I 경우의 수

1 순열과 조합

01 여러 가지 순열 11~16쪽

준비하기 120

생각 열기 같다.

문제 1 (1) 120 (2) 24

문제 2 45360

생각 열기 1000

문제 3 243

문제 4 144

생각 열기 6

문제 5 (1) 60 (2) 4

문제 6 (1) 126 (2) 60

생각 넓히기 ❶ 10개의 빵 중에서 5개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

❷ ❶에서 택한 5개의 빵을 바구니에 나누어 담는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

❸ ❶, ❷에서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_5\times{}_3\Pi_5=252\times243=61236$$

02 중복조합 18~21쪽

준비하기 10

생각 열기 ❶

	A	B	O
A	AA	AB	AO
B	AB	BB	BO
O	AO	BO	OO

❷ AA, AB, AO, BB, BO, OO

함께하기 ❶

aaaa	*aaab*	*aaac*	*aabb*	*aabc*
○○○○□□	○○○□○□	○○○□□○	○○□○○□	○○□○□○

aacc	*abbb*	*abbc*	*abcc*	*accc*
○○□□○○	○□○○○□	○□○○□○	○□○□○○	○□□○○○

bbbb	*bbbc*	*bbcc*	*bccc*	*cccc*
□○○○○□	□○○○□○	□○○□○○	□○□○○○	□□○○○○

❷ $$\frac{(\boxed{4}+2)!}{\boxed{4}!\times2!}=\frac{\boxed{6}!}{\boxed{4}!\times2!}=\boxed{15}$$

문제 1 (1) 56 (2) 120 (3) 1

문제 2 21

문제 3 (1) 20 (2) 24

문제 4 (1) 45 (2) 21

생각 넓히기 ❶ 66 ❷ 66 ❸ 같다.

탐구 & 융합 22쪽

똑같은 상자 2개를 A, A라 하고 다른 상자 1개를 B라 할 때, A, A, B에 담는 공의 개수가 각각 p, q, r인 것을

(p, q, r)

로 나타내기로 하면 가능한 방법은 다음과 같다.

(1) 상자 3개를 모두 사용하는 경우

$(1, 1, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$

따라서 가능한 방법은 4가지이다.

(2) 상자를 일부만 사용하는 경우

$(0, 0, 5)$, $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 0, 3)$,
$(2, 1, 2)$, $(3, 0, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$,
$(4, 0, 1)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, 0)$

따라서 가능한 방법은 12가지이다.

I-1 중단원 마무리하기 23~25쪽

01 5040

02 125

03 60

04 (1) 16 (2) 6

05 6

06 840

07 (1) 120 (2) 48

08 81

09 문제 이해 0이 맨 앞에 나오는 경우는 없으므로 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 0이 맨 앞에 나오는 경우의 수를 빼면 된다. ▶ 30 %

해결 과정 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{1!\times3!\times2!}=60$$ ▶ 30 %

0을 맨 앞에 고정하고 나머지 다섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\times2!}=10$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$60-10=50$ ▶ 10 %

10 120

11 (1) 2 (2) 4

12 21

13 한 자리 자연수의 개수는

1, 2, 3, 4의 4

두 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_1=20$

세 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_2=100$

이므로 세 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+20+100=124$

천의 자리 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=125$

따라서 세 자리 이하의 자연수와 천의 자리 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는

$124+125=249$

이므로 2000은 250번째 수이다.

14 (1) ○, △, × 3개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$ ▶ 30 %

(2) 5명의 학생 중에서 2명이 ○를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$ ▶ 30 %

그 각각에 대하여 ×, △ 2개 중에서 중복을 허용하여 나머지 3명의 학생이 택하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$ ▶ 30 %

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times8=80$ ▶ 10 %

15 $f(1)\le f(2)$를 만족시키는 함수 f에 대하여 $f(3)$을 택하는 경우의 수는 5이다.

이 각각에 대하여 공역 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하고, 크기 순서대로 $f(1)$, $f(2)$를 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\times15=75$

2 이항정리

01 이항정리 27 ~ 30쪽

준비하기 5

생각 열기 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이고 ${}_3C_0={}_3C_3=1$, ${}_3C_1={}_3C_2=3$이므로 a^3, a^2b, ab^2, b^3의 계수와 ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$은 각각 서로 같다.

생각톡톡 a^rb^{n-r}의 계수는

${}_nC_{n-r}$

$a^{n-r}b^r$의 계수는

${}_nC_r$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 a^rb^{n-r}과 $a^{n-r}b^r$의 계수는 서로 같다.

문제 1 (1) 15 (2) 6

문제 2 (1) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

(2) $-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$

문제 3 (1) -18 (2) -540

문제 4 (1) 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n$$
$$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

$x=-1$을 이 식에 대입하면

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\times{}_nC_n$$

(2) $${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$$
$$=2^{2n} \qquad \cdots\cdots ①$$
$${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$$
$$=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①+②를 하면

$$2({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n})=2^{2n}$$
$${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$$

①−②를 하면

$$2({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})=2^{2n}$$
$${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$$

따라서

$${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$$
$$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}$$
$$=2^{2n-1}$$

생각톡톡 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 파스칼의 삼각형은 좌우가 대칭이다.

문제 5 $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

문제 6 35

생각 넓히기 ❶ n개의 원소 중에서 k개의 원소를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_nC_k$이다.

❷ 원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여

원소의 개수가 0인 경우의 수는

$${}_nC_0$$

원소의 개수가 1인 경우의 수는

$${}_nC_1$$

원소의 개수가 2인 경우의 수는

$${}_nC_2$$
$$\vdots$$

원소의 개수가 n인 경우의 수는

$${}_nC_n$$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

❸ $B\subset C\subset A$를 만족시키는 집합 C의 개수는 $(n-r)$개의 원소를 갖는 집합의 부분집합의 개수와 같으므로

$${}_{n-r}C_0+{}_{n-r}C_1+\cdots+{}_{n-r}C_{n-r}=2^{n-r}$$

탐구 & 융합 31쪽

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
⋮

위의 그림의 보라색으로 칠한 부분에서 대각선 방향으로 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84를 더한 값은 그 다음 행의 왼쪽 값 210과 같다. 즉,

$$1+4+10+20+35+56+84=210$$

이다.

이 패턴을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6={}_{10}C_6$$

I-2 중단원 마무리하기 32~33쪽

01 21

02 (1) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
(2) $a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$

03 10 **04** 5

05 10 **06** 64

07 해결 과정 6명의 학생 중 1명만 사진을 찍는 경우의 수는

$${}_6C_1$$

6명의 학생 중 2명이 사진을 찍는 경우의 수는

$${}_{6}C_{2}$$

$$\vdots$$

6명의 학생 전원이 사진을 찍는 경우의 수는

$${}_{6}C_{6}$$ ▶ 60 %

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{6}C_{1}+{}_{6}C_{2}+{}_{6}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{6}C_{5}+{}_{6}C_{6}$$
$$=2^{6}-1$$
$$=63$$ ▶ 40 %

08 문제 이해 이항정리를 이용하여 $(1+x)^{11}$을 전개하면

$$(1+x)^{11}$$
$$={}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}x+{}_{11}C_{2}x^{2}+\cdots+{}_{11}C_{11}x^{11}$$ ▶ 20 %

해결 과정 $x=20$을 이 식에 대입하면

$$21^{11}=(1+20)^{11}$$
$$={}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}\times 20+{}_{11}C_{2}\times 20^{2}+\cdots+{}_{11}C_{11}\times 20^{11}$$ ▶ 30 %

이때 ${}_{11}C_{2}\times 20^{2}+\cdots+{}_{11}C_{11}\times 20^{11}$은 모두 40으로 나누어떨어지므로 21^{11}을 40으로 나눈 나머지는

$${}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}\times 20=1+11\times 20=221$$

을 40으로 나눈 나머지와 같다. ▶ 30 %

답 구하기 따라서

$$221=40\times 5+21$$

이므로 구하는 나머지는 21이다. ▶ 20 %

09 ${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}-1$이므로

$1000<2^{n}-1<2000$에서

$$1001<2^{n}<2001$$

그런데 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$$n=10$$

I 대단원 평가하기 34~37쪽

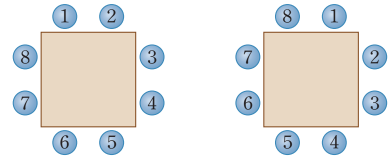
01 24　**02** 240

03 144

04 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(8-1)!=7!$$

이때 정사각형 모양의 식탁에 앉는 경우는 다음 그림과 같이 서로 다른 2가지가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$7!\times 2$$

이므로 옳은 것은 ③이다.

05 ①　**06** ⑤

07 ⑤　**08** 216

09 ③　**10** ②

11 36　**12** 2520

13 짝수가 되려면 일의 자리에 0 또는 2가 와야 한다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

$$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

0, 2, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

이고, 이 중에서 0이 맨 앞에 오는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이므로

$$60-12=48$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$30+48=78$$

14 36　**15** 30

16 84　**17** 20

18 126　**19** ④

20 2

21 (i) ${}_{1}C_{1}+{}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{3}+\cdots+{}_{10}C_{10}=10$

(ii) ${}_{1}C_{0}+{}_{2}C_{1}+{}_{3}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{9}$

$=({}_{2}C_{0}+{}_{2}C_{1})+{}_{3}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{9}$

$=({}_{3}C_{1}+{}_{3}C_{2})+\cdots+{}_{10}C_{9}$

$={}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{9}$

$=\cdots={}_{10}C_{8}+{}_{10}C_{9}$

$={}_{11}C_{9}$

$={}_{11}C_{2}$

$=55$

(i), (ii)에서 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$10+55=65$

이므로 옳은 것은 ④이다.

22 해결 과정 특정한 3가지 색을 하나로 보고 6가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ▶ 40 %

그 각각에 대하여 3가지 색을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$120\times6=720$ ▶ 20 %

23 문제 이해 이항정리를 이용하여 $(x-1)^{24}$을 전개하면

$$(x-1)^{24}={}_{24}C_{0}\,x^{24}+{}_{24}C_{1}\,x^{23}(-1)+\cdots+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$$

$x=10$을 이 식에 대입하면

$$\begin{aligned}9^{24}&=(10-1)^{24}\\&={}_{24}C_{0}\times10^{24}+\cdots+{}_{24}C_{21}\times10^{3}\times(-1)^{21}\\&\quad+{}_{24}C_{22}\times10^{2}\times(-1)^{22}\\&\quad+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}\\&\quad+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}\end{aligned}$$

▶ 40 %

해결 과정 이때

${}_{24}C_{0}\times10^{24}+\cdots+{}_{24}C_{21}\times10^{3}\times(-1)^{21}$

은 1000으로 나누어떨어지므로 9^{24}을 1000으로 나눈 나머지는

$${}_{24}C_{22}\times10^{2}\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}$$

을 1000으로 나눈 나머지와 같다. ▶ 40 %

답 구하기 따라서

$$\begin{aligned}&{}_{24}C_{22}\times10^{2}\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{23}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{24}\times(-1)^{24}\\&={}_{24}C_{2}\times10^{2}\times(-1)^{22}+{}_{24}C_{1}\times10\times(-1)^{23}+{}_{24}C_{0}\times(-1)^{24}\\&=\frac{24\times23}{2!}\times100-24\times10+1\\&=27600-240+1\\&=27361\end{aligned}$$

이므로 9^{24}을 1000으로 나눈 나머지는 361이다. ▶ 20 %

24 (1) 1단 올라가는 횟수를 a, 2단 올라가는 횟수를 b라 할 때, 합하여 6단까지 올라가므로

$a+2b=6$

그런데 a, b는 0 이상의 정수이므로 구하는 순서쌍은

$(0,\ 3),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1),\ (6,\ 0)$ ▶ 30 %

(2) (i) $(0,\ 3)$일 때, bbb를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{3!}=1$

(ii) $(2,\ 2)$일 때, $aabb$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(iii) $(4,\ 1)$일 때, $aaaab$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{4!\times1!}=5$

(iv) $(6,\ 0)$일 때, $aaaaaa$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{6!}=1$ ▶ 60 %

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+5+1=13$ ▶ 10 %