Ⅱ_7. 삼차방정식과 사차방정식

[10공수1-02-07] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

A, B : 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀고 그 과정을 설명할 수 있다.

C, D : 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 간단한 삼차방정식 또는 사차방정식을 풀 수 있다.

Ⅱ_8. 연립이차방정식

[10공수1-02-08] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

A, B : 두 이차방정식으로 구성된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

C, D : 일차방정식과 이차방정식으로 구성된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 일차방정식과 이차방정식으로 구성된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

1 방정식의 여러 가지 풀이 ❶

(1) 인수분해 공식에 의한 풀이 (복호동순)

① $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

② $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

③ $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(2) 인수정리에 의한 풀이 : $f(x) = 0$에 대하여 $f(\alpha) = 0$이면 $f(x)$는 $(x - \alpha)$를 인수로 갖는다는 성질을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

(3) 복이차방정식 $ax^4 + bx^2 + c = 0$의 풀이

① $x^2 = t$로 치환 ⇒ 인수분해 또는 근의 공식

② 인수분해가 되지 않을 때에는 $A^2 - B^2$의 꼴로 변형.

✡ 복이차방정식을 이차방정식으로 이해하기

$ax^4+bx^2+c=0$	$aX^2+bX+c=0$
서로 다른 네 실근	서로 다른 두 양의 실근 $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
서로 다른 네 허근	서로 다른 두 음의 실근 $D>0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
서로 다른 두 실근, 두 허근	부호가 다른 두 실근 $\alpha\beta<0$
서로 다른 세 실근	0과 한 개의 양의 실근 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta=0$
네 실근	음이 아닌 두 실근 $D\geq0$, $\alpha+\beta\geq0$, $\alpha\beta\geq0$
두 실근과 두 허근	서로 다른 부호의 두 실근 $\alpha\beta<0$ 또는 0과 한 개의 음의 실근 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta=0$

1 방정식의 여러 가지 풀이 ❷

(4) 상반방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$을 풀이

① 양변을 x^2으로 나눈 다음 $x + \dfrac{1}{x} = t$로 치환한 후

t를 구한다.

② x가 실수이기 위해서는 $|t| \geq 2$임을 확인한다.

③ $x + \dfrac{1}{x} = t$를 이차방정식으로 고친 후

$x^2 - tx + 1 = 0$을 풀어 x의 값을 구한다.

✡ 상반방정식의 근

(1) 방정식 $x + \dfrac{1}{x} = t$의 한 근이 α이면 $\dfrac{1}{\alpha}$도 근이다.

(2) 상반방정식 $ax^4 - bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$일 때는

$x - \dfrac{1}{x} = t$로 치환한 후 근을 구한다.

✡ ω (omega)의 성질 ❶

(1) $\begin{cases} x^3 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ 의 한 허근이 ω

$\Rightarrow$ 다른 근 : $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = \omega^2$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ 에서 $x = 1,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

① $\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = -\omega - 1$

② $\omega + \overline{\omega} = -1,\ \omega\overline{\omega} = 1$

✡ ω (omega)의 성질 ❷

(2) $\begin{cases} x^3 = -1 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ 의 한 허근이 ω

$\Rightarrow$ 다른 근 : $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = -\omega^2$

$(x+1)(x^2-x+1) = 0$ 에서 $x = -1,\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

① $\omega^3 = -1,\ \omega^2 - \omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega - 1$

② $\omega + \overline{\omega} = 1,\ \omega\overline{\omega} = 1$

✡ ω(omega)의 성질 ❸

(3) a, b가 실수일 때, $a+b\omega=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$

(4) $x^3=a^3$의 세 근 : a, $a\omega$, $a\overline{\omega}$

(5) $x^n=1$의 한 허근이 ω

$\Rightarrow (x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1\right)=0$

$\therefore\ \omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega^2+\omega+1=0$

2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 세 수 α, β, γ를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$, 즉

$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

① 한 개 : $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

② 두 개 : $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

③ 세 개 : $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

✡ 삼차방정식의 켤레근

(1) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p와 q는 실수이다.)
이때, 삼차방정식의 계수가 실수이면
실근은 적어도 한 개 존재한다.

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의
한 근이 $r+s\sqrt{m}$이면 $r-s\sqrt{m}$도 근이다.
(단, r과 s는 유리수이다.)

$\boxed{3}$ 연립방정식 ❶

(1) 미지수가 2개인 연립일차방정식의 부정(不定)과 불능(不能)

연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 에서

① $\dfrac{a'}{a} \neq \dfrac{b'}{b}$ ⇔ 한 쌍의 해 ⇔ 두 직선의 교점이 1개

② $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b}{b} \neq \dfrac{c'}{c}$ ⇔ 불능(근이 없다) ⇔ 두 직선이 평행

③ $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c'}{c}$ ⇔ 부정(근이 무수히 많다) ⇔ 일치

(2) 일차식과 이차식의 연립방정식
일차식을 x 또는 y의 식으로 정리하여 이차식에 대입한다.

3 연립방정식 ❷

(3) 이차식과 이차식의 연립방정식

① 한 식을 (일차식)$\times$(일차식)$=0$의 꼴로 인수분해

② 이차항을 소거 ⇨ 일차식

③ 상수항을 소거 ⇨ 이차식을 인수분해

$\Rightarrow$ 구한 일차식을 이차식에 대입한다.

(4) x, y의 대칭식인 연립방정식

① $x+y=p$, $xy=q$로 치환

$\Rightarrow$ x, y는 $t^2-pt+q=0$의 두 근

② $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$, $xyz=r$로 치환

$\Rightarrow$ x, y, z는 $t^3-pt^2+qt-r=0$의 세 근

✡ 특수한 꼴의 미지수가 3개인 연립일차방정식

(1) 순환의 형태의 연립일차방정식

① 각각의 항이 합으로 연결되어 있으면 변끼리 덧셈

각각의 항이 곱으로 연결되어 있으면 변끼리 곱셈

② 새로운 방정식과 주어진 방정식을 빼거나 나눈다.

(2) 분수의 분모에 변수가 있는 연립일차방정식

$\dfrac{1}{x}=p$, $\dfrac{1}{y}=q$, $\dfrac{1}{z}=r$로 치환하여 p, q, r의 값을 구하고,

역수를 취하여 x, y, z의 값을 구한다.