II_2. 조건부확률

[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고,
이를 구할 수 있다.
[12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고,
이를 설명할 수 있다.
[12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고,
이를 활용할 수 있다.

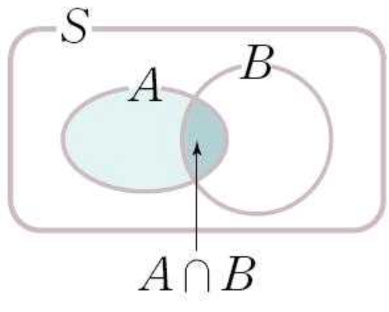
1 조건부확률 ❶

(1) 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정했을 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 '조건부확률'이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B \mid A)$$

와 같이 나타낸다.



(2) 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0)$$

1 조건부확률 ❷

☑ 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(B\,|\,A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 B, 즉 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이므로

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이 등식의 우변의 분모와 분자를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

1 조건부확률 ❸

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 홀수일 때, 그 수가 소수일 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},$$
$$A=\{1,\ 3,\ 5\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\},\ A\cap B=\{3,\ 5\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

1 조건부확률 ❹

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

[다른 풀이] $n(A) = 3$, $n(A \cap B) = 2$이므로

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}$$

1 조건부확률 ❺

예 오른쪽 표는 어느 학급 학생 32명을 대상으로 반바지로 된 생활복에 대한 찬성 여부를 조사하여 나타낸 것이다.

(단위: 명)

	찬성	반대	합계
남학생	13	4	17
여학생	8	7	15
합계	21	11	32

Ⓐ 이 학급에서 임의로 택한 한 명이 찬성한 학생일 때, Ⓑ 그 학생이 여학생일 확률을 구해 보자.

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{8}{21}$$

✡ 조건부확률의 성질

(1) $0 \le \mathrm{P}(B \mid A) \le 1$

(2) $\mathrm{P}(S \mid A) = \dfrac{n(A \cap S)}{n(A)} = \dfrac{n(A)}{n(A)} = 1$

$\mathrm{P}(A \mid S) = \dfrac{n(S \cap A)}{n(S)} = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \mathrm{P}(A)$

(3) $\mathrm{P}(\varnothing \mid A) = \dfrac{n(A \cap \varnothing)}{n(A)} = \dfrac{n(\varnothing)}{n(A)} = 0$

(4) B_1, B_2가 배반사건 $\Leftrightarrow B_1 \cap B_2 = \varnothing$

$$\mathrm{P}\left(B_1 \cup B_2 \mid A\right) = \mathrm{P}\left(B_1 \mid A\right) + \mathrm{P}\left(B_2 \mid A\right)$$

(5) $\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(B^C \mid A\right) = 1$

$\mathrm{P}\left(B \mid A^C\right) + \mathrm{P}\left(B^C \mid A^C\right) = 1$

2 확률의 곱셈정리 ❶

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$$

(단, $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$)

☑ $\mathrm{P}(A) > 0$일 때, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)$$

마찬가지로 $\mathrm{P}(B) > 0$일 때, 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

2 확률의 곱셈정리 ❷

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉡의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$

2 확률의 곱셈정리 ❸

예 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률을 구해 보자.

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{7},\ \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

✡ 세 사건에 대한 확률의 곱셈정리

세 사건 A, B, C에 대하여

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cap B\cap C)\\&=\mathrm{P}((A\cap B)\cap C)\\&=\mathrm{P}(A\cap B)\mathrm{P}(C\,|\,(A\cap B))\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\,|\,A)\mathrm{P}(C\,|\,(A\cap B))\end{aligned}$$

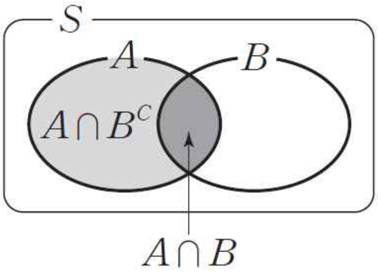
$\boxed{3}$ 확률의 곱셈정리의 활용 ❶

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}\left(B^{C}\right)\mathrm{P}\left(A\,\middle|\,B^{C}\right)$$

(단, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

☑ 두 사건 A, B에 대하여



$$A=(A\cap B)\cup\left(A\cap B^{C}\right)$$

이고, 두 사건 $A\cap B$와 $A\cap B^{C}$은

서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}\left(A\cap B^{C}\right)$$

이때 $0<\mathrm{P}(B)<1$이면 $0<\mathrm{P}\left(B^{C}\right)<1$이므로

확률의 곱셈정리에 의하여

3 확률의 곱셈정리의 활용 ❷

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$

3 확률의 곱셈정리의 활용 ❸

예 어느 회사는 같은 부품을 A공장에서 40%, B공장에서 60% 납품받는다. 두 공장 A, B에서 생산된 부품의 불량률은 각각 1%, 2%이다. 이 부품 중에서 임의로 한 개를 택할 때,

1000개	개수	불량품(E)
A공장	400	$400\times0.01=4$
B공장	600	$600\times0.2=12$
계	1000	16

(1) Ⓔ 택한 부품이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\frac{16}{1000}=\frac{2}{125}$$

(2) 택한 부품이 불량품일 때, 그 부품이 A공장에서 생산되었을 확률은 $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{n(E\cap A)}{n(E)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

3 확률의 곱셈정리의 활용 ❹

예 4개의 당첨 제비가 포함된 20개의 제비 중에서 두 사람이 차례대로 제비를 임의로 한 개씩 뽑을 때, 누가 더 유리한지 알아보자. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

$$\mathrm{P}(\text{먼저 뽑는 사람이 당첨}) = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{P}(\text{나중에 뽑는 사람이 당첨}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{19} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{5}$$

당첨 제비를 뽑을 확률은 뽑는 순서에 상관없이

$\frac{1}{5}$로 같으므로 뽑는 순서는 상관이 없다.

✡ 전확률의 정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A^C \cap B\right) \\ &= \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(A^C\right)\mathrm{P}\left(B \mid A^C\right)\end{aligned}$$

(2) 표본공간 S가 서로 배반인 사건 A_1, A_2, $\cdots$, A_n의 합집합으로 표시될 때,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B \mid A_i\right)$$

4 사건의 독립과 종속 ❶

(1) 사건의 독립

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고,
어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 '독립'이라고 한다.

(2) 사건의 종속

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때
두 사건 A와 B는 서로 '종속'이라고 한다.

☑ 두 사건 A와 B는 서로 종속일 때,

$$\mathrm{P}(B \mid A) \neq \mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A \mid B) \neq \mathrm{P}(A)$$

4 사건의 독립과 종속 ❷

(3) 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0\text{)}$$

☑ 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B)$
이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

④ 사건의 독립과 종속 ❸

☑ $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$인 두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(A \cap B^{C}\right) &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\{1 - \mathrm{P}(B)\} \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}\left(B^{C}\right)\end{aligned}$$

이므로 두 사건 A와 B^{C}은 서로 독립이다.

마찬가지로 두 사건 A^{C}과 B는 서로 독립이고,

두 사건 A^{C}와 B^{C}도 서로 독립이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B, 3의 배수의 눈이

④ 사건의 독립과 종속 ❹

나오는 사건을 C라 할 때, 두 사건 A와 B, 두 사건 B와 C가 서로 독립인지 종속인지를 각각 알아보자.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{3, 6\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $B \cap C = \{6\}$

이므로 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다. $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

✡ 사건의 독립과 종속 ❶

(1) ① 두 사건 A와 B가 서로 독립사건 : 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때 (= 복원추출)

② 두 사건 A와 B가 종속사건 : 서로 독립이 아닐 때 (= 비복원추출)

(2) A와 B가 서로 독립사건 (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

↳ (독립사건의 곱셈정리)

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A^C)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B^C)$

✡ 사건의 독립과 종속 ❷

(3) A, B가 독립 $\Leftrightarrow$ A, B^C가 독립

$\Leftrightarrow$ A^C, B가 독립 $\Leftrightarrow$ A^C, B^C가 독립

(4) $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때,

① A와 B가 독립 $\Rightarrow$ A와 B는 배반이 아니다.

② A와 B가 배반 $\Rightarrow$ A와 B는 독립이 아니다(종속).

($\because$ $\mathrm{P}(A\cap B)=0$)

❺ 세 사건 A, B, C가 서로 독립

$\Leftrightarrow$ ① $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

② $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

③ $\mathrm{P}(C\cap A)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)$

④ $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

✡ 두 사건이 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립일 필요충분조건은

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

(2) $\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\left(B\mid A^{C}\right)$

(3) $\mathrm{P}(A\mid B)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(A\mid B^{C}\right)$

5 독립시행의 확률

(1) 독립시행의 뜻

동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 ‘독립시행’이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}(1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) $$

이다.

✡ 독립시행

(1) 주사위나 동전을 여러 번 던지는 것과 같이 동일한 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 시행

(2) 매회 영향 없이 반복되는 시행

(3) 매회 일어나는 사건이 서로 독립

(4) 매회 일어날 확률이 일정한 시행

(5) 복원추출

(6) 주사위 던지기, 동전 던지기, 명중률, 정답률 등

예 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$${}_{4}\mathrm{C}_{2} = 6$$

이다. 이 6가지 경우를 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 6의 약수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 오른쪽 표와 같이 나타낼 수 있다. 이때 주사위를 던질 때마다 일어나는 사건은 서로 독립이고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 6가지 각 경우

에서 6의 약수의 눈이 2번 나오고 6의 약수가 아닌 눈이 2번 나올 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

이다. 또한 위의 표의 6가지 사건은 모두 배반사건이므

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$
○	×	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
○	×	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	○	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	○	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	×	○	○	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

로 구하는 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$이다.

✡ 독립시행의 확률

(1) 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p $(0 < p < 1)$ 일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$$\mathrm{P}_r(A) = {}_n\mathrm{C}_r\, p^r (1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(2) 1회 시행에서 사건 A, B, C가 일어날 확률을 각각 a, b, c라 하자. n회의 독립시행에서 A가 p회, B가 q회, C가 r회 일어날 확률은

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\,a^p b^q c^r \quad (\text{단, } p+q+r=n,\ a+b+c=1)$$

✡ 이항정리와 독립시행의 확률 ❶

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때,
$1-p=q$로 놓으면 이항정리에서

$$(p+q)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, q^n + {}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, p^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}$$

이므로 이 전개식의 일반항

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} = {}_n\mathrm{C}_r\, p^r (1-p)^{n-r}$$

은 이 시행을 n회 반복할 때 사건 A가 r회 일어날 확률과 같음을 알 수 있다.

✡ 이항정리와 독립시행의 확률 ❷

또한 여기에서 이 시행을 n회 반복할 때 사건 A가 k회 이상 일어날 확률은

$$\sum_{r=k}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이고, 사건 A가 적어도 m회 일어날 확률은

$$\sum_{r=m}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} = 1 - \sum_{r=0}^{m-1} {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.