 조합의 수를 이용한 확률

출제유형 | 조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구한 후 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 조합, 중복조합을 이용하여 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수와 제시된 사건이 일어나는 경우의 수를 구한 후 확률을 구한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이려면 흰 공 2개 중에서 2개의 공을 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_2C_2=1$

따라서 구하는 확률이 $\frac{1}{15}$이므로

$p=15$, $q=1$

즉, $p+q=15+1=16$

답 16

07

▸ 20051-0255

주머니에 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

08

▸ 20051-0256

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 공을 임의로 3개의 상자 A, B, C에 각각 2개씩 넣을 때, 상자 A에 넣는 2개의 공에 적힌 두 자연수가 서로소일 확률은?

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{23}{30}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

09

▸ 20051-0257

한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a\le b<c$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10

▸ 20051-0258

1학년 3명, 2학년 3명, 3학년 3명이 있는 수학 동아리에서 임의로 대표 4명을 뽑을 때, 각 학년별로 대표가 한 명 이상씩 뽑힐 확률은?

① $\frac{13}{21}$　② $\frac{79}{126}$　③ $\frac{40}{63}$
④ $\frac{9}{14}$　⑤ $\frac{41}{63}$

11

▸ 20051-0259

집합 $X=\{0, 1, 2, 3\}$에서 집합 X로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 f라 할 때, 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

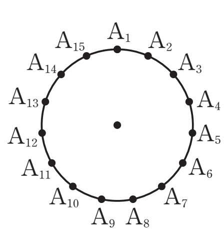
(가) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) $f(k)=0$을 만족시키는 집합 X의 원소 k가 존재한다.

① $\frac{1}{64}$　② $\frac{1}{32}$　③ $\frac{3}{64}$
④ $\frac{1}{16}$　⑤ $\frac{5}{64}$

12

▸ 20051-0260

그림과 같이 원 둘레에 15개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_{15}가 일정한 간격으로 있다. 이 15개의 점에서 임의로 3개를 동시에 선택할 때, 선택한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부에 원의 중심이 존재할 확률은?



① $\frac{25}{91}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{27}{91}$
④ $\frac{4}{13}$　⑤ $\frac{29}{91}$

유형 4 확률의 덧셈정리

출제유형 | 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

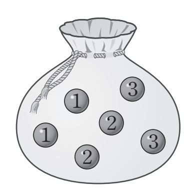
출제유형잡기 | 주어진 사건의 확률 또는 경우의 수를 한 번에 구하기 어려운 경우, 사건이 일어날 경우를 몇 가지로 나누고 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구한다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용하고, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형　| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, k $(1\le k\le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$m=a_1\times 100+a_2\times 10+a_3$,
$n=a_4\times 100+a_5\times 10+a_6$

이라 할 때, $m>n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



출제 의도

확률의 덧셈정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

6개의 공을 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!}=90$

$m>n$이려면 $a_1>a_4$ 또는 $a_1=a_4$, $a_2>a_5$이어야 한다.

(i) $a_1>a_4$인 경우
3개의 수 1, 2, 3 중 서로 다른 2개를 택하여 크기가 큰 수를 a_1로 놓으면 되므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
위의 각각의 경우에 대하여 나머지 4개의 수는 위에서 택한 2개의 수가 각각 하나씩, 위에서 택하지 않은 수가 2개 있으므로 이것을 a_2, a_3, a_5, a_6으로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3\times 12}{90}=\frac{2}{5}$

(ii) $a_1=a_4$, $a_2>a_5$인 경우
$a_1=a_4$인 수를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
위의 각각의 경우에 대하여 남은 두 수 중 큰 수를 a_2로 놓으면

확률과 통계

되므로 $a_2>a_5$인 경우의 수는 1

위의 각각의 경우에 대하여 남은 서로 다른 2개의 수를 a_3, a_6에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3\times1\times2}{90}=\dfrac{1}{15}$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{7}{15}$

따라서 $p=15$, $q=7$이므로 $p+q=15+7=22$

답 22

13

▸ 20051-0261

두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{7}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\dfrac{2}{7}$ ② $\dfrac{3}{7}$ ③ $\dfrac{4}{7}$

④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ $\dfrac{6}{7}$

14

▸ 20051-0262

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{2}{15}$ ③ $\dfrac{1}{6}$

④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{30}$

15

▸ 20051-0263

두 학생 A, B를 포함한 7명의 학생을 임의로 3명과 4명의 2개 조로 편성하려고 한다. 두 학생 A, B가 같은 조에 편성될 확률은?

① $\dfrac{3}{7}$ ② $\dfrac{7}{14}$ ③ $\dfrac{4}{7}$

④ $\dfrac{9}{14}$ ⑤ $\dfrac{5}{7}$

16

▸ 20051-0264

주머니에 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 하나씩 두 번 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b라 하자. $10a+b$의 값이 짝수이거나 3의 배수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\dfrac{11}{20}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{13}{20}$

④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

17

▸ 20051-0265

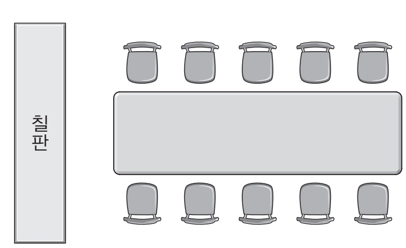
6개의 자연수 1, 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 임의로 나열할 때, k번째에 나열된 자연수를 a_k라 하자. $a_1=1$ 또는 $a_2=2$를 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

18

▸ 20051-0266

그림과 같이 칠판에 수직으로 놓인 책상의 양쪽에 각각 5개씩의 의자가 서로 마주 보며 놓여 있다. 4명의 학생이 10개의 자리 중 임의로 4개를 택해 앉을 때, 어느 누구도 서로 이웃하여 앉지 않을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 마주 보고 앉는 경우는 서로 이웃하는 경우에 포함되지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



유형 5 여사건의 확률

출제유형 | 여사건을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 사건 A가 일어나는 확률보다 사건 A의 여사건 A^C이 일어나는 확률을 구하는 것이 더 간편할 때, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용하여 문제를 해결한다. 특히 구하고자 하는 사건에 '적어도', '이상', '많아야', '이하' 등의 표현이 있을 때, 여사건을 이용하면 편리한 경우가 많다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

어느 지구대에서는 학생들의 안전한 통학을 위한 귀가도우미 프로그램에 참여하기로 하였다. 이 지구대의 경찰관은 모두 9명이고, 각 경찰관은 두 개의 근무조 A, B 중 한 조에 속해 있다. 이 지구대의 근무조 A는 5명, 근무조 B는 4명의 경찰관으로 구성되어 있다. 이 지구대의 경찰관 9명 중에서 임의로 3명을 동시에 귀가도우미로 선택할 때, 근무조 A와 근무조 B에서 적어도 1명씩 선택될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

출제 의도

여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

전체 9명 중에서 귀가도우미 3명을 선택하는 모든 경우의 수는

$_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

근무조 A에서만 3명을 선택하는 경우의 수는

$_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

근무조 B에서만 3명을 선택하는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{10+4}{84}=\frac{5}{6}$

답 ⑤

19

▶ 20051-0267

사진 동아리에는 남학생 4명과 여학생 5명이 있다. 이 9명의 학생들 중 임의로 3명씩 두 조를 편성하여 각각 A지역과 B지역으로 사진을 찍으러 가려고 한다. 이때 두 지역으로 사진을 찍으러 가는 각각의 조에 남학생이 적어도 1명씩 속하도록 조를 편성할 확률은?

① $\frac{31}{42}$ ② $\frac{16}{21}$ ③ $\frac{11}{14}$ ④ $\frac{17}{21}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

20

▶ 20051-0268

빨간 공 2개, 파란 공 2개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 색의 공끼리는 서로 이웃하지 않을 확률은? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① $\frac{11}{30}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{13}{30}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

21

▶ 20051-0269

주머니에 1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 공 8개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 공에 적힌 수 중 큰 수를 a, 작은 수를 b라 하자. 곡선 $y=x^2-ax+b$와 직선 $y=x-4$가 만날 확률은?

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

확률과 통계

유형 6 조건부확률의 계산

출제유형 | 조건부확률의 정의를 이용하여 확률의 값을 구하는 계산 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 조건부확률의 정의를 정확히 이해하고, 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률 등을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{7}{15}$　③ $\frac{8}{15}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{2}{3}$

출제 의도

조건부확률의 정의를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

조건부확률의 정의에 의해

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 ④

22 ▸ 20051-0270

두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 사건 A가 일어날 확률은?

(가) 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

(나) 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{5}{9}$

23 ▸ 20051-0271

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(B^C|A)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

24 ▸ 20051-0272

두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B 중 적어도 한 사건이 반드시 일어난다.

(나) $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, A^C은 A의 여사건이다.)

보기

ㄱ. $\mathrm{P}(B|A^C)=1$

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$

ㄷ. $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{2}{3}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 7 표를 이용한 조건부확률의 계산

출제유형 | 주어진 상황이 표로 제시되어 있거나 주어진 상황을 표로 정리하여 조건부확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 표본공간에 속하는 각 근원사건들의 확률이 모두 같을 때, 다음과 같이 사건에 속하는 원소의 개수를 이용하여 조건부확률을 간단하게 구할 수 있다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

어느 인공지능 시스템에 고양이 사진 40장과 강아지 사진 40장을 입력한 후, 이 인공지능 시스템이 각각의 사진을 인식하는 실험을 실시하여 다음 결과를 얻었다.

(단위: 장)

입력 \ 인식	고양이 사진	강아지 사진	합계
고양이 사진	32	8	40
강아지 사진	4	36	40
합계	36	44	80

이 실험에서 입력된 80장의 사진 중에서 임의로 선택한 1장이 인공지능 시스템에 의해 고양이 사진으로 인식된 사진일 때, 이 사진이 고양이 사진일 확률은? [4점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

출제 의도

주어진 상황이 표로 주어져 있을 때, 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

80장의 사진 중 1장을 선택할 때 각 사진이 선택될 확률은 모두 같으므로 다음과 같이 조건부확률을 구할 수 있다.

전체 사진 80장의 집합을 S라 하고, 고양이 사진으로 인식되는 사진의 집합을 A, 실제 고양이 사진의 집합을 B라 하면 주어진 표에서 $n(A)=36$, $n(A\cap B)=32$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$$

답 ⑤

25
▶ 20051-0273

어느 지역의 주민 중 남자 150명, 여자 180명을 대상으로 체육관 신규 건립에 대한 의견을 조사한 결과가 표와 같았다.

(단위: 명)

찬반 \ 성별	남자	여자	합계
찬성	100	80	180
반대	50	100	150
합계	150	180	330

조사 대상인 330명 중에서 임의로 선택한 1명이 체육관 신규 건립을 찬성한 사람일 때, 이 사람이 여자일 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{18}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

26
▶ 20051-0274

어느 학교 학생 150명을 대상으로 세 과목 '확률과 통계', '미적분', '기하'에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 세 과목 중 하나만 선택하였고, 각 과목을 선택한 인원수는 다음과 같다.

(단위: 명)

성별 \ 과목	확률과 통계	미적분	기하
남학생	30	25	25
여학생	30	25	15

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 미적분을 선택하지 않은 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

27
▶ 20051-0275

어느 상자에는 110개의 공이 들어 있는데, 각 공에는 빨간 색 또는 파란 색 중에서 한 가지 색이 칠해져 있고, 1 또는 2 중에서 한 개의 숫자가 적혀 있다. 이 상자에 들어 있는 빨간 공은 50개이고, 빨간 공의 40 %에는 숫자 1이 적혀 있다. 또 이 상자에 들어 있는 공 중에서 임의로 뽑은 한 개의 공에 숫자 1이 적혀 있을 때, 이 공이 파란 공일 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 이 상자에 들어 있는 공 중에서 숫자 2가 적혀 있는 공의 개수를 구하시오.

유형 8 조건부확률의 활용

출제유형 | 다양한 상황에서 조건부확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | '사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률'을 구하는 문제는 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 구한 다음 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$임을 이용하여 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 m, n이라 하자. 이 시행에서 $2m\geq n$일 때, 꺼낸 흰 공의 개수가 2일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

주어진 상황을 파악하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

이 시행에서 $2m\geq n$인 사건을 A, 꺼낸 흰 공의 개수가 2인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때 $m+n=3$이므로 $2m\geq n$, 즉 $2m\geq 3-m$에서 $m\geq 1$이어야 한다.

(i) $m=1$, $n=2$일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$$

(ii) $m=2$, $n=1$일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$$

(iii) $m=3$, $n=0$일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{31}{35}$$

(ii)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{12}{35}$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{31}{35}}=\frac{12}{31}$$

따라서 $p+q=31+12=43$

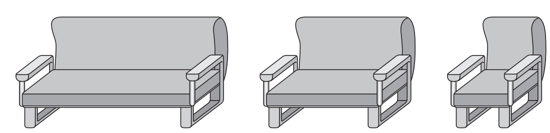
답 43

28 ▸ 20051-0276

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 적어도 한 번 나올 때, 6의 눈이 두 번 나올 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

29 ▸ 20051-0277

그림과 같이 3인용, 2인용, 1인용 의자가 각각 한 개씩 놓여 있다.



이 6개의 자리에 A, B를 포함한 6명이 임의로 한 명씩 앉기로 한다. A, B가 같은 의자에 서로 이웃하여 앉을 때, A, B가 3인용 의자에 앉을 확률은?

① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{7}{15}$ ③ $\dfrac{8}{15}$ ④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

30 ▸ 20051-0278

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 숫자 4, 5, 6이 각각 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행에서 나온 4개의 공에 적힌 숫자가 모두 다를 때, 검은 공이 2개 나올 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 9 확률의 곱셈정리

출제유형 | 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 사건 A, B $(\mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$가 동시에 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

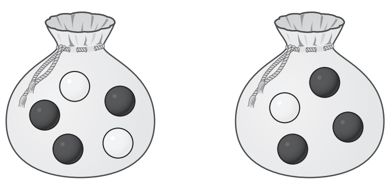
또는 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

임을 이용하여 구한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 |

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$



출제 의도

두 사건에 대하여 확률의 곱셈정리를 적용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하자.

주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 공도 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

답 ⑤

31 ▶ 20051-0279

숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 빨간 카드 3장과 숫자 4, 5, 6이 각각 하나씩 적혀 있는 노란 카드 3장이 있다. 주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수가 2 이하이면 빨간 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 택하고, 3 이상이면 노란 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 택할 때, 택한 카드에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

32 ▶ 20051-0280

A는 주사위 1개를 던지고, B는 주사위 2개를 동시에 던진다. A가 던진 주사위에서 나온 눈의 수를 a라 하고, B가 던진 주사위에서 나온 두 눈의 수의 차를 b라 하자. $b\geq 2a$가 성립할 확률은?

① $\frac{13}{108}$ ② $\frac{7}{54}$ ③ $\frac{5}{36}$
④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{17}{108}$

33 ▶ 20051-0281

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 A가 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 다음, 상자에 남아 있는 공 중에서 B가 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, A가 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 두 번째로 큰 수가 B가 꺼낸 공에 적혀 있는 수보다 클 확률은?

(단, 꺼낸 공은 상자에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

유형 10 서로 독립인 사건의 확률의 계산

출제유형 | 서로 독립인 두 사건에 대한 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 사건 A, B $(\mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$가 서로 독립일 때, 다음을 이용한다.

(1) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

(2) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(3) 두 사건 A와 B^C, 두 사건 A^C과 B, 두 사건 A^C과 B^C도 각각 서로 독립이다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

출제 의도

확률의 덧셈정리와 두 사건이 서로 독립일 조건을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 확률의 덧셈정리에 의해

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 $\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

답 ③

34 ▸ 20051-0282

두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{4}$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

35 ▸ 20051-0283

주머니 A에는 빨간 공 2개와 파란 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있다. 재호는 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고 희재는 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 두 사람 모두 빨간 공만을 꺼낼 확률은 p이다. $100p$의 값을 구하시오.

36 ▸ 20051-0284

다음은 어느 학교 남학생 180명과 여학생 100명을 대상으로 개와 고양이 중에서 반려동물로 선호하는 동물을 조사한 표이다.

(단위: 명)

학생 \ 반려동물	개	고양이
남학생	108	72
여학생	k	$100-k$

조사 대상 중 임의로 선택한 한 명이 남학생인 사건과 임의로 선택한 한 명이 개를 선호하는 학생인 사건이 서로 독립일 때, k의 값을 구하시오. (단, 조사 대상인 모든 학생은 개와 고양이 중에서 반려동물로 선호하는 동물이 오직 하나이다.)

유형 11 독립시행의 확률

출제유형 | 동일한 시행을 반복하는 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은
${}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q=1-p$, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)
임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은? [3점]

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

출제 의도

독립시행의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.
한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은
${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$

답 ①

37

▸ 20051-0285

한 개의 동전을 5회 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 홀수일 확률은?

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

38

▸ 20051-0286

주사위 A를 4번 던질 때 짝수의 눈이 나오는 횟수를 a라 하고, 주사위 B를 3번 던질 때 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 b라 하자. $a=2b>0$일 확률은?

① $\frac{1}{45}$ ② $\frac{2}{45}$ ③ $\frac{1}{15}$
④ $\frac{4}{45}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

39

▸ 20051-0287

log 4가 적혀 있는 카드 1장과 log 5가 적혀 있는 카드 2장이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 뽑아 카드에 적힌 수를 종이에 적고 뽑은 카드를 다시 주머니에 넣는 시행을 6회 반복할 때, 종이에 적힌 6개의 수를 모두 더한 값이 자연수가 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

09 통계

1 확률변수와 이산확률분포

(1) 확률변수 : 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수를 대응시키는 관계를 확률변수라고 한다.

(2) 이산확률변수의 확률분포

① 확률변수 X가 갖는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 일일이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.

② 이산확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

③ 이산확률변수 X가 갖는 모든 값 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n에 X가 이 값들을 가질 확률 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n이 각각 대응할 때, 이 대응을 이산확률변수 X의 확률분포라고 하며, 이 대응 관계를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$를 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

(3) 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① $0\le p_i \le 1$

② $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

③ $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, i, $j=1$, 2, $\cdots$, n, $i\le j$이고 $x_1<x_2<\cdots<x_n$이다.)

(4) 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① 기댓값(평균) : $\mathrm{E}(X)=m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

② 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

(5) 확률변수 $aX+b$의 기댓값(평균), 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 임의의 두 상수 a, b $(a\ne 0)$에 대하여

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

2 이항분포

(1) 이항분포 : 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\ (q=1-p,\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다. 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고 기호로 $\mathrm{B}(n, p)$와 같이 나타낸다.

(2) 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때 (단, $q=1-p$)

① $\mathrm{E}(X)=np$

② $\mathrm{V}(X)=npq$

③ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

3 연속확률변수의 확률분포

(1) **연속확률변수** : 길이, 무게, 시간 등과 같이 어떤 구간에 속하는 모든 실수를 값으로 갖는 확률변수 X를 연속확률변수라고 한다.

(2) **확률밀도함수** : $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수를 값으로 갖는 연속확률변수 X에 대하여 다음과 같은 성질을 갖는 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

① $f(x) \ge 0$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

③ 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

4 정규분포

(1) **정규분포** : 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (x는 모든 실수, m은 상수, σ는 양의 상수, e는 2.718…인 무리수)

일 때, 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

(2) **정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프의 성질**

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.

② 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

③ 표준편차 σ가 일정할 때, 평균 m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 그래프의 모양은 변하지 않는다.

④ 평균 m이 일정할 때, 표준편차 σ의 값이 커지면 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 양쪽으로 넓게 퍼진다.

(3) **표준정규분포** : 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(0, 1)$과 같이 나타낸다.

(4) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(5) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

5 표본평균의 분포

(1) **표본평균** : 어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다.

(2) **표본평균 $\overline{X}$의 성질** : 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

6 모평균의 추정

(1) **추정** : 표본에서 얻은 정보를 이용하여 모평균과 같은 모집단의 특성을 추측하는 것을 추정이라고 한다.

(2) **모평균의 신뢰구간** : 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

유형 1 이산확률변수의 확률분포

출제유형 | 이산확률변수의 확률질량함수의 뜻과 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

(1) $0\le p_i\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$

(단, $i, j=1, 2, \cdots, n$, $i\le j$이고 $x_1<x_2<\cdots<x_n$이다.)

필수 유형 | 2005학년도 대수능 |

이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} c & (x=0,\ 1,\ 2) \\ 2c & (x=3,\ 4,\ 5) \\ 5c^2 & (x=6,\ 7) \end{cases} \text{ (단, } c\text{는 양수)}$$

이다. 확률변수 X가 6 이상일 사건을 A, 확률변수 X가 3 이상일 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

출제 의도

이산확률변수의 확률질량함수의 성질을 이해하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sum_{x=0}^{7}\mathrm{P}(X=x)=3c+3\times 2c+2\times 5c^2=1$에서

$10c^2+9c-1=(10c-1)(c+1)=0$

c는 양수이므로 $c=\frac{1}{10}$

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{10} & (x=0,\ 1,\ 2) \\ \frac{1}{5} & (x=3,\ 4,\ 5) \\ \frac{1}{20} & (x=6,\ 7) \end{cases}$$

이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X\ge 3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X\ge 6)=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{1}{7}$

답 ③

01

▸ 20051-0288

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{12}$	1

$\mathrm{P}(0<X\le 2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

02

▸ 20051-0289

이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이고, 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(X=k)=an(n+1)$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

03

▸ 20051-0290

이산확률변수 X가 갖는 값은 -1, 0, 1, 2이고

$$\mathrm{P}(X=x)=ax^2+\frac{1}{12}\ (x=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

가 성립한다. $Y=X^2-2$라 할 때, 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-2	-1	b	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	c	d	e	1

$\frac{d}{ab}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

유형 2 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 이산확률변수의 확률분포를 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

(1) 기댓값(평균) : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

(2) 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\ (k=1, 2, 3, 4, 5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(Y)=a$이다. $8a$의 값을 구하시오.

[4점]

출제 의도

확률질량함수의 관계를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)=4$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{5}k\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k\\&=\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{10}\times\frac{5\times6}{2}\\&=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로

$8a=8\times\frac{7}{2}=28$

답 28

04

▶ 20051-0291

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같을 때, X의 기댓값은?

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a	1

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

05

▶ 20051-0292

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{4}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

06

▶ 20051-0293

이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고,

$$\mathrm{P}(X=n)=n\mathrm{P}(X=n-1)\ (n=1, 2, 3)$$

이 성립할 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{51}{50}$ ③ $\frac{103}{100}$ ④ $\frac{26}{25}$ ⑤ $\frac{21}{20}$

07

▸ 20051-0294

숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 차를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{13}{15}$ ② $\frac{14}{15}$ ③ 1 ④ $\frac{16}{15}$ ⑤ $\frac{17}{15}$

08

▸ 20051-0295

상자 A에는 3개의 공이 들어 있고, 상자 B에는 2개의 공이 들어 있다. 두 상자 중에서 임의로 한 상자를 선택하고 그 상자에 들어 있는 공 중에서 1개를 꺼내 다른 상자에 넣은 다음, 다시 두 상자 중에서 임의로 한 상자를 선택한다. 두 번째에 선택한 상자에 들어 있는 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, 상자는 A, B 두 개뿐이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

09

▸ 20051-0296

모든 세 자리의 자연수 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 그 수의 각 자리 숫자 중 5의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 선택된 수가 595이면 $X=2$이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 3 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차와 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차의 관계를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-5	0	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

$\mathrm{E}(4X+3)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

확률변수 X의 평균을 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 표에서

$\mathrm{E}(X)=-5\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{5}=-1+3=2$

이므로

$\mathrm{E}(4X+3)=4\mathrm{E}(X)+3=4\times2+3=11$

답 11

10

▸ 20051-0297

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(2X)=8$일 때, $\mathrm{E}(X+8)$의 값을 구하시오.

11

▸ 20051-0298

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

$\mathrm{E}(X)=0$일 때, $\mathrm{V}(aX+b)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

12

▸ 20051-0299

A, B, C를 포함한 5명을 임의로 일렬로 세울 때, B와 C 두 명 중에서 A와 이웃하는 사람의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(aX+a)=90$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 50　② 60　③ 70　④ 80　⑤ 90

유형 4 이항분포

출제유형 | 이항분포를 따르는 확률변수의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때

(1) 확률질량함수 : $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$

$(q=1-p,\ x=0, 1, 2, \cdots, n)$

(2) $\mathrm{E}(X)=np$

(3) $\mathrm{V}(X)=npq$

(4) $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

이항분포를 따르는 확률변수 X의 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

따라서 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=\frac{n}{16}=5$이므로

$n=80$

답 80

확률과 통계

13

▸ 20051-0300

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $\sigma(2X)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

14

▸ 20051-0301

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{5}\right)$를 따르고

$$\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{1}{3}$$

일 때, n의 값을 구하시오. (단, $n\geq2$)

15

▸ 20051-0302

흰 공 2개와 검은 공 n $(n\geq2)$개가 들어 있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 다음 다시 상자에 넣는 시행을 10회 반복할 때, 흰 공이 나온 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)=\frac{20}{9}$일 때, n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

16

▸ 20051-0303

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $X\leq2$인 사건을 A, $X\geq2$인 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(A|B)$의 값은?

① $\frac{6}{11}$ ② $\frac{13}{22}$ ③ $\frac{7}{11}$
④ $\frac{15}{22}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

17

▸ 20051-0304

이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고

$$\mathrm{P}(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\times\frac{2^r}{27}\ (r=0, 1, 2, 3)$$

이 성립한다. $\mathrm{E}(3X^2)$의 값을 구하시오.

18

▸ 20051-0305

전구 2개와 스위치 1개가 있다. 모든 전구가 꺼져 있는 상태에서 스위치를 한 번 누르면 전구 1개가 켜지고 한 번 더 누르면 나머지 1개의 전구도 켜지며 한 번 더 누르면 모든 전구가 꺼진다고 한다. 주사위 한 개를 던질 때마다 다음과 같은 시행을 한다.

> 모든 전구를 끈 상태에서 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 k $(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$이면 스위치를 k번 누르고 마지막에 켜져 있는 전구의 개수를 조사한다.

이와 같은 시행을 10회 반복하였을 때, 2개의 전구가 모두 켜진 결과가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 5 연속확률변수와 확률밀도함수

출제유형 | 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 이해하여 미지수나 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수를 값으로 갖는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때

(1) $f(x) \ge 0$ $(\alpha \le x \le \beta)$

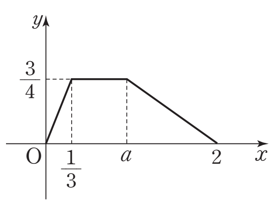
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

출제 의도

확률밀도함수의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구하고 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$0 \le x \le 2$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \left(a-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times (2-a) \times \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{3}{8}a + \frac{5}{8} = 1,\ a=1$$

이때 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{3}$, $x=a$로 둘러싸인 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le 1\right) = \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ④

19

▸ 20051-0306

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 2$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \le x < 1) \\ a & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

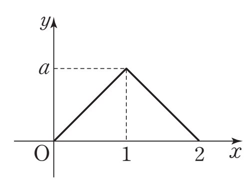
일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

20

▸ 20051-0307

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 $f(t) = \mathrm{P}(t \le X \le t+1)$이라 할 때, 함수 $f(t)$의 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

21

▸ 20051-0308

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 3$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(3-x) = f(3+x)$$

를 만족시킨다. $\mathrm{P}(1 \le X \le 3) = 2 \times \mathrm{P}(5 \le X \le 6)$일 때, $\mathrm{P}(1 \le X \le 5)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

확률과 통계

유형 6 정규분포

출제유형 | 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 표준정규분포를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12)-\mathrm{P}(X \le m-12)=0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

출제 의도

정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m \le X \le m+12)-\mathrm{P}(X \le m-12)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{(m+12)-m}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z \le \frac{(m-12)-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z \le -\frac{12}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right)=0.3664$ …… ㉠

한편, $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 0)=0.5$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2 \times \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)-0.5=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

즉, $\frac{12}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=\frac{12}{1.5}=8$

답 ③

22

▸ 20051-0309

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(-1 \le Z \le -0.5)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0919 ③ 0.1498 ④ 0.2417 ⑤ 0.5328

23

▸ 20051-0310

정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(|X-20| \le 6)=2 \times \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$$

일 때, $\mathrm{P}(18 \le X \le 24)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, σ는 양수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

24

▸ 20051-0311

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르고

$$\mathrm{P}(X \le m-4)=\mathrm{P}(X \ge 2m-4)$$

를 만족시킨다. $\mathrm{P}(4 \le X \le 6)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1359 ② 0.1498 ③ 0.2417 ④ 0.6247 ⑤ 0.8185

유형 7 정규분포의 활용

출제유형 | 실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

필수 유형

| 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

어느 공항에서 처리되는 각 수하물의 무게는 평균이 18 kg, 표준편차가 2 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항에서 처리되는 수하물 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 이 수하물의 무게가 16 kg 이상이고 22 kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

출제 의도

실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

수하물 1개의 무게를 확률변수 X(kg)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18, 2^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{X-18}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(16\le X\le 22)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{16-18}{2}\le\frac{X-18}{2}\le\frac{22-18}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ④

25

▸ 20051-0312

어느 농장에서 수확한 참외 한 개의 무게는 평균이 350 g, 표준편차가 25 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 수확한 참외 중에서 임의로 선택한 참외 1개의 무게가 300 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

26

▸ 20051-0313

어느 회사의 각 직원이 하루 근무시간 동안 휴식을 취하는 시간은 평균이 43분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사 직원 중 임의로 선택한 1명이 하루 근무시간 동안 휴식을 취한 시간이 a분 이하일 확률이 0.9772일 때, a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

27

▸ 20051-0314

어느 도시의 남자 고등학생 5000명을 대상으로 키를 조사하였더니 평균이 174 cm, 표준편차가 5 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 5000명의 키를 큰 값부터 크기순으로 나열할 때, 1500번째 이내에 들기 위한 키의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.52	0.20
0.67	0.25
0.84	0.30

① 176.6 cm ② 177 cm ③ 177.4 cm
④ 177.8 cm ⑤ 178.2 cm

확률과 통계

유형 8 이항분포와 정규분포의 관계

출제유형 | 시행횟수가 충분히 큰 이항분포에서의 확률을 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.
(단, $q=1-p$)

필수 유형

| 2007학년도 대수능 |

어느 문구점에 진열되어 있는 공책 중 10 %는 A 회사의 제품이라고 한다. 한 고객이 이 문구점에서 임의로 100권의 공책을 구입했을 때, A 회사 제품이 13권 이상 포함될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.75	0.2734
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332

① 0.0668 ② 0.1056 ③ 0.1587
④ 0.2266 ⑤ 0.2734

출제 의도

이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

100권의 공책 중 A 회사 제품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times0.1\times0.9=9$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{X-10}{3}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge13)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{13-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

28 ▸ 20051-0315

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{3}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(900\le X\le915)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1915 ② 0.2857 ③ 0.3413
④ 0.4332 ⑤ 0.4772

29 ▸ 20051-0316

$\displaystyle\sum_{k=48}^{57}{}_{192}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{192-k}$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.1915 ② 0.3413
③ 0.4332 ④ 0.4772
⑤ 0.4938

30 ▸ 20051-0317

720명의 학생이 각자 네 문자 A, B, C, D 중에서 서로 다른 2개의 문자를 임의로 선택할 때, A와 B를 모두 선택한 사람이 110명 이상 135명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7745 ② 0.8185 ③ 0.8413
④ 0.9104 ⑤ 0.9332

유형 9 표본평균 $\overline{X}$의 뜻과 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 모집단의 평균, 분산, 표준편차와 표본평균의 평균, 분산, 표준편차의 관계를 이해하여 미지수의 값을 구하는 문제가 출제된다

출제유형잡기 | 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

필수 유형

| 2015학년도 대수능 |

주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{13}{64}$ ⑤ $\frac{7}{32}$

출제 의도

표본평균의 뜻을 이해하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

2번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 순서대로 a, b라 하자.
8개의 공 중에서 복원추출로 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{8}\Pi_{2}=8^2=64$
이때 $\overline{X}=2$인 경우는 다음과 같다.
(i) $a=1$, $b=3$일 때
$1\times5=5$
(ii) $a=2$, $b=2$일 때
$2\times2=4$
(iii) $a=3$, $b=1$일 때
$5\times1=5$
따라서 $\overline{X}=2$인 경우의 수는 $5+4+5=14$이므로
$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$

답 ⑤

31

▸ 20051-0318

모분산이 4인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$의 표준편차는?

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

32

▸ 20051-0319

다음은 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타낸 것이다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?

① $\frac{11}{54}$ ② $\frac{13}{54}$ ③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{17}{54}$ ⑤ $\frac{19}{54}$

33

▸ 20051-0320

다음은 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타낸 것이다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{4}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 10 표본평균 $\overline{X}$의 분포

출제유형 | 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 표본의 크기가 n일 때, 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 이용하여 확률을 구한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

대중교통을 이용하여 출근하는 어느 지역 직장인의 월 교통비는 평균이 8이고 표준편차가 1.2인 정규분포를 따른다고 한다. 대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인 중 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le 8.24)\ge 0.6826$이 되기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

(단, 교통비의 단위는 만 원이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

출제 의도

표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 이용하여 표본의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인의 월 교통비를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 1.2^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=8,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{1.2^2}{n}$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8,\ \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le 8.24)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le\dfrac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.6826$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1$, 즉 $n\ge 25$

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

답 25

34

▸ 20051-0321

어느 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따를 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 64인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$\mathrm{P}(X\le 44)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)$

를 만족시키는 실수 a의 값은?

① $\frac{201}{4}$ ② $\frac{101}{2}$ ③ $\frac{203}{4}$
④ $\frac{102}{2}$ ⑤ $\frac{205}{4}$

35

▸ 20051-0322

학생 1000명이 어느 수학문제를 푸는 데 걸리는 시간은 평균이 8분이고 표준편차가 2분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중 임의추출한 9명이 이 문제를 푸는 데 걸린 시간의 평균이 7분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.4772

36

▸ 20051-0323

어느 학교의 학생이 하루에 섭취하는 단백질의 양은 평균이 60 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교의 학생 중 임의추출한 n명이 하루에 섭취하는 단백질의 양의 평균이 65 g 이하일 확률이 0.9772일 때, 자연수 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

유형 11 모평균의 추정

출제유형 | 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

어느 마을에서 수확하는 수박의 무게는 평균이 m kg, 표준편차가 1.4 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 마을에서 수확한 수박 중에서 49개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 마을에서 수확하는 수박의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a\le m\le 7.992$이다. a의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 7.198 ② 7.208 ③ 7.218
④ 7.228 ⑤ 7.238

출제 의도

표본평균을 이용하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

모표준편차는 $\sigma=1.4$이고 표본의 크기는 $n=49$이므로 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

이때

$$7.992-a=\left(\overline{x}+1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}\right)$$
$$=2\times1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}=0.784$$

이므로

$a=7.992-0.784=7.208$

답 ②

37

▶ 20051-0324

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 제품 중에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 150이었다. 이 결과를 이용하여 이 공장에서 생산하는 제품의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면 $a\le m\le b$이다. a의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 142.26 ② 143.55 ③ 144.84
④ 146.13 ⑤ 147.42

38

▶ 20051-0325

어느 농장에서 생산하는 바나나 한 송이의 무게는 평균이 m kg, 표준편차가 σ kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산한 바나나 중에서 100송이를 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여 이 농장에서 생산하는 바나나 한 송이의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $2.3008\le m\le 2.3792$이다. $\dfrac{\overline{x}}{\sigma}$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 11.1 ② 11.3 ③ 11.5
④ 11.7 ⑤ 11.9

39

▶ 20051-0326

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a\le m\le b$이고, 이 모집단에서 크기가 k인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $c\le m\le d$이다. $\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{129}{49}$일 때, $\dfrac{k}{n}$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

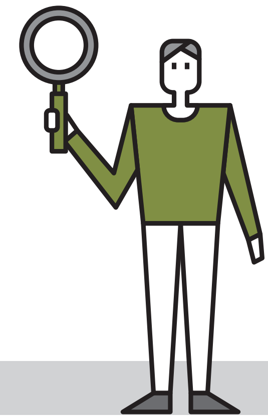
① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

2020

EBS 고교 교재 로드맵

고교 교재 선택, 더 이상 고민하지 마세요!

EBS 과목별 고교 교재 시리즈로 선택만 하면 됩니다.
이제 수준과 목표만 정하고 바로 시작할 수 있습니다.



고1 ~ 고2

	고교 입문		내신 + 수능 기본 개념		
국어	고등 예비 과정	[고1 예비] 2020년, 내 등급은?	국공따 (국어 공부 따로 하지 마라) / 윤혜정의 나비효과 입문편 / 어휘가 독해다!	기본서 올림포스	국어 특화 기본서 국어 독해의 원리 / 국어 문법의 원리
영어	고등 예비 과정	[고1 예비] 2020년, 내 등급은?		기본서 올림포스	단계별 영어 특화 영어 POWER 시리즈 (Grammar / Reading / Listening / Voca POWER)
수학	고등 예비 과정	[고1 예비] 2020년, 내 등급은?	기초 50일 수학 / 초급 올림포스 닥터링	기본서 올림포스	고급 올림포스 고난도
수학	고등 예비 과정	[고1 예비] 2020년, 내 등급은?	수학 특화 기본서 수학의 왕도		
한국사 사회 과학	고등 예비 과정		기본서 개념완성	+	개념완성 문항편

고2 ~ 예비 고3

단기/특화 · 수능 입문

단기 특강

수능
감(感) 잡기

2022학년도
수능 스타트

수능특강
Light

강의노트
수능개념

고3

기출문제

EBS
수능기출의
미래

수능 실전

연계교재

감수
수능특강

감수
수능완성

연계교재
보완학습

수능특강
사용설명서

발행과목
국어·수학·영어
한국사·사회·과학

+

수능연계
교재의
VOCA 1800

고난도

수능연계완성
3/4주 특강
고난도·신유형

수능의
7대 함정

모의고사

FINAL
실전모의고사

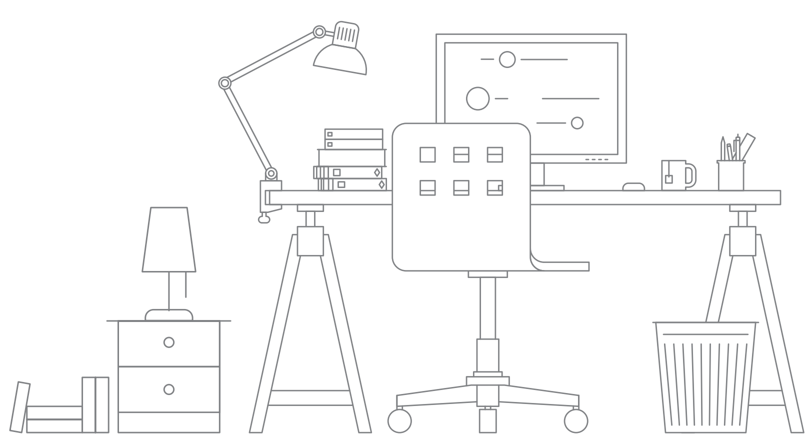
만점마무리
봉투모의고사

고난도 시크릿X
봉투모의고사

MEMO

이 책의 **차례**

실전편



실전 모의고사 1회

정답과 풀이 75쪽

제한시간 100분 | 배점 100점

01

▸ 20051-0327

${}_{2}\Pi_{3}$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

02

▸ 20051-0328

$8^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

03

▸ 20051-0329

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{\sqrt{x-1}-1}$의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

04

▸ 20051-0330

함수 $f(x)=3x^4+2x^3+x$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

05

▸ 20051-0331

$\int_{1}^{3}(x+1)^2dx+\int_{3}^{1}(x-1)^2dx$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

06

▸ 20051-0332

두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

07

▸ 20051-0333

함수 $f(x)=\sin\frac{x}{3}+2$의 주기는 p이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ q)$에 대하여 대칭일 때, pq의 값은? [3점]

① 3π ② 6π ③ 9π
④ 12π ⑤ 15π

08

▸ 20051-0334

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n\left(\frac{1}{2}a_n+k\right)$$

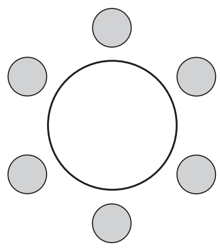
를 만족시킨다. $a_3=56$이 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

09

▸ 20051-0335

그림과 같이 원형 탁자에 일정한 간격으로 배열된 6개의 의자에 어른 3명, 어린이 2명이 앉으려고 한다. 빈 의자와 이웃한 양 옆의 의자에는 어린이가 앉지 않도록 5명이 모두 의자에 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

10

▸ 20051-0336

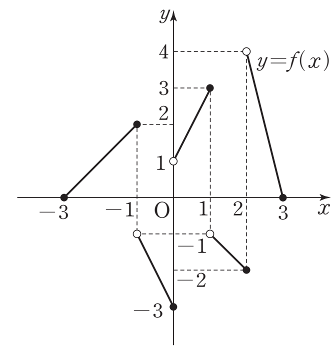
함수 $y=\log_3(x-2)$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 원점을 지나고, 이 그래프의 점근선이 직선 $y=-9$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -19　② -17　③ -15　④ -13　⑤ -11

11

▸ 20051-0337

닫힌구간 $[-3, 3]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x) \times \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) \times \lim_{x\to a+} f(x)$일 때, 상수 a의 값은? (단, $-3<a<3$) [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

12

▸ 20051-0338

서로 다른 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 수 a, 2, b는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 2, $|a|$, $|b|$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

a^2+b^2의 값은? [3점]

① 75　② 80　③ 85　④ 90　⑤ 95

13

▶ 20051-0339

어느 공장에서 생산하는 자동차 1대의 연비는 평균이 13이고 표준편차가 1.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 자동차 중 임의추출한 16대의 자동차 연비의 표본평균이 12.4 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

(단, 연비의 단위는 km/L이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1336 ⑤ 0.1587

14

▶ 20051-0340

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-6}{x-1}=3,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=-\frac{5}{2}$$

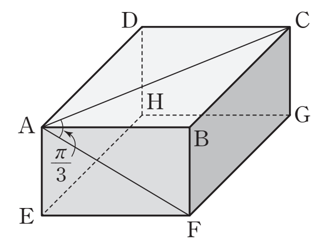
일 때, 함수 $y=f(x)\{f(x)+2g(x)\}$의 그래프 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 y절편을 b라 하자. $a+b$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

15

▶ 20051-0341

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. $\angle\mathrm{CAF}=\frac{\pi}{3}$일 때, 직육면체 ABCD−EFGH의 부피는? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

정답과 풀이 77쪽

16

▸ 20051-0342

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n=4n^2-3n+24$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{5}{8}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{7}{8}$　⑤ 1

17

▸ 20051-0343

시각 $t=0$일 때 동시에 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$f(t)=3t^2-4t$, $g(t)=2t$

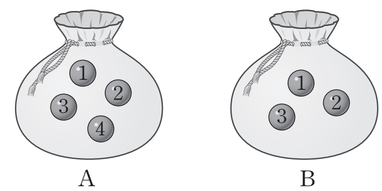
이다. $0\leq t\leq 3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은? [4점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

18

▸ 20051-0344

주머니 A에는 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼내고, 나머지 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다. 처음 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수와 같을 때, 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2일 확률은? [4점]



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

19

▸ 20051-0345

2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$A=\{x\,|\,x$는 n 이하의 자연수$\}$

에서 임의로 서로 다른 두 원소를 동시에 택할 때, 택한 두 원소의 차를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 확률변수 X는 1부터 $\boxed{(가)}$까지의 자연수를 가질 수 있으므로 자연수 k $(1\le k\le \boxed{(가)})$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-\boxed{(나)}}{{}_n\mathrm{C}_2}$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\left(k\times\frac{n-\boxed{(나)}}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)\\&=\frac{\boxed{(다)}}{3}\end{aligned}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$이라 할 때, $f(6)+g(7)+h(8)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

20

▸ 20051-0346

$a>b>1$인 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 직선

l : $x\log_4 a+y\log_8 b=1$

이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> **보기**
>
> ㄱ. $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$ (단, O는 원점이다.)
>
> ㄴ. 점 $\left(\frac{2}{3},\,1\right)$이 직선 l 위의 점이면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$이다.
>
> ㄷ. 직선 l이 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점을 지나도록 하는 두 자연수 a, b가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

▸ 20051-0347

양의 실수 t와 함수 $f(x)=-x^3+9|x|$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$와 x축 위의 점 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$이 있다. 직선 PQ와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하고, 두 집합 A, B를 각각

$$A=\left\{a\,\middle|\,\lim_{t\to a-}g(t)=\lim_{t\to a+}g(t),\ a>0\right\},$$

$B=\{b\,|$함수 $g(t)$는 $t=b$ $(b>0)$에서 불연속이다.$\}$

라 하자. $2\in(A\cap B)$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

(단, q는 양의 상수이다.) [4점]

① $\frac{32}{3}+\sqrt{21}$ ② $\frac{34}{3}+\sqrt{21}$ ③ $12+\sqrt{21}$
④ $\frac{38}{3}+\sqrt{21}$ ⑤ $\frac{40}{3}+\sqrt{21}$

22

▸ 20051-0348

함수 $f(x)=x^3-6x$에서 x의 값이 -1에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오. [3점]

23

▸ 20051-0349

$10\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$의 값을 구하시오. [3점]

24

▸ 20051-0350

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(3,\ \log 16)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 직선 $y=\log 4$ 위에 있을 때, 10^a의 값을 구하시오. [3점]

25

▸ 20051-0351

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=9,\ \mathrm{E}(X^2)=87$$

일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

26

▸ 20051-0352

첫째항이 1이고 공차가 $d\ (d>0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{k+1})=\frac{35}{d}$$

일 때, a_{31}의 값을 구하시오. [4점]

27

▸ 20051-0353

세 자연수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-b}{x-2} & (x<2) \\ \dfrac{3x+1}{x-c} & (x\geq 2) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

28

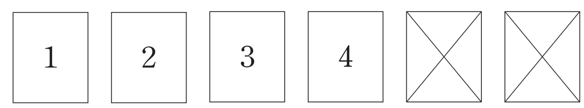
▸ 20051-0354

10 이하의 자연수 n에 대하여 주머니에 1부터 $3n$까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 $3n$개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

29

▸ 20051-0355

1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 한 면에만 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 숫자가 적혀 있는 면을 앞면, 적혀 있지 않은 면을 뒷면이라 할 때, 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 적혀 있는 카드는 앞면, 5, 6의 숫자가 적혀 있는 카드는 뒷면이 보이게 놓여있다. 이 6장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 택하여 한 번 뒤집는 시행을 반복한다. 6장의 카드가 모두 앞면이거나 모두 뒷면인 사건을 A라 하자. 이 시행을 4번 반복할 때, 네 번째 시행에서 처음으로 사건 A가 일어날 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30

▸ 20051-0356

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양의 실수 α에 대하여 $f(\alpha)=0$이다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_t^x f(s)ds$라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$의 치역의 모든 원소의 합을 S, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수를 m이라 할 때, $S+m$의 값을 구하시오. [4점]

실전 모의고사 2회

정답과 풀이 83쪽

제한시간 100분 | 배점 100점

01

▸ 20051-0357

$\log_2 \frac{1}{3} \times \log_3 \frac{1}{8}$의 값은? [2점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

02

▸ 20051-0358

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{\sqrt{x} - 2}$의 값은? [2점]

① 20　② 24　③ 28　④ 32　⑤ 36

03

▸ 20051-0359

θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \frac{4}{5}$일 때, $\cos\theta - \tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{1}{15}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{7}{15}$　⑤ $\frac{11}{15}$

04

▸ 20051-0360

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{9}{16}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{11}{16}$　⑤ $\frac{3}{4}$

05

▸ 20051-0361

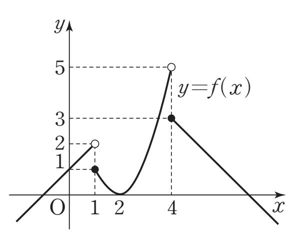
등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3=6$, $a_3+a_5=3$일 때, a_9의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

06

▸ 20051-0362

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to4-}\{f(x)+1\}$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

07

▸ 20051-0363

주머니 속에 노란 공 3개, 빨간 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 3개 모두 같은 색의 공이 나올 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{6}{35}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{8}{35}$ ⑤ $\frac{9}{35}$

08

▸ 20051-0364

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-2}^{5}f(x)dx$의 값은? [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $\int_{0}^{2}f(x)dx=3$, $\int_{5}^{2}f(x)dx=2$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

09

▸ 20051-0365

방정식 $2^{2x}=10-2^{4-2x}$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10

▸ 20051-0366

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각

$$f(x)=x|x|,\ g(x)=2x-|2x|$$

이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h^2)-g(a)}{h^2}$$

를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 p, 서로 다른 실수 a의 개수를 q라 할 때, $p+q^3$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

11

▸ 20051-0367

n이 2 이상의 자연수일 때, 함수

$$f(x)=(x^n+1)(x^2+ax+1)$$

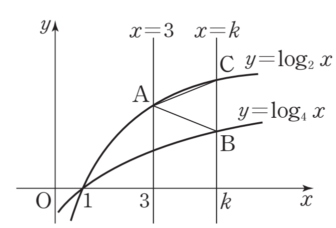
에 대하여 $f'(0)=-1$, $f'(1)=5$이다. $n+a$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12

▸ 20051-0368

그림과 같이 직선 $x=3$이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 A, 직선 $x=k$ $(k>3)$가 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형일 때, k의 값은? [3점]



① $3^{\frac{4}{3}}$ ② $3^{\frac{5}{3}}$ ③ 9
④ $3^{\frac{7}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{8}{3}}$

13

▸ 20051-0369

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=8$, $a_{11}=-22$일 때, $\sum_{k=1}^{15}|a_k|$의 값은? [3점]

① 205　② 210　③ 215　④ 220　⑤ 225

14

▸ 20051-0370

세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=a\sin b\pi\left(x-\frac{1}{3}\right)+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$의 최솟값은 1, 최댓값은 5이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(q)\le 0$을 만족시키는 양수 q의 최솟값이 k일 때, $a+b+c+k$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$　② 7　③ $\frac{15}{2}$　④ 8　⑤ $\frac{17}{2}$

15

▸ 20051-0371

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^4-3x+48 & (x<0) \\ x^4+3x+48 & (x\ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [4점]

① 100　② 110　③ 120　④ 130　⑤ 140

16

▸ 20051-0372

실수 t에 대하여 x에 대한 삼차방정식 $x^3+tx^2+2tx=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t-3)$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값은? [4점]

① 21　② 24　③ 27　④ 30　⑤ 33

17

▸ 20051-0373

어느 농장에서 생산되는 수박 1통의 무게는 평균이 m kg, 표준편차가 2.5 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 수박 중에서 100통의 표본을 임의추출하여 조사한 수박 무게의 평균과 모집단의 수박 무게의 평균의 차가 0.5 kg 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0456 ③ 0.0668
④ 0.1336 ⑤ 0.3413

18

▸ 20051-0374

다음은 $(\sqrt{2}+x^2)^{20}$의 전개식에서 계수가 자연수인 항들의 모든 계수의 합을 구하는 과정이다.

$(\sqrt{2}+x^2)^{20}$의 전개식의 일반항

${}_{20}\mathrm{C}_r\times\boxed{\text{(가)}}^{10-\frac{r}{2}}\times x^{2r}$

에서 x^{2r}의 계수, 즉 ${}_{20}\mathrm{C}_r\times\boxed{\text{(가)}}^{10-\frac{r}{2}}$이 자연수이어야 하므로

$\dfrac{r}{2}$는 10 이하의 음이 아닌 정수이다.

즉, $r=\boxed{\text{(나)}}\,(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$

그러므로 계수가 자연수인 항들의 계수의 합은

${}_{20}\mathrm{C}_0 2^{10}+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^9+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^8+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}2^1+{}_{20}\mathrm{C}_{20}2^0$

$={}_{20}\mathrm{C}_0 2^0+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^1+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^2+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}2^9+{}_{20}\mathrm{C}_{20}2^{10}$

$(1+x)^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_1 x+{}_{20}\mathrm{C}_2 x^2+{}_{20}\mathrm{C}_3 x^3$
$+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}x^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}x^{20}$

에서

$(\boxed{\text{(다)}})^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_1\times\sqrt{2}+{}_{20}\mathrm{C}_2\times(\sqrt{2})^2+{}_{20}\mathrm{C}_3\times(\sqrt{2})^3$
$+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}\times(\sqrt{2})^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\times(\sqrt{2})^{20}$ …… ㉠

$(\boxed{\text{(라)}})^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0-{}_{20}\mathrm{C}_1\times\sqrt{2}+{}_{20}\mathrm{C}_2\times(\sqrt{2})^2-{}_{20}\mathrm{C}_3\times(\sqrt{2})^3$
$+\cdots-{}_{20}\mathrm{C}_{19}\times(\sqrt{2})^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\times(\sqrt{2})^{20}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하여 정리하면

${}_{20}\mathrm{C}_0 2^0+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^1+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^2+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}2^9+{}_{20}\mathrm{C}_{20}2^{10}$

$=\dfrac{(\boxed{\text{(다)}})^{20}+(\boxed{\text{(라)}})^{20}}{2}$

위의 (가), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 하고 (나)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $(a+b+c)\times f(5)$의 값은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

19

▸ 20051-0375

두 함수

$$f(x)=x^2+3x+\frac{9}{4},\ g(x)=2x+m$$

이 있다. 자연수 n에 대하여

$$|f(n)-g(n)|<\frac{3}{2}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 하자. $30<a_n<300$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 i, 최댓값을 l이라 할 때, $\sum_{k=i}^{l} a_k$의 값은? [4점]

① 1002　② 1004　③ 1006　④ 1008　⑤ 1010

20

▸ 20051-0376

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=f'(b)=f'(c)=0$
(나) $f'(p)>0,\ f'(2)<0,\ f'(6)>0,\ f'(11)<0$
(다) $\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $p<0<a<2<b<6<c<11$) [4점]

보기

ㄱ. $f(a)>f(p)$
ㄴ. $f(p)=0$이면 $f(a)f(b)f(c)<0$이다.
ㄷ. $f(p)=0$이고 $f(3)=f(5)$이면 부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 합은 32이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

▸ 20051-0377

두 함수 $f(x)=2(x+1)(x-3)$, $g(x)=x(x^2-3)$에 대하여 함수 $\sum_{k=1}^{10}|f(x)-kg(x)|$가 $x=l$에서 미분가능하지 않은 모든 실수 l의 개수는? [4점]

① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

22

▸ 20051-0378

${}_{5}\Pi_{2}$의 값을 구하시오. [3점]

23

▸ 20051-0379

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=2x-1$이다. 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [3점]

24

▸ 20051-0380

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^3-\sum_{k=1}^{9}(k^3+6k^2+32k)$의 값을 구하시오. [3점]

25

▸ 20051-0381

다섯 자리 자연수 중에서 13333, 79797과 같이 각 자리의 수가 서로 다른 2개의 홀수로만 이루어진 수의 개수를 구하시오. [3점]

26

▸ 20051-0382

어느 도시의 시민들의 걷는 운동 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 σ시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 시민 중에서 n명을 임의추출하여 얻은 이 도시의 시민들의 걷는 운동 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이
$0.7608\le m\le 0.8392$일 때, 이 도시의 시민 중에서 $16n$명을 임의추출하여 얻은 이 도시의 시민들의 걷는 운동 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a\le m\le b$이다.
$10000(b-a)$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

27

▸ 20051-0383

두 실수 a, b에 대하여

$$8^a=9^b,\ \log_6 2^a+\log_6 3^b=10$$

일 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{p}$이다. p의 값을 구하시오. [4점]

28

▸ 20051-0384

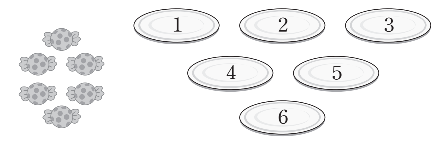
각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 정사면체 모양의 상자를 96회 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓인 횟수가 k ($k=0$, 1, 2, $\cdots$, 96)일 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. $\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)\mathrm{P}(k)$의 값을 구하시오. [4점]

29

▸ 20051-0385

같은 종류의 사탕 6개를 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 접시에 남김없이 나누어 담으려고 한다. 사탕이 담겨진 접시에 적힌 수의 합이 7 이상 17 이하가 되도록 사탕을 접시에 나누어 담는 경우의 수를 구하시오.

(단, 사탕을 하나도 담지 않은 접시가 있을 수 있다.) [4점]



30

▸ 20051-0386

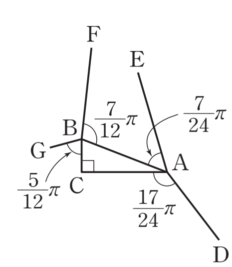
그림과 같이 $\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 두 꼭짓점 A, B에서 그은 네 선분 AD, AE, BF, BG가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BG}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

(나) $\angle\mathrm{BAE}=\frac{7}{24}\pi$, $\angle\mathrm{DAC}=\frac{17}{24}\pi$, $\angle\mathrm{FBA}=\frac{7}{12}\pi$, $\angle\mathrm{CBG}=\frac{5}{12}\pi$

$\overline{\mathrm{FG}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2=720$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

(단, 모든 점은 한 평면 위에 있다.) [4점]



실전 모의고사 3회

정답과 풀이 90쪽

제한시간 100분 | 배점 100점

01

▸ 20051-0387

등식 ${}_{n}\mathrm{H}_{3}={}_{10}\mathrm{C}_{7}$을 만족시키는 자연수 n의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

02

▸ 20051-0388

$\sqrt{\dfrac{4}{3}}\times 18^{\frac{2}{3}}=2^{a}\times 3^{b}$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값은?

(단, a, b는 유리수이다.) [2점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

03

▸ 20051-0389

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=33$, $a_{11}=13$일 때, a_6의 값은? [2점]

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

04

▸ 20051-0390

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$

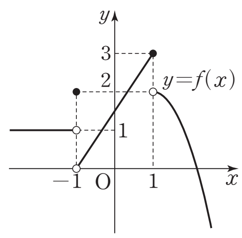
일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

05

▸ 20051-0391

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(-1)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

06

▸ 20051-0392

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-5}{h}$의 값은? [3점]

① 3　② 6　③ 9
④ 12　⑤ 15

07

▸ 20051-0393

양의 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=-a\sin ax+a$의 주기가 $\dfrac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

08

▸ 20051-0394

다항함수 $f(x)$가 $f(0)=1$이고

$f'(x)=6x^2+a$ (a는 상수)

이다. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 m을 가질 때, $m-a$의 값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

09

▸ 20051-0395

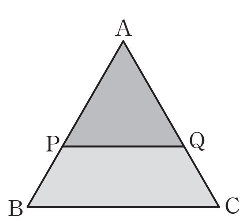
두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 8번 반복할 때, 두 동전 모두 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10

▸ 20051-0396

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 $0<a<1$인 상수 a에 대하여 두 선분 AB, AC 각각을 $a:(1-a)$로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 삼각형 APQ의 넓이를 S_1, 사각형 PBCQ의 넓이를 S_2, 삼각형 ABC의 넓이를 S_3이라 하자. 세 수 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

11

▸ 20051-0397

이차함수 $f(x)=ax(x-3)+2\left(0<a<\frac{8}{9}\right)$에 대하여 부등식

$$\log_3 f(x)\le 1$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $p<a\le q$이다. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$의 값은? [3점]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

12

▸ 20051-0398

x에 대한 이차방정식 $ax^2+2x+a-9=0$이 0보다 크고 2보다 작은 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 a의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

13

▸ 20051-0399

어느 도시의 고등학생이 등하교할 때 걸리는 시간은 표준편차가 16분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 고등학생 중 64명을 임의추출하여 등하교할 때 걸리는 시간을 조사하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$분이었다. 이 결과를 이용하여 추정한 이 도시의 고등학생이 등하교할 때 걸리는 시간의 모평균 m(분)에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $55 \le m \le a$일 때, $\overline{x}+a$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$이다.) [3점]

① 115.76 ② 117.76 ③ 119.76
④ 121.76 ⑤ 123.76

14

▸ 20051-0400

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. a_7+a_8의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

15

▸ 20051-0401

함수 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=a$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 어떤 실수 b에 대하여 $f(a)>f(b)$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

16

▸ 20051-0402

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하자. 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 1200번 반복하였을 때 사건 A가 일어나는 횟수가 870 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

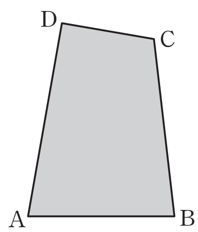
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.6915

17

▸ 20051-0403

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\angle C=120^\circ$인 사각형 ABCD가 있다. $\cos A=\frac{1}{6}$, $\overline{BC}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{35}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $\sqrt{35}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$　③ $2\sqrt{35}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $2\sqrt{35}+\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{35}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

18

▸ 20051-0404

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$
> (나) 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=36$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 모든 교점의 x좌표의 합은? [4점]

① -10　② -8　③ -6

④ -4　⑤ -2

19

▸ 20051-0405

n이 3 이상의 자연수일 때, 주머니 속에 빨간 공 n개와 파란 공 n개가 들어 있다. 빨간 공에는 1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있고, 파란 공에도 1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있다. A, B, C 세 사람이 주머니에 들어 있는 $2n$개의 공 중에서 서로 다른 공을 1개씩 꺼낼 때, 나온 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 하자. 다음은 A, B, C 세 사람이 $a\le b\le c$가 성립하도록 3개의 공을 꺼내는 경우의 수를 구하는 과정이다.

> $a\le b\le c$가 성립하는 경우는 다음과 같다.
>
> (i) $a<b<c$일 때
>
> 1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택한 다음, 작은 수부터 크기순으로 a, b, c로 정하면 된다.
> 이때 1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는
>
> $_n\mathrm{C}_3$
>
> 이고, 택한 3개의 수가 적힌 공이 각각 2개씩 있으므로 $a<b<c$가 성립하도록 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는
>
> $_n\mathrm{C}_3\times\boxed{\text{(가)}}$
>
> (ii) $a=b<c$일 때
>
> 1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택한 다음, 작은 수를 a와 b로 정하고 큰 수를 c로 정하면 된다.
> 따라서 $a=b<c$가 성립하도록 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는
>
> $\boxed{\text{(나)}}$
>
> (iii) $a<b=c$일 때
>
> 이 경우의 수는 (ii)와 같다.
>
> (i), (ii), (iii)에서 $a\le b\le c$인 경우의 수는
>
> $\boxed{\text{(가)}}\times{}_n\mathrm{C}_3+\boxed{\text{(나)}}\times\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $f(p+q)$의 값은? [4점]

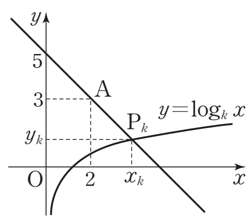
① 100　② 120　③ 140

④ 160　⑤ 180

20

▸ 20051-0406

그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_k x$와 만나는 점을 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $x_4=4$

ㄴ. $1\le y_k\le 2$를 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AP}_k}=\dfrac{7}{5}$을 만족시키는 1보다 큰 실수 k의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

▸ 20051-0407

사차함수 $f(x)=-3x^4+8x^3+6x^2-24x+16$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(|x|-a)$라 하고, 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 어떤 정수 b에 대하여
$\lim_{t\to b-} h(t)+\lim_{t\to b+} h(t)=8$이고,
$\lim_{t\to b-} h(t)\ge \lim_{t\to b+} h(t)$이다.

이때 두 상수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 n이고, 이 순서쌍 중에서 $a+b$의 최솟값은 m, 최댓값은 M이다.
$n+m+M$의 값은? [4점]

① 11　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 19

22

▸ 20051-0408

함수 $f(x)=2x^3+3x^2$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

23

▸ 20051-0409

직선 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{10}$이 x축과 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$의 값을 구하시오. [3점]

24

▸ 20051-0410

방정식 $8^x-4^{x+1}-2^x+4=0$의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

25

▸ 20051-0411

세 쌍의 부부를 임의로 일렬로 세울 때, 부부끼리는 모두 이웃하게 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26

▸ 20051-0412

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+9 & (x<a) \\ 2x-9 & (x\geq a) \end{cases},$$

$$g(x)=a(x+1)-2$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, 첫 번째 수를 a_1, 세 번째 수를 a_3이라 하자. $10\times(a_3-a_1)$의 값을 구하시오. [4점]

27

▸ 20051-0413

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=2^{n-1}$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{2n-1} a_k=2n-1$이다.

$|a_{17}+a_{19}+a_{21}|$의 값을 구하시오. [4점]

28

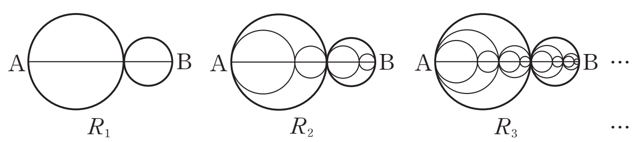
▸ 20051-0414

주머니 A에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 비교하는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다르고, 두 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않으며 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29

▸ 20051-0415

길이가 2인 선분 AB를 길이의 비가 2 : 1인 두 선분으로 나누어 각 선분을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 있는 모든 원의 지름을 각각 길이의 비가 2 : 1인 두 선분으로 나누어 각 선분을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_n $(n\geq 2)$에서 새로 그려진 모든 원의 지름을 각각 길이의 비가 2 : 1인 두 선분으로 나누어 각 선분을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_{n+1}이라 하자. 이때 8개의 그림 R_1, R_2, R_3, $\cdots$, R_8에 그려진 모든 원의 개수의 합은 a이고, 그림 R_9에 그려진 원 중에서 지름의 길이가 $\frac{16}{3^9}$인 원의 개수는 b이다. $a-b$의 값을 구하시오. [4점]



30

▸ 20051-0416

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 $A_t=\{x\,|\,|x-t|=f(x)+t,\ x는\ 실수\}$의 원소의 개수를 $g(t)$라 할 때, 집합 A_t와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A_{\frac{1}{3}}=\{0,\ a,\ 2\}$, $A_{\frac{5}{12}}=\{0,\ b,\ c\}$
(단, $0<a<b<2<c$)

(나) 방정식 $g(t)-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\int_{a+\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

실전 모의고사 4회

정답과 풀이 98쪽

제한시간 100분 | 배점 100점

01

▶ 20051-0417

${}_{3}\Pi_{2}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

02

▶ 20051-0418

$\lim_{x \to 4} \frac{2\sqrt{x}-4}{x-4}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

03

▶ 20051-0419

$(\log_9 16 - \log_3 2) \times \log_2 9$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

▶ 20051-0420

$\overline{AB}=3$, $\angle A=120^\circ$인 삼각형 ABC의 넓이가 $6\sqrt{3}$일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

05

▸ 20051-0421

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B)=3P(B),\ P(A^C)=\frac{1}{3}$$

일 때, $P(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

06

▸ 20051-0422

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르고 $E(X)=6$, $V(X)=4$일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

07

▸ 20051-0423

함수 $f(x)=x^3+3x^2+ax$가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=f'(0)$$

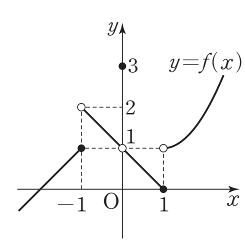
을 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08

▸ 20051-0424

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(0)+\lim_{x \to -1-} f(x)+\lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

09

▶ 20051-0425

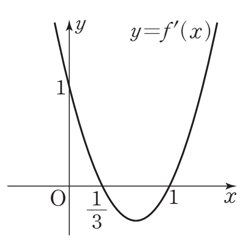
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 두 상수 a, b에 대하여 $f(a)=0$, $f(b)=0$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극소이고 $b-a=6$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

10

▶ 20051-0426

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다.



$f(-1)=0$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11

▶ 20051-0427

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+4k^3)=512,\ \sum_{k=1}^{5}\{b_k+(2k-2)^3\}=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

12

▶ 20051-0428

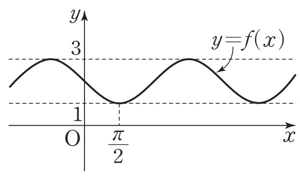
$5f(0)=2g(0)$을 만족시키는 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 곡선 $y=2^{f(x)}$은 점 $(0,\ 4)$를 지나고 두 곡선 $y=2^{f(x)}$, $y=2^{g(x)}$이 점 $(1,\ 8)$에서 만날 때, 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\le 4^{g(x)}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13

▸ 20051-0429

함수 $f(x)=a\sin x+b$의 그래프가 그림과 같다.



$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $\cos bx=a$의 모든 해의 합은?

(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π

④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

14

▸ 20051-0430

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수이면 한 개의 동전을 5번 던지고, 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면 한 개의 동전을 4번 던질 때, 동전의 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은?

[4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

15

▸ 20051-0431

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2-2x}=2$

(나) $\lim_{h\to 0}\frac{2h}{g(2+h)-1}=3$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값은? [4점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$

④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

16

▸ 20051-0432

다음은 방정식 $|a|+|b|+|c|=10$과 부등식 $(a-1)(b-1)\le 0$을 동시에 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하는 과정이다.

> 방정식 $|a|+|b|+|c|=10$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 이 중에서 부등식 $(a-1)(b-1)>0$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하자.
> (i) $a-1>0$, $b-1>0$인 경우
> $a>1$, $b>1$에서 $a\ge 2$, $b\ge 2$이다.
> 즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
> 방정식 $a+b+|c|=10$ $(a\ge 2,\ b\ge 2,\ |c|\ge 1)$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로 $\boxed{(나)}$이다.
> (ii) $a-1<0$, $b-1<0$인 경우
> $a<1$, $b<1$에서 a, b는 0이 아닌 정수이므로 모두 음의 정수이다.
> $a'=-a$, $b'=-b$라 하면 $a'\ge 1$, $b'\ge 1$이다.
> 즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
> 방정식 $a'+b'+|c|=10$ $(a'\ge 1,\ b'\ge 1,\ |c|\ge 1)$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a', b', c의 모든 순서쌍 (a', b', c)의 개수와 같으므로 $\boxed{(다)}$이다.
> (i), (ii)에서 방정식 $|a|+|b|+|c|=10$과 부등식 $(a-1)(b-1)\le 0$을 동시에 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
> $\boxed{(가)}-(\boxed{(나)}+\boxed{(다)})$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 402 ② 404 ③ 406 ④ 408 ⑤ 410

17

▸ 20051-0433

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (x<5) \\ -1 & (x\ge 5) \end{cases},$$

$$g(x)=|x-1|+|x-k|\ (k>1)$$

에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

18

▸ 20051-0434

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\mathrm{P}(140\le X\le 176)=\mathrm{P}(146\le X\le 182)$
> (나) $\mathrm{P}(140\le X\le 146)+\mathrm{P}(X\ge 182)=0.1056$

$m+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

19

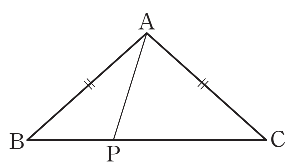
▶ 20051-0435

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여
> $$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}+\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$$
> 는 $\overline{AP}=4$일 때 최솟값 12를 갖는다.

ab의 값은?

(단, 점 P는 두 점 B, C가 아니고, a, b는 상수이다.) [4점]



① $16\sqrt{5}$　② $18\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{5}$
④ $22\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{5}$

20

▶ 20051-0436

함수 $f(x)=3\log_2(x-1)$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_{n+1})=f(a_n)+3$이다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 점 $(a_3,\ f(a_3))$에서 직선 $y=x$와 만난다.
ㄷ. $\sum_{k=1}^{8}\{a_k+f(a_k)\}=626$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

▶ 20051-0437

$\alpha<a<\beta$인 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=x^3-3(a+1)x^2+12ax-3a-5$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 극솟값 p를 가지고, $p<0$이다.
> (나) $\lim_{x\to k+}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k-}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}$
> 를 만족시키는 실수 k의 개수는 1이다.

α의 최솟값을 m, β의 최댓값을 M이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{7}{12}$

22

▸ 20051-0438

중심각의 크기가 $\frac{5}{3}\pi$이고 넓이가 30π인 부채꼴의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

23

▸ 20051-0439

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=5$, $a_5=11$일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

24

▸ 20051-0440

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-6t^2+pt+q$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때 점 P의 속도는 -3이고, 이때 점 P의 위치는 3이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 상수이다.) [3점]

25

▸ 20051-0441

다항식 $(3x+ay)(2x-y)^5$의 전개식에서 x^3y^3의 계수가 200일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

26

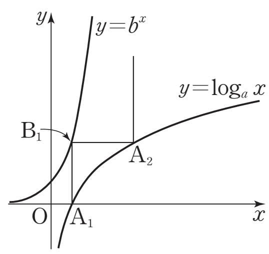
▸ 20051-0442

첫째항이 1이고 모든 항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}$가 점 $(3,\ 0)$에서 x축에 접할 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오. [4점]

27

▶ 20051-0443

그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 x축이 만나는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=b^x$과 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 A_2라 하자. 자연수 n에 대하여 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=b^x$과 만나는 점을 B_n이라 하고, 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. $\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}=3$일 때, 점 A_3의 x좌표를 k라 하자. $\log_2 k$의 값을 구하시오. [4점]



28

▶ 20051-0444

어느 고등학교 학생들의 1주일 동안의 수면 시간은 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 구한 1주일 동안의 수면 시간의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다. 또 이 고등학교 학생 중 $4n$명을 다시 임의추출하여 구한 1주일 동안의 수면 시간의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a+0.268\le m\le b-0.268$이다. $a+b=84$일 때, $n+\overline{x_2}$의 값을 구하시오. (단, 수면 시간의 단위는 시간이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$로 계산한다.) [4점]

29

▶ 20051-0445

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(x)=5$인 집합 X의 원소 x가 존재한다.

(나) $\sum_{k=1}^{5} f(k)=14$

30

▶ 20051-0446

최고차항의 계수가 양수이고, $f(3)<0$, $f'(0)=-28$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, \left|\int_2^x g(t)dt\right|=144,\ x\text{는 실수}\right\}$$

에 대하여 $3\in A$, $n(A)=7$일 때, $|f'(1)|$의 값을 구하시오. [4점]

실전 모의고사 5회

정답과 풀이 106쪽

제한시간 100분 | 배점 100점

01

▸ 20051-0447

$(4^{-2})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

02

▸ 20051-0448

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

03

▸ 20051-0449

$\int_{-2}^{2} (3x^2+2x-1)dx$의 값은? [2점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

04

▸ 20051-0450

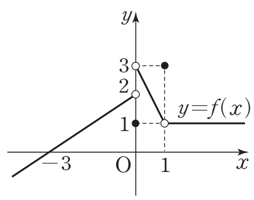
두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

05

▸ 20051-0451

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to0+} f(x)$의 값은? [3점]



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

06

▸ 20051-0452

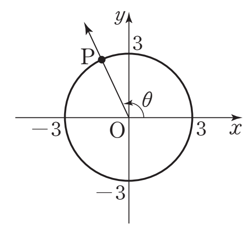
$\log_3 18+\log_{\frac{1}{3}} 2$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

07

▸ 20051-0453

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 제2사분면에 있고 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 시초선을 잡을 때, 원점 O와 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 잇는 동경 OP가 나타내는 각 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다. ab의 값은? [3점]



① $-2\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{21}$ ③ $-3\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{15}$ ⑤ $-2\sqrt{3}$

08

▸ 20051-0454

같은 종류의 사탕 7개를 A, B, C, D 4개의 접시에 남김없이 나누어 담을 때, A, B 중 적어도 하나의 접시에는 1개 이상의 사탕이 담기도록 나누어 담는 경우의 수는?

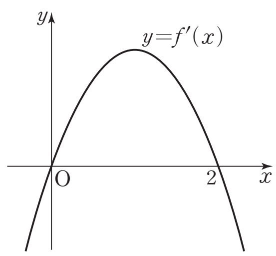
(단, 사탕을 하나도 담지 않은 접시가 있을 수 있다.) [3점]

① 106 ② 108 ③ 110
④ 112 ⑤ 114

09

▸ 20051-0455

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 10일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

10

▸ 20051-0456

$a_1 \neq 0$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=a_2,\ \frac{1}{2}a_{2n+1}=a_{2n-1},\ \frac{1}{3}a_{2n+2}=a_{2n}$$

(단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

일 때, $a_7+a_8=ka_1$이다. 상수 k의 값은? [3점]

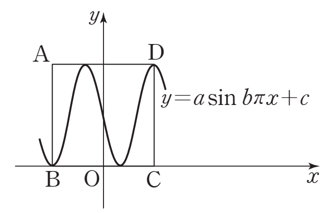
① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

11

▸ 20051-0457

그림과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 y축에 대하여 대칭이고 변 BC가 x축 위에 있도록 놓여 있다. 함수 $y=a\sin b\pi x+c$의 그래프는 두 꼭짓점 B, D를 지나며 점 D가 아닌 한 점에서 선분 AD와 접하고, 점 B가 아닌 한 점에서 선분 BC와 접한다. abc의 값은?

(단, $b>0$이고 a, c는 상수이다.) [3점]



① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

12

▸ 20051-0458

다항식 $(x^2+2)^5(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^8의 계수는? [3점]

① -680 ② -640 ③ -600 ④ -560 ⑤ -520

13

▸ 20051-0459

상자 A에는 딸기맛 사탕이 1개, 포도맛 사탕이 4개 들어 있고, 상자 B에는 딸기맛 사탕이 2개, 포도맛 사탕이 3개 들어 있다. 상자 A에서 동시에 2개의 사탕을 임의로 꺼내어 상자 B에 넣은 후에 상자 B에서 한 개의 사탕을 임의로 꺼내었다. 상자 B에서 꺼낸 사탕이 포도맛 사탕일 때 상자 A에서 딸기맛 사탕 1개, 포도맛 사탕 1개를 꺼냈을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{23}$ ② $\frac{6}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$
④ $\frac{8}{23}$ ⑤ $\frac{9}{23}$

14

▸ 20051-0460

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$$

라 하자. $b_{11}-b_9=4$, $b_9+b_{10}+b_{11}=6$일 때, $a_k>0$을 만족시키는 k의 최솟값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

15

▸ 20051-0461

어느 도시의 직장인이 주말에 책을 읽는 시간은 평균이 123분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인 중 임의추출한 25명이 주말에 책을 읽는 시간의 평균이 120분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

16

▸ 20051-0462

부등식

$$\log a^{a-7}<\log a^{\frac{5}{2}}<\log a^{2a-1}$$

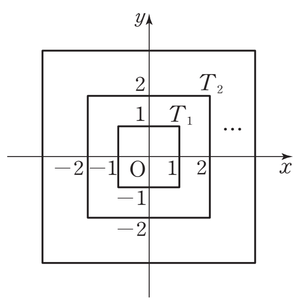
을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

17

▸ 20051-0463

그림과 같이 자연수 n에 대하여 원점 O를 두 대각선의 교점으로 하고 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형을 T_n이라 하자.
원 $x^2+y^2=k$ $(1\le k\le 400)$이 정사각형 T_1, T_2, T_3, $\cdots$에 각각 내접할 때의 모든 실수 k의 값의 합을 p,
원 $x^2+y^2=k$ $(1\le k\le 400)$이 정사각형 T_1, T_2, T_3, $\cdots$에 각각 외접할 때의 모든 실수 k의 값의 합을 q라 할 때, $p-q$의 값은? (단, 정사각형 T_n의 각 변은 x축, y축에 각각 평행하다.) [4점]

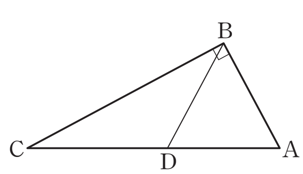


① 760 ② 780 ③ 800
④ 820 ⑤ 840

18

▸ 20051-0464

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 삼각형 ABC의 변 AC 위에 $\overline{\mathrm{AD}}=1$인 점 D가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$일 때, 선분 AC의 길이는? [4점]

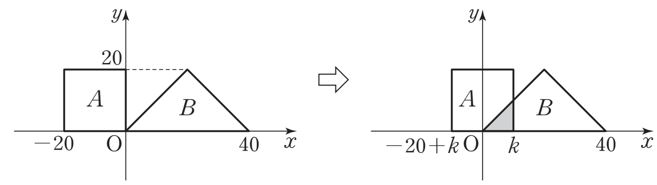


① $\dfrac{1+\sqrt{111}}{2}$ ② $\dfrac{1+\sqrt{113}}{2}$ ③ $\dfrac{1+\sqrt{115}}{2}$
④ $\dfrac{1+3\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{119}}{2}$

19

▸ 20051-0465

[그림 1]과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 20인 정사각형 A와 밑변의 길이가 40, 높이가 20인 직각이등변삼각형 B가 각각 한 꼭짓점이 원점에 놓이면서 한 변이 x축 위에 놓여 있다.



[그림 1] [그림 2]

1부터 40까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 40장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 뽑아 카드에 적힌 수를 k $(1\le k\le 40)$라 할 때, 확률변수 X는 다음과 같다.

> 정사각형 A를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 사각형의 내부와 삼각형 B의 내부가 겹쳐지는 부분([그림 2]의 어둡게 색칠한 부분, 경계선 포함) 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수

다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$를 구하는 과정이다.

> $1\le k\le 20$일 때 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은
> $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(k,\ 1)$, $\cdots$, $(k,\ k)$이므로
> $X=\boxed{\text{(가)}}$
> $k=20+i$ $(1\le i\le 20)$일 때 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은
> $\begin{cases}(i,\ 1),\ (i,\ 2),\ \cdots,\ (i,\ i),\ \cdots,\ (20+i,\ 20-i)\ (1\le i\le 19)\\(20,\ 1),\ (20,\ 2),\ \cdots,\ (20,\ 20),\ \cdots,\ (39,\ 1)\quad(i=20)\end{cases}$
> 이므로
> $X=\boxed{\text{(나)}}$
> 따라서 X의 확률질량함수는 다음과 같다.
> $\mathrm{P}(X=\boxed{\text{(가)}})=\dfrac{1}{40}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19)$
> $\mathrm{P}(X=\boxed{\text{(나)}})=\dfrac{1}{20}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9,\ 20)$
> $\mathrm{P}(X=\boxed{\text{(다)}})=\dfrac{1}{40}$ $(i=10)$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(i)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(10)+g(3)+a$의 값은? [4점]

① 620 ② 622 ③ 624
④ 626 ⑤ 628

20

▸ 20051-0466

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는

$$g(x)=f(|x|),\ h(x)=|f(x)|$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수를 m, 함수 $h(x)$가 $x=\beta$에서 극값을 갖는 실수 β의 개수를 n이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

보기

ㄱ. $1\le m\le 5$

ㄴ. n의 값은 2도 아니고 4도 아니다.

ㄷ. $b=0$, $m+n=4$일 때, $a>0$이고 c의 값의 범위는 $c\ge 0$ 또는 $c\le -\frac{4}{27}a^3$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

▸ 20051-0467

두 함수

$$f(x)=x^2-1,\ g(x)=xf(x)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$의 개수는? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$ 이다.
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a가 존재한다.

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

22

▸ 20051-0468

${}_3\mathrm{H}_7$의 값을 구하시오. [3점]

23

▸ 20051-0469

함수 $f(x)=(x^3-2x+4)(x+3)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

24

▸ 20051-0470

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 다음 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프가 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 그래프와 일치할 때, $60m$의 값을 구하시오. (단, m은 상수이다.) [3점]

25

▸ 20051-0471

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=-3$일 때,

$$10\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)g(x)+1+\frac{f(x)g(x)}{x^2}}{f(x)+4g(x)}$$의 값을 구하시오. [3점]

26

▸ 20051-0472

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x(x^2-4)$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $15S$의 값을 구하시오. [4점]

27

▸ 20051-0473

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_1=1$, $S_2=3$, $S_{10}=10$, $S_{12}=13$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_k a_{k+2}}=-\frac{5}{2}$

$100\times a_{11}\times a_{12}$의 값을 구하시오. [4점]

28

▸ 20051-0474

각 면에 숫자 1, 2, 2, 4, 4, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자를 4번 던져서 밑면에 적힌 수를 모두 곱한 값을 T라 하자. $T=k^2$인 자연수 k가 존재할 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29

▸ 20051-0475

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x^3+ax+b\displaystyle\int_1^x g(t)dt$ (단, a, b는 상수이다.)
(나) 다항식 $f(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.
(다) $g(0)=0$, $g(1)>1$

$f(2)\times g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

30

▸ 20051-0476

함수 $f(x)=4x-1$과 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} f(x)+g(x) & (x\geq 1) \\ f(x)g(x) & (x<1) \end{cases}$$

일 때, 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.
(나) 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$20\left\{g(2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)\right\}+h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]