Ⅱ_7. 명제의 증명

[10공수2-02-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하고 관련된 명제를 증명할 수 있다.

A : 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하고 관련된 명제를 증명할 수 있다.

B : 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 알고 관련된 명제의 증명을 부분적으로 수행할 수 있다.

C : 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 알고 안내된 절차에 따라 관련된 명제의 증명을 부분적으로 수행할 수 있다.

D : 안내된 절차에 따라 대우를 이용한 증명을 부분적으로 수행할 수 있다.

E : 대우를 이용한 증명법의 의미를 안다.

Ⅱ_8. 절대부등식

[10공수2-02-08] 절대부등식의 뜻을 알고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

A, B : 절대부등식의 뜻을 설명하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

C, D : 절대부등식의 뜻을 알고, 안내된 절차에 따라 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

E : 절대부등식의 뜻을 안다.

1 명제의 증명과 정리

(1) 증명 : 정의나 명제의 가정 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참 또는 거짓임을 논리적으로 밝히는 과정

(2) 정리 : 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 다른 명제를 증명할 때 자주 이용되는 것

(3) 증명에 쓰이는 용어 정리

① 명제 $p \rightarrow q$에서 p를 '가정', q를 '결론'이라 한다.

② 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 '정의'라 한다.

2 명제 $p \rightarrow q$의 증명 방법 ❶

(1) 직접증명법(direct proof) : 가정으로부터 출발하여 직접 차례차례 추론하여 결론을 이끌어내는 방법

$p \rightarrow p_1$, $p_1 \rightarrow p_2$, $\cdots$, $p_n \rightarrow q$임을 보인다.

2 명제 $p \to q$의 증명 방법 ❷

(2) 간접증명법(indirect proof) : 직접증명이 곤란한 경우 사용되는 방법

① 대우법(proof by contraposition) : 어떤 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 같음을 이용하여 대우가 참임을 보임으로써 원래 명제가 참임을 보이는 방법

⇒ 명제 '$p \to q$'의 대우 '$\sim q \to \sim p$'가 참임을 보인다.

② 귀류법(reduction to absurdity) : 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제를 부정한 명제가 거짓이거나 모순임을 보임으로써 원래 명제가 참임을 보이는 방법

⇒ 명제 '$p \to q$'를 부정한 명제 'p이고 $\sim q$'가 거짓임을 보인다.

3 절대부등식

(o) 절대부등식 : 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식

a, b가 실수일 때,

(1) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

(2) $a^2 \geq 0$, $|a| \geq 0$, $a^2 + b^2 \geq 0$

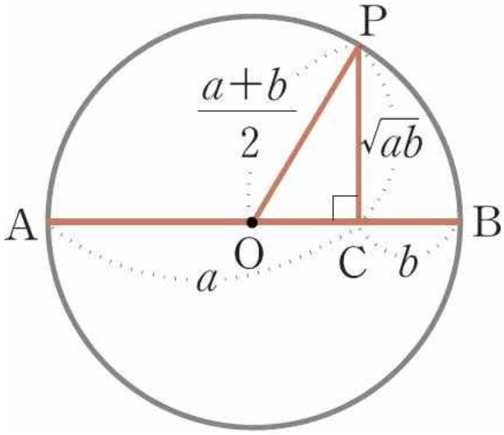
(3) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

(4) $|a|^2 = a^2$, $|ab| = |a||b|$

(5) $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$)

4 산술평균, 기하평균, 조화평균의 관계

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때



(1) $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \dfrac{2ab}{a+b}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \ge \dfrac{3abc}{a+b+c}$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

✡ 산술평균과 기하평균의 관계

산술평균과 기하평균의 관계는 양수인 실수에서 문자의 합 또는 곱이 일정할 때 주로 사용한다.

✡ 산술평균, 기하평균, 조화평균

일반적으로 $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $\cdots$, $a_n>0$일 때,

(1) 산술평균 : $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$

☑ (산술평균) = (전체의 합) ÷ (개수)

(2) 기하평균 : $\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n}$

☑ (기하평균) = {(전체의 곱)의 (개수) 제곱근}

(3) 조화평균 : $\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}$

☑ (조화평균) = [{(역수)의 평균}의 역수]

이때 (산술평균) ≥ (기하평균) ≥ (조화평균)이 성립한다.

5 코시-슈바르츠의 부등식

a, b, c, x, y, z가 실수일 때

(1) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq (ax+by)^2$

(단, 등호는 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$일 때 성립)

(2) $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$

(단, 등호는 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$일 때 성립)

6 여러 가지 절대부등식 ❶

a, b, c가 실수일 때

(1) $a^2 \pm 2ab + b^2 \geq 0$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(3) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 0$

(단, 등호는 $a=b=c=0$일 때 성립)

(4) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

6 여러 가지 절대부등식 ❷

(5) $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$일 때,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

(단, 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

(6) ① $|a| + |b| \geq |a + b|$

(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

② $|a + b| \geq ||a| - |b||$

(단, 등호는 $ab \leq 0$일 때 성립)

③ $|a - b| \geq ||a| - |b||$

(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

✡ 절대부등식이 될 조건

(1) 모든 실수 x에 대하여

$ax + b > 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b > 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$ ① $a = b = 0$, $c > 0$

② $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$