Ⅰ_2. 함수의 연속(連續, continuity)

[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고,
이를 활용할 수 있다.

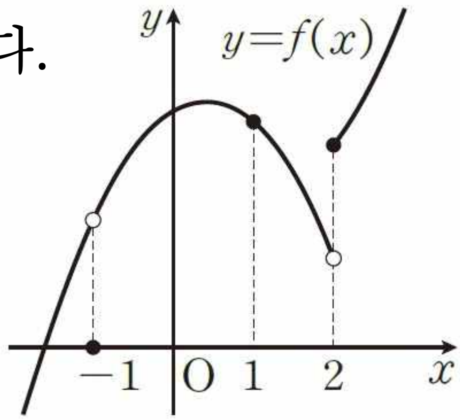
1 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 '연속'이라고 한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



☑ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow$ ① 극한값과 함숫값이 존재

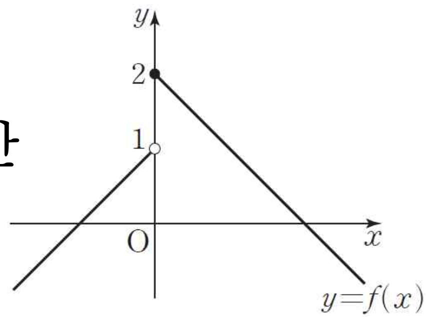
② (극한값) = (함숫값)

2 함수의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속가 아닐 때,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 '불연속'이라고 한다.

예 ① 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ -x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$은



$x=0$에서 $f(0)=2$로 정의되어 있지만

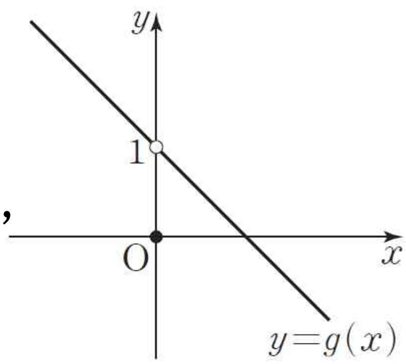
$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x+1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (-x+2) = 2$이므로 극한값

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$이 존재하지 않는다.

$\therefore$ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

② 함수 $g(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$은

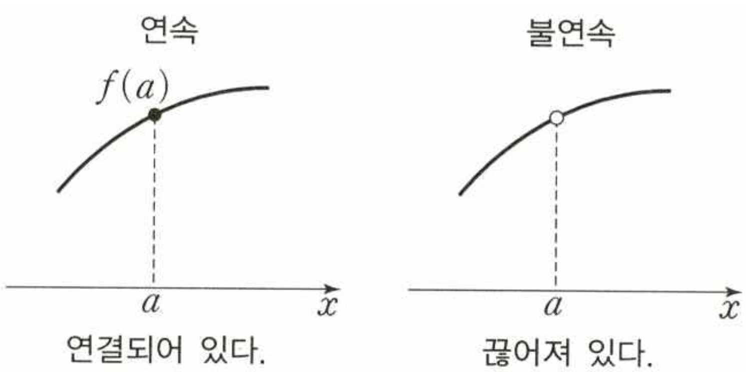


$x=0$에서 $g(0)=0$으로 정의되어 있고,

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x+1) = 1$로

극한값 $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$가 존재하지만 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq g(0)$이다.

$\therefore$ 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



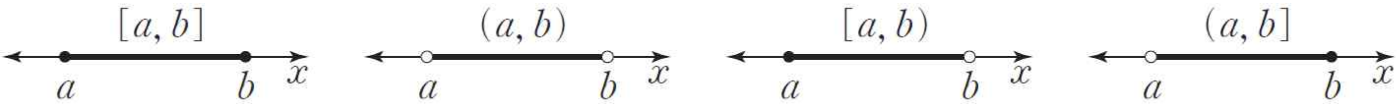
3 구간 ❶

두 실수 a, b $(a < b)$에 대하여

(1) 집합 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \mid a < x < b\}$, $\{x \mid a \leq x < b\}$, $\{x \mid a < x \leq b\}$를 '구간'이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

와 같이 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 '닫힌구간', $(a,\ b)$를 '열린구간'이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 '반닫힌 구간' 또는 '반열린 구간'이라고 한다.

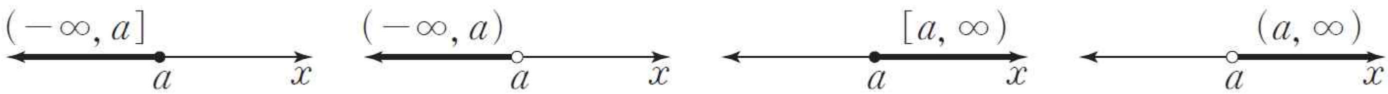


3 구간 ❷

(2) 집합 $\{x \mid x \leq a\}$, $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid x \geq a\}$, $\{x \mid x > a\}$도 '구간'이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.



(3) 실수 전체의 집합도 하나의 구간이며, 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

[4] 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 '연속' 또는 그 구간에서 '연속함수'라고 한다.

(1) 열린구간에서의 연속 : 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 '열린구간 (a, b)에서 연속'이라고 한다.

(2) 닫힌구간에서의 연속 : 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 '닫힌구간 $[a, b]$에서 연속'이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이다.

② $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

[5] 연속함수의 성질 ❶

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x = a$에서 연속이면
다음 함수도 $x = a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x) \pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

☑ 함수의 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 연속함수의 성질이 성립함을 보일 수 있다.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x = a$에서 연속이면
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

5 연속함수의 성질 ❷

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x) = cf(a)$ (c는 상수)이므로

함수 $cf(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

$= f(a) \pm g(a)$이므로 두 함수 $f(x) \pm g(x)$는

$x = a$에서 연속이다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

5 연속함수의 성질 ❸

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$ $(g(a) \neq 0)$이므로

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x = a$에서 연속이다.

☑ ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면

함수 $cf(x)$ (c는 상수), $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$도 그 구간에서 연속이다.

5 연속함수의 성질 ❹

② 함수 $y = x$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
연속함수의 성질 (3)에 의하여 함수 $y = x^2$, $y = x^3$,
$y = x^4$, $\cdots$, $y = x^n$ (n은 2이상의 자연수)도
실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때 상수함수도 실수 전체의 집합에서 연속이므로
연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 다항함수

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0 \text{은 상수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다.
즉, 모든 다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

✡ 연속인 구간(범위) ❶

(1) 다항함수 : $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

⇨ 모든 실수 즉, $(-\infty, \infty)$에서 연속

(2) 분수함수 : $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ⇨ (분모) $\neq 0$

즉, $g(x) \neq 0$인 x의 범위에서 연속

(3) 무리함수 : $y = \sqrt{f(x)}$ ⇨ (근호 안) ≥ 0

즉, $f(x) \geq 0$인 x의 범위에서 연속

✡ 연속인 구간(범위) ❷

(4) $y=\sin x$, $y=\cos x$

⇨ 모든 실수 즉, $(-\infty,\ \infty)$에서 연속

$y=\tan x$ ⇨ $x=\dfrac{(\text{홀수})}{2}\pi$에서 점근선

즉, $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$에서 연속 (단, n은 정수)

(5) 지수함수 : $y=a^x$ (단, $a\neq1$, $a>0$)

⇨ 모든 실수 즉, $(-\infty,\ \infty)$에서 연속

(6) 로그함수 : $y=\log_a x$ (단, $a\neq1$, $a>0$)

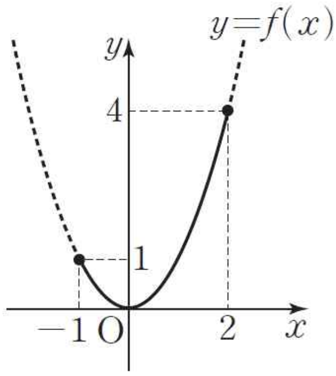
⇨ (진수) >0 즉, $(0,\ \infty)$에서 연속

6 최대·최소 정리 ❶

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때

$$f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=4$$



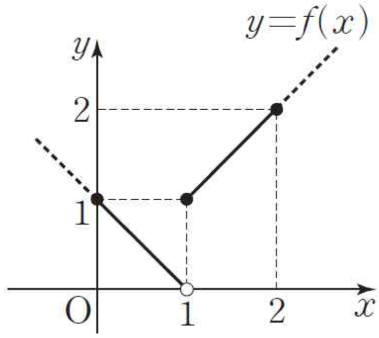
이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

$\boxed{6}$ 최대·최소 정리 ❷

☑ ① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 $x=1$에서 불연속인 함수

$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$ 은



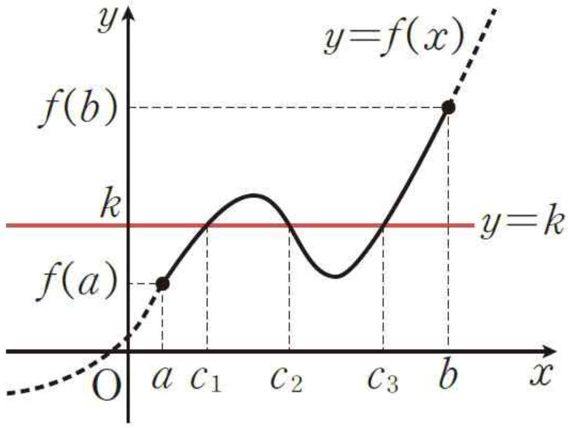
닫힌구간 $[0, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

$\boxed{6}$ 최대·최소 정리 ❸

② 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b) 또는 구간 $[a, b)$ 또는 구간 $(a, b]$에서 연속인 경우에는 함수 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 은 열린구간 $(-1, 2)$ 또는 구간 $[-1, 2)$에서 연속이고 두 구간에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖지만 두 구간에서 최댓값을 갖지 않는다.

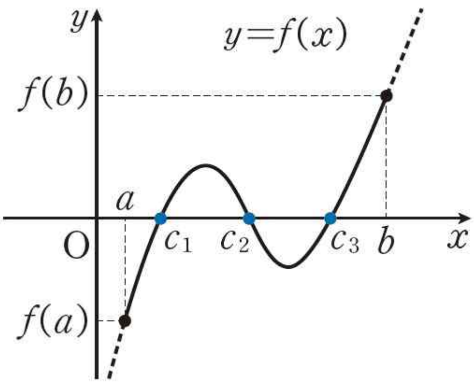
7 사잇값의 정리 ❶



(1) 사잇값의 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

예 함수 $f(x) = x^2$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0) = 0$, $f(2) = 4$이므로 $f(c) = 3$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 이때 $f(c) = c^2 = 3$에서 $0 < \sqrt{3} < 2$인 $c = \sqrt{3}$이 존재한다.

7 사잇값의 정리 ❷



(2) 사잇값의 정리의 활용 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(x) = 0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x) = 0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

☑ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$이면 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르므로 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값인 0에 대하여 $f(c) = 0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.