2023학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.11.22(화)

[공통: 수학 I ·수학 II]

01. ⑤	02. ④	03. ①	04. ③	05. ⑤
06. ②	07. ④	08. ④	09. ③	10. ④
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. 10	17. 15	18. 22	19. 7	
20. 17	21. 33	22. 13		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=\left(2^2\div 2^{\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$=\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$=2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하자.

$a_2+a_4=30$ ······ ㉠

한편, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$

에서

$r^2(a_2+a_4)=\frac{15}{2}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$r^2\times 30=\frac{15}{2}$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1r+a_1r^3=30$

$a_1\times\frac{1}{2}+a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=30$

$a_1\times\frac{5}{8}=30$

따라서

$a_1=30\times\frac{8}{5}=48$

정답 ①

4. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=x^2f(x)$에서 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 4f(2)+4f'(2) \\ &= 4\times1+4\times3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. **출제의도** : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= 1-\sin^2\theta \\ &= 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=6-18+a=0$

$a=12$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-18x+12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

정답 ②

7. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 $\sum$의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a+(n-1)\times a \\ &= an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\cdots$$

$$\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}}=2$$

이때,

$2\sqrt{a}=3$

$a=\frac{9}{4}$

따라서,

$a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

정답 ④

8. **출제의도** : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=x^3-x+2$에서

$y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\ t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$

정리하면 $t^3=-1$이므로

$t=-1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$

이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서

$\tan 2b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\dfrac{\pi}{3}<2b<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$2b=\dfrac{\pi}{6}$

$b=\dfrac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

따라서,

$2k=\dfrac{28}{3}$

$k=\dfrac{14}{3}$

정답 ④

11. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로

$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=10$$

즉, $\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

즉, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

12. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1 \le x \le n$일 때,

$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$

또는

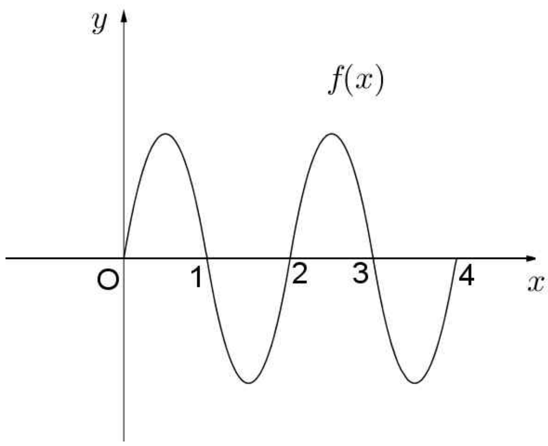
$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x)dx$$

$$= \left[2x^3 - 3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

정답 ②

13. **출제의도** : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n = m^{12}$ ----㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 4^{12}$

즉,

$x^n = 2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(4)=7$

(ⅳ) $m=5$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(5)=5$

(ⅴ) $m=6$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(6)=5$

(ⅵ) $m=7$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 7^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(7)=5$

(ⅶ) $m=8$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 8^{12}$

즉,

$x^n = 2^{36}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

이므로

$f(8)=8$

(ⅷ) $m=9$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=9^{12}$

즉,

$x^n=3^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(9)=7$

따라서,

$$\sum_{m=2}^{9} f(m)$$

$=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=5+5+7+5+5+5+8+7$

$=5\times5+7\times2+8$

$=47$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$$

$=1\times3$

$=3$ (참)

ㄴ.

$$h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$$

이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때

$h(x)=x\times f(x+2)$

$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

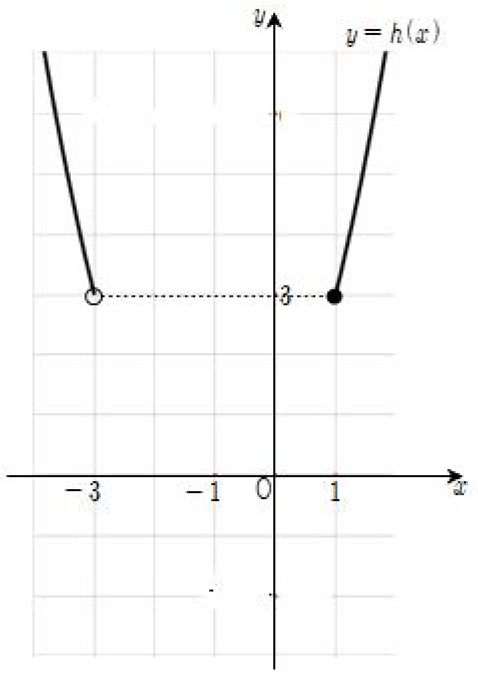
$-1<x<1$일 때

$h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

즉, $x<-3$ 또는 $x\geq1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

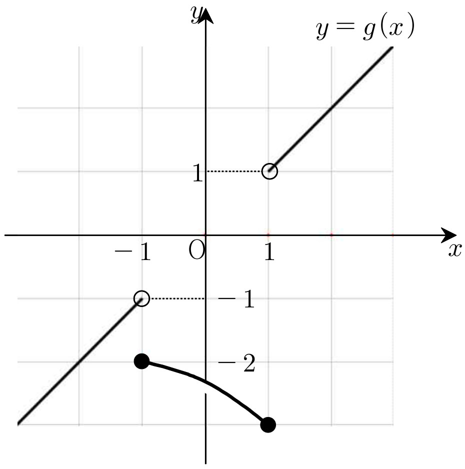


$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$

$h(-1)=f(-1)\times 1=-2\times 1=-2$

이다.

$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$

또 $-1<x<1$에서

$h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로

$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로

$h'(x)<0$

즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $f(1)=3$이므로

함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x)=2$라 하자.

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times 2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때,

$\lim_{x\to -1-} h(x)=\lim_{x\to -1-} 2x=-2$

$\lim_{x\to -1+} h(x)=\lim_{x\to -1-} 2(x+2)=2$

$h(-1)=2$

이므로

$\lim_{x\to -1-} h(x)\neq \lim_{x\to -1+} h(x)$

이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때,

$h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$

$-1<x<1$일 때,

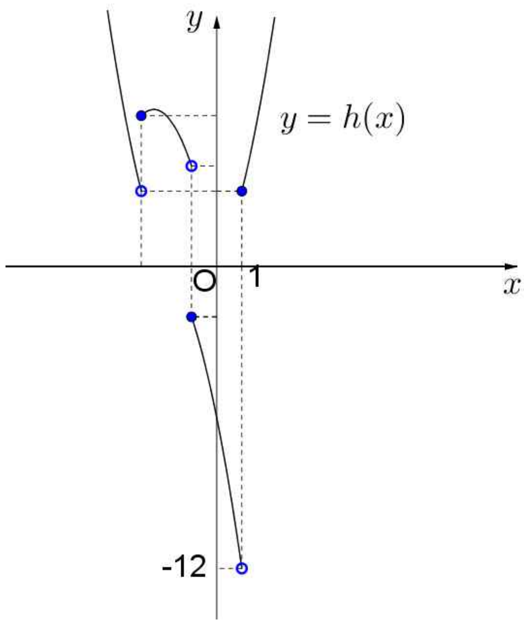
$h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로

$\frac{a_6}{3}=a_7$

$a_6=3a_7=3\times40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ⅱ) $a_6=3k-2$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$

$=40-(3k-2)$

$=42-3k$

$=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로

$3(14-k)>0$에서

$k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$

$k=4$

따라서

$a_6=3\times4-2=10$

이므로

$a_8=a_6+a_7$
$=10+40$
$=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8$
$=40+50$
$=90$

(ⅲ) $a_6=3k-1$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$

$=40-(3k-1)$

$=41-3k$

a_5는 자연수이므로

$41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ …… ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5$

$=(3k-1)-(41-3k)$

$=6k-42$

$=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로

$3(2k-14)>0$에서

$k>7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서

$a_6=3\times11-1=32$

이므로

$a_8 = a_6 + a_7$
$= 32 + 40$
$= 72$

$a_8 = 72$가 3의 배수이므로

$a_9 = \dfrac{a_8}{3} = \dfrac{72}{3} = 24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값은

$M = 200$이고 최솟값은 $m = 24$이다.

따라서

$M + m = 200 + 24 = 224$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$

에서

$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$

$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$

이므로

$3x + 2 = 4(x-2)$

$3x + 2 = 4x - 8$

$x = 10$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int (4x^3 - 2x)\,dx$

$= x^4 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0) = 3$이므로 $C = 3$

따라서

$f(x) = x^4 - x^2 + 3$이므로

$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k + 5) = 55$에서

$3\sum_{k=1}^{5} a_k + 25 = 55$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = 32$에서

$\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = 32$

따라서

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -\sum_{k=1}^{5} a_k + 32$

$= -10 + 32$

$= 22$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$2x^3 - 6x^2 + k = 0$ ----㉠

에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

한편,

$$f'(x)=6x^2-12x$$
$$=6x(x-2)$$

이므로

$f'(x)=0$

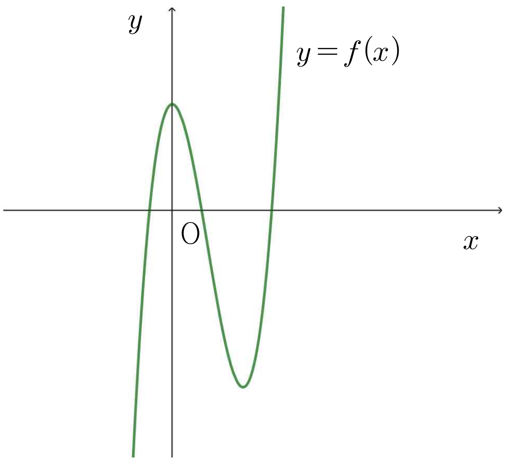
에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$

이므로

$0<k<8$

따라서, 정수 k는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. 출제의도 : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$일 때

$v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로

$12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0 \leq t \leq 3$에서

$$v(t)=\begin{cases} 2t^3-8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^3 |v(t)|\,dt$$
$$=-\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$
$$=-\int_0^2 (2t^3-8t)\,dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)\,dt$$
$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$
$$=-(-8)+9$$
$$=17$$

정답 17

21. **출제의도** : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

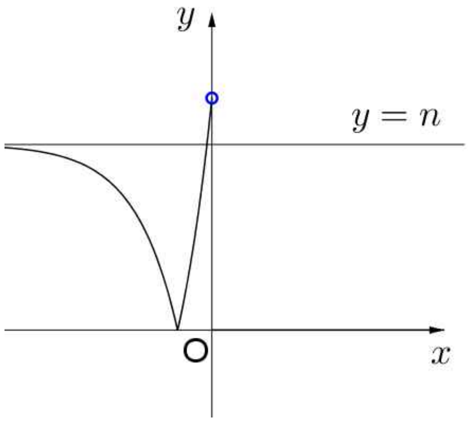
정답풀이 :

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2 만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

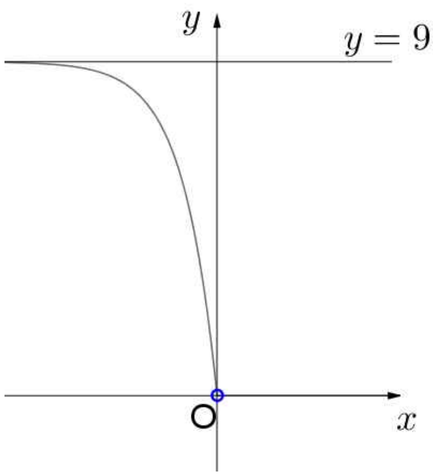
함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

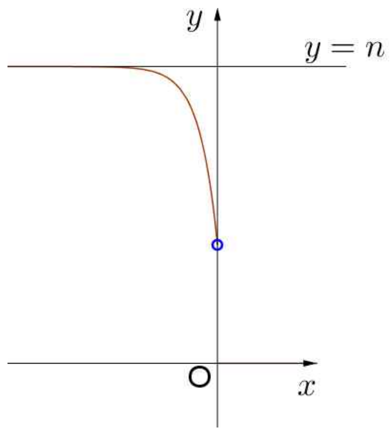
$1 \le n<9$일 때,



$n=9$일 때,



$n>9$일 때,

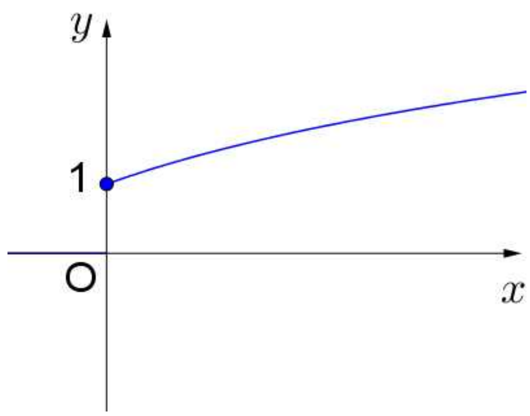


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

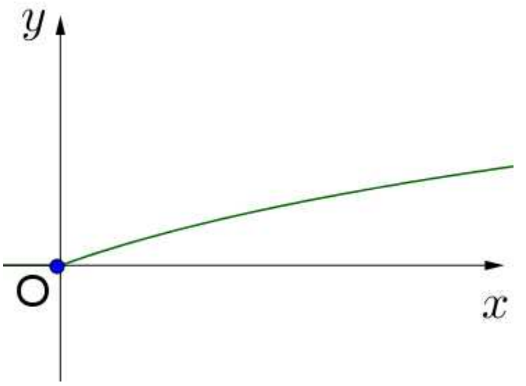
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x \ge 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

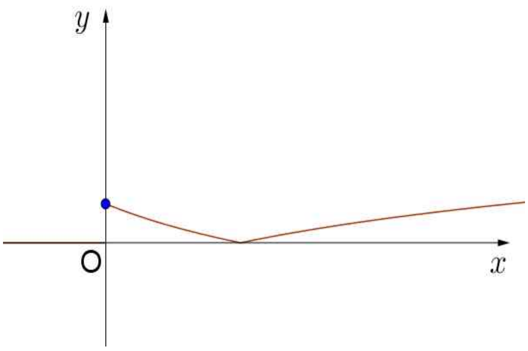
$n=1$일 때,



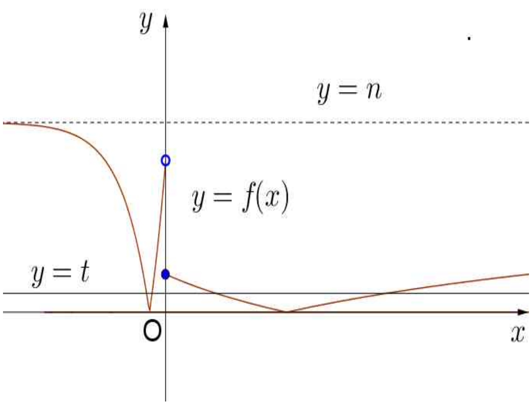
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로
$9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.
즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은
3, 4, 5, 6, 7, 8
이고, 그 합은
$3+4+5+6+7+8=33$
이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (가)에서

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad ----㉠$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고

조건(나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$을 지난다.

즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$

이 식을 정리하면

$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$

$a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

한편, ㉠에서

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$\lim_{x\to1}f'(g(x))$

$=\lim_{x\to1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$

$=3k^2-12k+b$ -----㉡

또, 우변은

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=3-12+b$

$=b-9$ -----㉢

㉡과 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=b-9$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

$27-54+3b-3=6$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

정답 13

[다른 풀이 1]

두 점 $(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선

$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

는 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-\left\{f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}$

$=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ----㉠

이다.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(1)=f'(g(1))$

이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$=3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ -----ⓛ

이고 $g(1)=k\ \left(k\ge\frac{5}{2}\right)$라 하면

$f'(1)=f'(k)$

이므로 ⓛ에서

$f'(1)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이고

$f'(k)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)$

에서

$3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이므로

$k=3$

따라서

$f'(1)=f'(3)=\alpha$라 하면

$f'(x)=3(x-1)(x-3)+\alpha$

$\quad=3x^2-12x+9+\alpha$

양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)=x^3-6x^2+(9+\alpha)x+C$

(단, C는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0)=-3$, $f(3)=6$이므로

$C=-3$, $\alpha=3$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

따라서

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로 두 상수 a,b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

한편, 조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로

$f(x)-f(1)$

$=(x^3+ax^2+bx-3)-(1+a+b-3)$

$=x^3-1+a(x^2-1)+b(x-1)$

$=(x-1)\{x^2+x+1+a(x+1)+b\}$

$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$

즉,

$f'(g(x))=x^2+(a+1)x+a+b+1$ ----ⓖ

그리고

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$g(x)=y$라 하면

$3y^2+2ay+b=x^2+(a+1)x+a+b+1$

따라서 y에 대하여 정리하면

$3y^2+2ay-\{x^2+(a+1)x+a+1\}=0$

이고 y에 대하여 풀면

$y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}}}{3}$

이고 근호 안을 정리하면

$D/4=3\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{3}a^2+a+1\right\}$

$\quad=3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}$

따라서

$g(x)=\dfrac{-a\pm\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

즉,

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\pm k\sqrt{x^2+l}$ (k,l은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지므로

$g(x)=\dfrac{-a+\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

이고, $g(x)$는 $x=-\frac{a+1}{2}$에서 최솟값

$\dfrac{-a+\sqrt{\dfrac{(a+3)^2}{4}}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}$을 가진다.

따라서

(i) $a \geq -3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-a+3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-12$인데 $a \geq -3$을 만족하지 않는다.

(ii) $a<-3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a-\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-3a-3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-6$

(i).(ii)에 의해 $a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$ ----ⓛ

$f'(x)=3x^2-12x+b$ ----ⓒ

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to1} f'(g(x))=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ⓒ으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이것을 ⓛ에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

■ [선택: 확률과 통계]
23. ③ 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ②
28. ④ 29. 49 30. 100

23. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}3^r={}_5\mathrm{C}_r3^r\,x^{15-3r}$
$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$
이므로 x^9항은
$15-3r=9$,
즉
$r=2$
일 때이다.
따라서 x^9의 계수는
$${}_5\mathrm{C}_2\times3^2=10\times9$$
$$=90$$

정답 ③

24. **출제의도** : 중복순열과 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
네 자리의 자연수가 4000 이상인 홀수이려면
천의 자리의 수는 4, 5 중의 하나이고,
일의 자리의 수는 1, 3, 5 중의 하나이며,
십의 자리와 백의 자리의 수는 각각 1, 2, 3, 4, 5 중의 하나이어야 한다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$${}_2\Pi_1\times{}_3\Pi_1\times{}_5\Pi_2=2\times3\times25$$
$$=150$$

정답 ②

25. **출제의도** : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
14개의 마스크 중에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크가 모두 검은색일 확률은
$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{\dfrac{14\times13\times12}{3\times2\times1}}$$
$$=\frac{3}{13}$$
따라서 여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은
$$1-\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=1-\frac{3}{13}$$
$$=\frac{10}{13}$$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
(ⅰ) A는 흰 공 1개와 검은 공 2개가 나오는 사건이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{2\times\dfrac{4\times3}{2\times1}}{\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}$$
$$=\frac{12}{20}$$
$$=\frac{3}{5}$$

(ⅱ) B는 2가 적혀 있는 공이 3개 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(B)={}_4\mathrm{C}_3 \over {}_6\mathrm{C}_3$$
$$={4 \over 20}$$
$$={1 \over 5}$$

(ⅲ) $A\cap B$는 2가 적혀 있는 흰 공 1개와 2가 적혀 있는 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)={{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2 \over {}_6\mathrm{C}_3}$$
$$={1\times3 \over 20}$$
$$={3 \over 20}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$={3 \over 5}+{1 \over 5}-{3 \over 20}$$
$$={13 \over 20}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량을 X(mL)라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

표본의 크기가 16일 때의 표본평균을 $\overline{x_1}$이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times{\sigma \over \sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times{\sigma \over \sqrt{16}}$$

이므로

$$2\times1.96\times{\sigma \over \sqrt{16}}=755.9-746.1$$

즉,

$0.98\sigma=9.8$

따라서

$\sigma=10$

이다.

표본의 크기가 n일 때의 표본평균을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times{10 \over \sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times{10 \over \sqrt{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times2.58\times{10 \over \sqrt{n}}$$
$$={51.6 \over \sqrt{n}}$$

이때 ${51.6 \over \sqrt{n}}\le6$, 즉

$$\sqrt{n}\ge{51.6 \over 6}=8.6$$

이어야 하므로

$n\ge8.6^2=73.96$

이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 74이다.

정답 ②

28. 출제의도 : 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(0 \le X \le a) = 1$이므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}ac = 1$, 즉 $ac = 2$

한편,

$\mathrm{P}(0 \le X \le a) = \mathrm{P}(X \le b) + \mathrm{P}(X \ge b) = 1$

이고

$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$

이므로

$\mathrm{P}(X \le b) = \frac{5}{8}$이고 $\mathrm{P}(X \ge b) = \frac{3}{8}$

이다.

따라서 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{5}{8}$

이다.

한편,

$\mathrm{P}(X \le b) > \frac{1}{2}$

이므로

$0 < \sqrt{5} < b$

이다.

이때 두 점 $(0,0)$, (b,c)를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{c}{b}x$

이므로 $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$에서

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) = \frac{5c}{2b}$$
$$= \frac{1}{2}$$

즉,

$b = 5c$

이다.

이때 $bc = 5c^2 = \frac{5}{4}$이므로

$c = \frac{1}{2}$ $(\because\ c > 0)$

따라서 $b = \frac{5}{2}$, $a = 4$이므로

$$a + b + c = 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 7$$

정답 ④

29. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(ⅰ) 사건 A가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{8} \cdots ㉠$$

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{8} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(ⅱ) 사건 $A\cap B$가 일어날 확률

㉠에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2=3\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{9}$$
$$=\frac{1}{18}$$

㉡에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{8}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{13}{72}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}}=\frac{13}{36}$$

이므로

$$p+q=36+13$$
$$=49$$

정답 49

30. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$f(1)=1$, $f(10)=10$

이다.

(ⅰ) $f(5)=1$, $f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1,1,1)$

의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(7,8,9)$, $(7,8,10)$, $(7,9,9)$, $(7,9,10)$,
$(7,10,10)$,
$(8,8,9)$, $(8,8,10)$, $(8,9,9)$, $(8,9,10)$,
$(8,10,10)$,
$(9,9,9)$, $(9,9,10)$, $(9,10,10)$,
$(10,10,10)$

의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times14=14$

이다.

(ⅱ) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우

$f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,2,2)$

의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

$f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(8,8,9)$, $(8,8,10)$,

$(8,9,9)$, $(8,9,10)$, $(8,10,10)$,
$(9,9,9)$, $(9,9,10)$, $(9,10,10)$, $(10,10,10)$
의 9개가 존재한다.
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$4\times9=36$
이다.

(iii) $f(5)=3$, $f(6)=9$인 경우
$f(5)=3$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는
$(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$,
$(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,3)$,
$(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,3,3)$
의 9개가 존재한다.
$f(6)=9$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는
$(9,9,9)$, $(9,9,10)$, $(9,10,10)$, $(10,10,10)$
의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$9\times4=36$
이다.

(iv) $f(5)=4$, $f(6)=10$인 경우
$f(5)=4$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는
$(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,1,4)$,
$(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,2,4)$,
$(1,3,3)$, $(1,3,4)$,
$(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,2,4)$,
$(2,3,3)$, $(2,3,4)$
의 14개가 존재한다.
$f(6)=10$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는
$(10,10,10)$
의 1개가 존재한다.
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$14\times1=14$
이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 함수 f의 개수는
$14+36+36+14=100$

정답 100

[다른 풀이]
조건 (나)에서
$f(1)=1$, $f(10)=10$
이다.
(i) $f(5)=1$, $f(6)=7$인 경우
$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는
$(1,1,1)$
의 1개가 존재한다.
$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$의 개수는 다음과 같다.
① $f(9)=9$일 때
$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_2-1&={}_4\mathrm{C}_2-1\\&=6-1\\&=5\end{aligned}$$
($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)
② $f(9)=10$일 때
$$\begin{aligned}{}_4\mathrm{H}_2-1&={}_5\mathrm{C}_2-1\\&=10-1\\&=9\end{aligned}$$
($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5+9=14$
이다.

(ii) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우
① $f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$의

개수는

$_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3$

$= 4$

② $f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$의 개수는

$_3\mathrm{H}_3 - 1 = {}_5\mathrm{C}_3 - 1$

$= 10-1$

$= 9$

$(f(7)=f(8)=f(9)=8$인 경우를 제외함)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times 9 = 36$

이다.

(ⅲ) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수 f의 $1 \le x \le 5$일 때의 규칙성과

$6 \le x \le 10$일 때의 규칙성이 서로 대칭적이므로

$f(5)=3$, $f(6)=9$인 함수 f의 개수는 (ⅱ)의 함수의 개수와 같고,

$f(5)=4$, $f(6)=10$인 함수 f의 개수는 (ⅰ)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수 있다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times(14+36) = 2\times 50 = 100$

이다.