23 해결 과정 두 등비수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = 6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면 $\frac{a_1-b_1}{1-r}=2$

이때 $a_1-b_1=1$이므로

$$\frac{1}{1-r}=2, \quad 1-r=\frac{1}{2}$$

즉, $r=\frac{1}{2}$

㉠과 ㉡에 $r=\frac{1}{2}$을 각각 대입하면

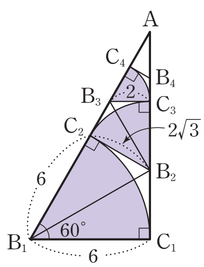
$a_1=4,\ b_1=3$ ▶ 70 %

답 구하기 따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이

$a_1b_1=4\times3=12$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = 16$$ ▶ 30 %

24 해결 과정 오른쪽 그림에서



$$S_1=\pi\times6^2\times\frac{60}{360}=6\pi$$

선분 B_1B_2를 그으면 삼각형 $B_1B_2C_2$에서

$\overline{B_1C_2} : \overline{B_2C_2}=\sqrt{3} : 1$

이므로

$6 : \overline{B_2C_2}=\sqrt{3} : 1, \quad \overline{B_2C_2}=2\sqrt{3}$

즉, $S_2=\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{60}{360}=2\pi$

선분 B_2B_3을 그으면 삼각형 $B_2B_3C_3$에서

$\overline{B_2C_3} : \overline{B_3C_3}=\sqrt{3} : 1$

이므로

$2\sqrt{3} : \overline{B_3C_3}=\sqrt{3} : 1, \quad \overline{B_3C_3}=2$

즉, $S_3=\pi\times2^2\times\frac{60}{360}=\frac{2}{3}\pi$ ▶ 70 %

답 구하기 따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 6π, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$S_1+S_2+S_3+\cdots=\frac{6\pi}{1-\frac{1}{3}}=9\pi$$ ▶ 30 %

Ⅱ 미분법

1 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한 53 ~ 58쪽

준비하기 (1) 5 (2) 2

생각 열기 ❶ 한없이 커진다. ❷ 0에 가까워진다.

문제 1 (1) ∞ (2) 0 (3) 0

문제 2 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$

문제 3 (1) ∞ (2) ∞ (3) $-\infty$

문제 4 (1) 2 (2) 0 (3) -1 (4) 1

생각 열기 ❶ 2.71828…에 한없이 가까워진다.
❷ 2.71828…에 한없이 가까워진다.

문제 5 (1) e^4 (2) $e^{\frac{1}{4}}$ (3) e^5

문제 6 (1) 0 (2) 7 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{3}$

문제 7 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{1}{\ln a}$ (4) $\ln a$

생각 넓히기 20, 시간이 많이 흐르면 물의 온도가 실내 온도에 가까워진다.

02 지수함수와 로그함수의 미분 60 ~ 62쪽

준비하기 $f'(x)=2x$

생각 열기 e

생각톡톡 예시 $f(x)=e^x$

문제 1 (1) $y'=2^{x-4}\ln 2$
(2) $y'=(3x+8)e^x$

함께하기 $\ln x,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x\ln a}$

문제 2 (1) $y'=\dfrac{(x\ln x+1)e^x}{x}$

(2) $y'=2x\log_6 x+\dfrac{x}{\ln 6}$

03 삼각함수의 덧셈정리

63~69쪽

준비하기 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$, $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

생각 열기 ❶ $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

❷ $\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{3}{4}$

문제 1 (1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) 2 (3) 1

문제 2 (1) $\triangle OAB \backsim \triangle OCD$이므로

$\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{OB}:\overline{OD}$

이때 $\overline{OA}=\overline{OD}=1$, $\overline{OB}=\cos\theta$이므로

$1:\overline{OC}=\cos\theta:1$

즉, $\overline{OC}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

(2) $\triangle OAB \backsim \triangle FOE$이므로

$\overline{OA}:\overline{FO}=\overline{AB}:\overline{OE}$

이때 $\overline{OA}=\overline{OE}=1$, $\overline{AB}=\sin\theta$이므로

$1:\overline{FO}=\sin\theta:1$

즉, $\overline{OF}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$

(3) $\triangle OCD \backsim \triangle FOE$이므로

$\overline{OD}:\overline{FE}=\overline{CD}:\overline{OE}$

이때 $\overline{OD}=\overline{OE}=1$, $\overline{CD}=\tan\theta$이므로

$1:\overline{FE}=\tan\theta:1$

즉, $\overline{EF}=\dfrac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$

문제 3 (1)
$$\begin{aligned}1+\cot^2\theta&=1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\\&=\csc^2\theta\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\tan\theta+\cot\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\\&=\csc\theta\sec\theta\end{aligned}$$

생각 열기 ❶ $\overline{AB}^2=2-2\cos 65^\circ$,

$\overline{CD}^2$

$=2-2(\cos 40^\circ\cos 25^\circ-\sin 40^\circ\sin 25^\circ)$

❷ $\cos 65^\circ=\cos(40^\circ+25^\circ)$

$=\cos 40^\circ\cos 25^\circ-\sin 40^\circ\sin 25^\circ$

함께하기 ❶
$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

❸
$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

문제 4 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $2+\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

문제 5 (1) $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$ (2) $-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$ (3) $\dfrac{48-25\sqrt{3}}{11}$

문제 6 (1)
$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\tan 2\alpha&=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}\\&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

문제 7 $\dfrac{\pi}{4}$

문제 8 13.6 m

생각 넓히기 ❶ (1) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$에서

α 대신 $\dfrac{\alpha}{2}$를 대입하면

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

(2) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$=2(1-\sin^2\alpha)-1$

$=1-2\sin^2\alpha$

α 대신 $\dfrac{\alpha}{2}$를 대입하면

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

이므로 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

❷ $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

탐구 & 융합 70쪽

$$\frac{1}{2}ab\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}b\cos\alpha\times a\cos\beta-\frac{1}{2}a\sin\beta\times b\sin\alpha$$

이므로 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

04 삼각함수의 극한 71~74쪽

준비하기 4

생각 열기 $\lim_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

문제 1 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\infty$

문제 2 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

문제 3 (1) 4 (2) 1

문제 4 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) -1

생각 넓히기 ❶ 0

❷ 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$0\le\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$이므로

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

이때 $\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$$

따라서 $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$이다.

05 삼각함수의 미분 75~76쪽

준비하기 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

생각 열기 1

함께하기 ❶ $\cos(x+h)-\cos x$

$=\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x$

$=-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)$

❷ $\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)}{h}$

$=-\sin x\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}-\cos x\lim_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h}$

$=-\sin x$

문제 1 (1) $y'=3\cos x-\sin x$

(2) $y'=x(2\cos x-x\sin x)$

(3) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

(4) $y'=2\sin x\cos x$

Ⅱ-1 중단원 마무리하기 77~80쪽

01 (1) 1로 수렴한다. (2) 발산한다.
(3) -2로 수렴한다. (4) 1로 수렴한다.

02 (1) $y'=2e^{2x}$ (2) $y'=3\times 2^{3x+1}\ln 2$
(3) $y'=\dfrac{3}{x}$ (4) $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$

03 $\csc\theta=\dfrac{5}{4}$, $\sec\theta=-\dfrac{5}{3}$, $\cot\theta=-\dfrac{3}{4}$

04 (1) $-\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$ (2) $-\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

05 (1) $y'=2+3\cos x$

(2) $y'=2x\cos x-(x^2-1)\sin x$

06 (1) -1 (2) $\dfrac{1}{2\ln 3}$

07 문제 이해 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-3}{e^x-1}=1$에서

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. ▶ 20 %

해결 과정 즉, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-3)=0$이므로

$b=9$

$b=9$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+9}-3)(\sqrt{ax+9}+3)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\times\frac{a}{\sqrt{ax+9}+3}\right\}$$
$$=\frac{a}{6}$$

이때 $\dfrac{a}{6}=1$이므로 $a=6$ ▶ 60 %

답 구하기 $ab=6\times 9=54$ ▶ 20 %

08 8

09 $e^{\frac{1}{e-1}}$

10 (1) 2 (2) $2\sqrt{2}$

11 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12 (1) 2 (2) 1 (3) 2

13 7

14 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)}-1}{x-2}$$

이때 $x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)}-1}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{3t}-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{3t}-1}{3t}\times 3=3$$

15 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ ...... ①

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ...... ②

①과 ②의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$ ...... ③

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ ...... ④

③과 ④를 더하여 정리하면

$2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\dfrac{3}{4}$,

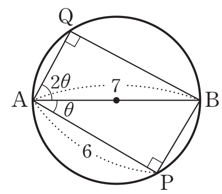
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{5}{8}$

따라서 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{5}{8}$

16 문제 이해 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\angle QAB=2\theta$ ▶ 10 %

해결 과정 삼각형 APB에서



$\cos\theta=\dfrac{6}{7}$

또, 삼각형 AQB에서

$\cos 2\theta=\dfrac{\overline{AQ}}{7}$ ▶ 40 %

답 구하기 $\overline{AQ}=7\cos 2\theta=7(2\cos^2\theta-1)$

$=7\left\{2\times\left(\dfrac{6}{7}\right)^2-1\right\}=\dfrac{23}{7}$ ▶ 50 %

17 $\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=6-6\cos\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{6(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{6(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{6(1-\cos^2\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{6\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=6\times\frac{1}{2}=3$$

18 $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\sin 4h+h^2\cos\frac{1}{h}-0}{h}$$
$$=12\lim_{h\to 0}\frac{\sin 4h}{4h}+\lim_{h\to 0}h\cos\frac{1}{h}$$

이때 $-|h|\le h\cos\dfrac{1}{h}\le|h|$이고, $\lim_{h\to 0}|h|=0$이므로

$\lim_{h\to 0}h\cos\dfrac{1}{h}=0$

따라서 $f'(0)=12\times 1+0=12$

2 여러 가지 미분법

01 함수의 몫의 미분법 82~85쪽

준비하기 $y'=6x^2-10x-3$

생각 열기 ❶ $\Delta y=-\dfrac{\Delta x}{a(a+\Delta x)}$

❷ $-\dfrac{1}{a^2}$

함께하기 $g(x),\ g(x),\ g(x),\ -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

문제 1 (1) $y'=-\dfrac{3x^2}{(x^3+2)^2}$ (2) $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

문제 2 (1) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}(\cot x)'&=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'\\&=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}\\&=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}\\&=-\frac{1}{\sin^2 x}\\&=-\csc^2 x\end{aligned}$$

따라서 $(\cot x)'=-\csc^2 x$이다.

(2) $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}(\csc x)'&=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}\\&=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\\&=-\csc x\cot x\end{aligned}$$

따라서 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$이다.

문제 3 (1) $y'=2\sec^2 x-\csc^2 x$

(2) $y'=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(3) $y'=\dfrac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

(4) $y'=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

문제 4 (1) $y'=-\dfrac{6}{x^7}$ (2) $y'=\dfrac{12}{x^5}$

(3) $y'=1-\dfrac{2}{x^3}$ (4) $y'=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5}{x^6}$

02 합성함수의 미분법 86~89쪽

준비하기 (1) $f(g(x))=3x+2$

(2) $g(f(x))=3x+6$

생각 열기 ❶ $y=(2x-1)^2,\ \dfrac{dy}{dx}=8x-4$

❷ $8x-4$, 같다.

문제 1 (1) $y'=6(2x+3)(x^2+3x)^5$

(2) $y'=3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

(3) $y'=2e^{2x+1}$

(4) $y'=-3\sin x\cos^2 x$

함께하기 ❶ $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

❷ $y'=\{\ln(-x)\}'=\dfrac{1}{-x}\times(-x)'$

$$=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$$

문제 2 (1) $y'=-\tan x$ (2) $y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

문제 3 (1) $y'=\pi x^{\pi-1}$

(2) $y'=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$

(3) $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

생각 넓히기 $y=\{f(x)\}^n$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=n\ln|f(x)|$$

이 식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{nf'(x)}{f(x)}$이므로

$$\begin{aligned}y'&=y\times\frac{nf'(x)}{f(x)}\\&=\{f(x)\}^n\times\frac{nf'(x)}{f(x)}\\&=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)\end{aligned}$$

03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 90~92쪽

준비하기 (1) $y'=8(2x+7)^3$

(2) $y'=-2\sin(2x+1)$

생각 열기 $y=x^2-5x+6$ (단, $x\geq 2$)

문제 1 (1) $y=2x+5$ (2) $y=x^2$

(3) $y=-\dfrac{x^2}{5}$ (4) $y=e^{2x+6}$

문제 2 (1) $\dfrac{dy}{dx}=t^2$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2}{2t-5}\left(\text{단, } t\neq\dfrac{5}{2}\right)$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\cot t$ (단, $t\neq n\pi$, n은 정수)

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(1+t)^2}{2(2+t)^2}$

생각 넓히기 ❶ $x=r(\theta-\sin\theta)$, $y=r(1-\cos\theta)$

❷ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ (단, $0<\theta<2\pi$)

탐구 & 융합 93쪽

탐구 ❶ $\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{3}{4}(\sin\theta-\sin 3\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{3}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)$

❷ $\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{9}{8}$

❸ $-\sqrt{3}$

04 음함수와 역함수의 미분법 94~97쪽

준비하기 (1) $y=x^2$ $(x\geq 0)$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

생각 열기 ❶ 함수의 그래프가 아니다.

❷ 둘 다 함수의 그래프이다.

문제 1 (1) $2x-y+5=0$

(2) $\sqrt{x^2-1}-y=0$

문제 2 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq 0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2}$ (단, $x\neq -2$)

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y^3-y}$ (단, $y\neq 0$)

(4) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+1}{x+\sin y}$ (단, $x+\sin y\neq 0$)

문제 3 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^2}}$

문제 4 $\sqrt{2}$

생각 넓히기 ❶ $f'(1)=\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=f'(1)$이다.

한편, $f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(1)=5$

❷ $(f^{-1})'(4)=\dfrac{\overline{\mathrm{P'Q'}}}{\overline{\mathrm{Q'R'}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}}$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\overline{\mathrm{QR}}=f'(1)=5$이므로

$(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$

05 이계도함수 98~99쪽

준비하기 (1) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (2) $y'=2e^{2x}$

생각 열기 ❶ $7.4t$ m/s

❷ 7.4 m/s^2

문제 1 (1) $y''=48(-2x+1)^2$ (2) $y''=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

(3) $y''=-9\cos 3x$ (4) $y''=25e^{5x+1}$

문제 2 (1) $y''=-\dfrac{2}{(x+2)^3}$

(2) $y''=-2\sin x-x\cos x$

(3) $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(4) $y''=2\cos^2 x-2\sin^2 x$

문제 3 $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

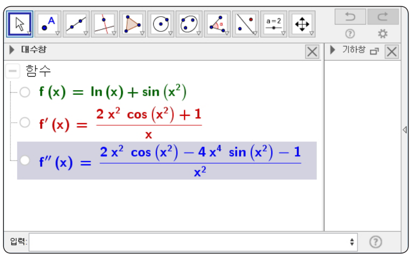
$y''=-2e^{-x}\cos x$

따라서

$$y''+2y'+2y$$
$$=-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}(\cos x-\sin x)+2e^{-x}\sin x$$
$$=0$$

생각 넓히기 예시 $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\sin x$

공학적 도구 100쪽



Ⅱ-2 중단원 마무리하기 101~104쪽

01 (1) $y'=-\dfrac{2x^2+4x-1}{(2x^2+1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{1-x\ln x+2x}{xe^x}$

(3) $y'=8(3x^2-2)(2x^3-4x+1)^3$

(4) $y'=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$

02 (1) $\dfrac{dy}{dx}=2t$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-32(t+1)^3$

03 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{3y}$ (단, $y\neq0$) (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2xy^2}{x}$

04 (1) $y'=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{(x+3)^5}}$ (2) $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-5)^2}}$

05 (1) $y''=-\dfrac{1}{2x\sqrt{2x}}$

(2) $y''=6\cos 3x-9x\sin 3x$

(3) $y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$

(4) $y''=-\dfrac{1}{x}$

06 -30

07 $x<-1$, $x>4$

08 3

09 문제 이해 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)$$
$$=f'(0)g'(-1)$$ ▶ 30 %

해결 과정 $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x-5)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-5)^2}$

$$=\frac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$$

이므로 $f'(0)=-\dfrac{3}{25}$

$g'(x)=2x+1$

이므로 $g'(-1)=-1$ ▶ 50 %

답 구하기 $h'(-1)=\left(-\dfrac{3}{25}\right)\times(-1)$

$$=\frac{3}{25}$$ ▶ 20 %

10 2

11 $\dfrac{\pi}{9.8}$

12 -10

13 1

14 $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=0$, $c=0$, $d=\dfrac{1}{4}$

15 $(f\circ g)(0)=3$에서

$f(g(0))=f(e)=3$

또, $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고

$g'(x)=e^{x^3+x+1}(3x^2+1)$이므로

$(f\circ g)'(0)=e$에서 $f'(g(0))g'(0)=f'(e)\times e=e$

즉, $f'(e)=1$

$f(x)$를 이차식 $(x-e)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-e)^2Q(x)+ax+b$ …… ①

로 놓을 수 있다.

①의 양변에 $x=e$를 대입하면

$f(e)=ea+b$, 즉 $ea+b=3$ …… ②

①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-e)Q(x)+(x-e)^2Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=e$를 대입하면

$f'(e)=a$, 즉 $a=1$

$a=1$을 ②에 대입하면 $b=3-e$이므로

$R(x)=x+3-e$

따라서 구하는 값은 $R(-3)=-e$

16 해결 과정 $\dfrac{dx}{dt}=1+3t^2+5t^4+\cdots+199t^{198}$

$\dfrac{dy}{dt}=2t+4t^3+6t^5+\cdots+200t^{199}$ ▶ 30 %

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+4t^3+6t^5+\cdots+200t^{199}}{1+3t^2+5t^4+\cdots+199t^{198}}$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1}\frac{2t+4t^3+6t^5+\cdots+200t^{199}}{1+3t^2+5t^4+\cdots+199t^{198}}=\frac{2+4+6+\cdots+200}{1+3+5+\cdots+199}=\frac{\frac{100(2+200)}{2}}{\frac{100(1+199)}{2}}=\frac{101}{100}$$ ▶ 40 %

17 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=\dfrac{1}{3}$에서 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

이때 함수 $f(x)$는 연속이므로

$f(1)=2$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{3}$$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(1)=2$에서

$g(2)=1$

따라서 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$

18 $f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=e^{ax+b}(1+ax)$

$f''(x)=ae^{ax+b}(1+ax)+ae^{ax+b}$

$=ae^{ax+b}(2+ax)$

$f'(0)=1$에서 $e^b=1$

$f''(0)=2$에서 $2ae^b=2$

따라서 $a=1,\ b=0$

3 도함수의 활용

01 접선의 방정식 106~108쪽

준비하기 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

생각 열기 ❶ -1

❷ 예시 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식이 $y-b=m(x-a)$임을 이용하면, 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.

문제 1 (1) $y=-3x+4$ (2) $y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}$

(3) $y=\dfrac{1}{e}x$ (4) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

문제 2 (1) $y=x$ (2) $y=x+1$

(3) $y=x-1+\ln 3$ (4) $y=x+\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

문제 3 $\dfrac{6\sqrt{3}+\pi}{12}$

문제 4 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\dfrac{1}{2}x$

(3) $y=-e^2x-e^2$ (4) $y=\dfrac{1}{e^3}x+2$

생각 넓히기 ❶ $x_1x+y_1y=r^2$

❷ $x_1x+y_1y=r^2$

❸ 활동 ❶과 활동 ❷의 결과는 서로 같다.

탐구 & 융합 109쪽

1.26

02 함수의 그래프 110~117쪽

준비하기 $x=1,\ x=3$

생각 열기 ❶ 증가하는 구간: $(0,\ 2)$

감소하는 구간: $(-\infty,\ 0),\ (2,\ \infty)$

❷ $x=0,\ x=2$

문제 1 (1) 구간 $(0,\ 1]$에서 증가하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

(2) 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

문제 2 (1) 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

(2) 극댓값: $\dfrac{4}{e^2}$, 극솟값: 0

함께하기 ❶ 음, 양, 극소
❷ 양, 음, 극대

문제 3 (1) 극댓값: 1, 극솟값: -1
(2) 극솟값: 2

(3) 극솟값: $-\dfrac{1}{2e}$

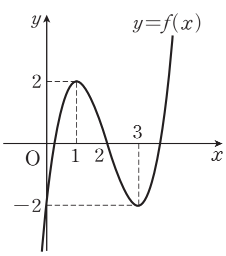
(4) 극댓값: $\dfrac{7}{6}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값: $\dfrac{11}{6}\pi-\sqrt{3}$

문제 4 (1) 열린구간 $(-1, 1)$에서 아래로 볼록, 구간 $(-\infty, -1)$과 $(1, \infty)$에서 위로 볼록
(2) 열린구간 $(0, \pi)$에서 아래로 볼록, 열린구간 $(\pi, 2\pi)$에서 위로 볼록

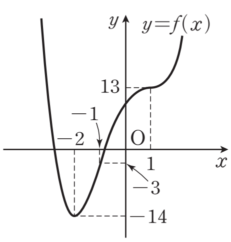
문제 5 (1) $(0, -1)$, $(2, -17)$

(2) $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

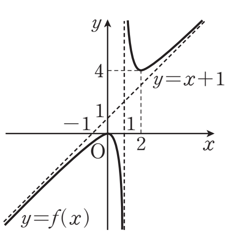
문제 6 (1)



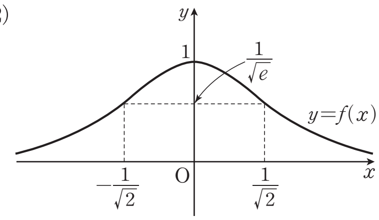
(2)



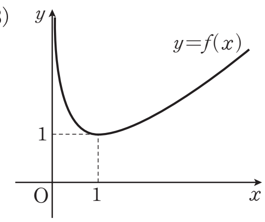
문제 7 (1)



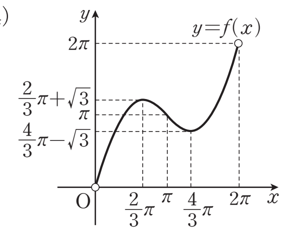
(2)



(3)



(4)



문제 8 (1) 최댓값: e^2-2, 최솟값: 1
(2) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: -1

생각 넓히기 ❶ $S(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

❷ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

탐구 & 융합 118쪽

5분

03 방정식과 부등식에의 활용 119~120쪽

준비하기 1

생각 열기 ❶ 1 ❷ 2

문제 1 (1) 1 (2) 1

문제 2 (1) $k<-\dfrac{5}{4}$일 때 0, $k=-\dfrac{5}{4}$ 또는 $k>-1$일 때 1, $-\dfrac{5}{4}<k\le-1$일 때 2

(2) $k<0$일 때 또는 $k=e$일 때 1, $0\le k<e$일 때 0, $k>e$일 때 2

문제 3 (1) $f(x)=x-\sin x$라 하면

$$f'(x)=1-\cos x\ge 0$$

이므로 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.
$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때,

$$f(x)>0, \quad 즉 \quad x-\sin x>0$$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x>\sin x$가 성립한다.

(2) $f(x)=x-\ln(1+x)$라 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

이므로 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.
$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때,

$$f(x)>0, \quad 즉 \quad x-\ln(1+x)>0$$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x>\ln(1+x)$가 성립한다.

문제 4 $k\le -1$

04 속도와 가속도 121 ~ 123쪽

준비하기 (1) $f'(t)=-2\sin 2t$
(2) $f''(t)=-4\cos 2t$

생각 열기 속도: 20 m/s, 가속도: -10 m/s^2

문제 1 속도: $e^{\frac{\pi}{2}}$, 가속도: 0

생각 열기 ❶ $(200, 230)$ ❷ $(100, 80)$

문제 2 (1) 속도: $\left(-\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t, \frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t\right)$

가속도: $\left(-\frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}t, -\frac{4\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right)$

(2) 속도: $(e^t(\cos t-\sin t), e^t(\sin t+\cos t))$

가속도: $(-2e^t\sin t, 2e^t\cos t)$

생각 넓히기 ❶ $x=R\cos\omega t, y=R\sin\omega t$
❷ 속도: $(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t)$
가속도: $(-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t)$
❸ 속력: $R\omega$, 가속도의 크기: $R\omega^2$

Ⅱ-3 중단원 마무리하기 124 ~ 127쪽

01 (1) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{2}{e}x$

02 (1) 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하다. 이때 변곡점의 좌표는 $(1, -1)$이다.
(2) 구간 $(-\infty, 2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 아래로 볼록하다. 이때 변곡점의 좌표는 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$이다.

03 2

04 $f(x)=\sin x-x\cos x$라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x-\cos x+x\sin x\\&=x\sin x\end{aligned}$$

이때 $0\le x\le\pi$이므로

$$f'(x)=x\sin x\ge 0$$

따라서 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가한다.
또, $f(0)=0$이므로 $0\le x\le\pi$일 때,

$$f(x)\ge 0$$

즉, $\sin x\ge x\cos x$

따라서 $0\le x\le\pi$일 때, 부등식 $\sin x\ge x\cos x$가 성립한다.

05 속도: $1-\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t$

가속도: $-\frac{2}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t$

06 $y=-x+2$

07 해결 과정 $f(x)=e^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x$$

곡선 $f(x)=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1)$$

즉, $y=ex$ ▶ 30 %

직선 $y=ex$가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접하므로 방정식 $ex=2\sqrt{x-k}$는 중근을 갖는다.
$ex=2\sqrt{x-k}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$e^2x^2=4(x-k), \qquad e^2x^2-4x+4k=0$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 이차방정식 $e^2x^2-4x+4k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-e^2\times4k=0$$

즉, $k=\frac{1}{e^2}$ ▶ 40 %

08 $1+\sqrt{3}$

09 $\frac{9}{8}+\ln 4$

10 $7e$

11 $0\le a\le1$

12 $\frac{1}{e}<k<e$

13 $k\le 2e-2$

14 $\frac{90\sqrt{109}}{109}$ m/s

15 $f(x)=xe^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(a)=e^a(a+1)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-ae^a=e^a(a+1)(x-a)$$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 지나므로

$$-ae^a=e^a(a+1)(1-a)$$

$$a^2-a-1=0$$

위의 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\begin{aligned}e^\alpha(\alpha+1)e^\beta(\beta+1)&=e^{\alpha+\beta}(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\\&=e^1(-1+1+1)\\&=e\end{aligned}$$

16 **해결 과정** 점 A의 좌표를 $(a,\ e^a)(a<0)$이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 방정식은

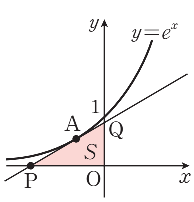
$$y-e^a=e^a(x-a)$$ ▶ 20 %

접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$$\mathrm{P}(a-1,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ (1-a)e^a)$$

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times|a-1|\times(1-a)e^a$$ ▶ 20 %



이때 a를 x로 바꾸어 S를 x에 대한 식으로 나타내면

$$S=\frac{(1-x)^2e^x}{2}$$

$S'=\frac{(x+1)(x-1)e^x}{2}$이므로 $S'=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
S'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
S	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

▶ 40 %

답 구하기 따라서 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다. ▶ 20 %

17 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$h(0)=f(0)-g(0)=-2$$

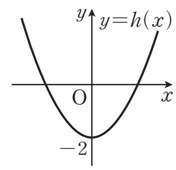
$x>0$일 때, $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

$x<0$일 때, $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

이때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 그릴 수 있다.

(i) $h(x)=0$의 실근의 개수가 최대인 경우

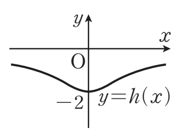
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$



즉, 실근의 최대 개수는 2이다.

(ii) $h(x)=0$의 실근의 개수가 최소인 경우

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$이면 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, 실근의 최소 개수는 0이다.

따라서 $M=2,\ m=0$이므로

$$M+m=2$$

18 (1) 최고 높이에서의 속도는 $\frac{dy}{dt}=0$이므로

$\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha-gt$에서

$$v_0\sin\alpha-gt=0$$

따라서 $t=\frac{v_0}{g}\sin\alpha$

(2) 돌의 속도는

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha-gt$$

이므로 $(v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha-gt)$

즉, 돌의 속력은

$$\sqrt{v_0^{\,2}\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}$$
$$=\sqrt{v_0^{\,2}-2v_0\sin\alpha\times gt+g^2t^2}$$

이때 돌이 수평면에 닿는 순간은 $y=0$이므로

$v_0(\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2=0$에서

$$t=\frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

따라서 돌이 수평면에 닿는 순간의 속력은

$$\sqrt{v_0^{\,2}-2v_0\sin\alpha\times g\times\frac{2v_0}{g}\sin\alpha+g^2\times\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{v_0^{\,2}}=v_0$$

Ⅱ 대단원 평가하기 128~131쪽

01 ④

02 $a=2,\ b=1$

03 ④

04 ③

05 $\lim_{x\to0}\frac{2(\tan x-\sin x)}{x^3}$

$$=(-2)\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

에서

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3}\times\frac{\cos x-1}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{-\sin^3x}{x^3}\times\frac{1}{\cos x(\cos x+1)}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{2(\tan x-\sin x)}{x^3}=(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

06 $f(0)=-1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-(-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}$$

여기서 $\sin x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$$
$$=f'(0)$$

이때 $f'(x)=\cos x+\sin x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)+1}{x}=f'(0)=1$$

07 ③

08 ⑤

09 ②

10 ③

11 ④

12 $y''=2e^x\cos(x-\pi)$

13 ④

14 ④

15 $a=12,\ b=-12$

16 $f'(x)=-e^x-xe^x=-e^x(x+1)=0$

에서 $x=-1$

$f''(x)=-e^x(x+1)-e^x=-e^x(x+2)=0$

에서 $x=-2$

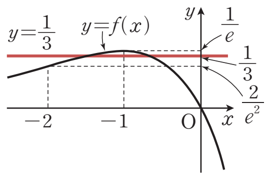
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	⤴	$\frac{2}{e^2}$ (변곡점)	↗	$\frac{1}{e}$ (극댓값)	↘

ㄱ. $f''(-1)<0$이므로 주어진 함수는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

ㄴ. 주어진 함수의 변곡점의 좌표는 $\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$이다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{3}$과 두 점에서 만나므로 방정식



$f(x)=\frac{1}{3}$의 실근의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 $k\le 1$ **18** ③

19 문제 이해 $g(x)=e^{x+1}f(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-3}{x-1}=2e$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)-3\}=0$이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=3$ ▶ 30 %

해결 과정 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $g(1)=\lim_{x\to1}g(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x+1}f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=2e$$ ▶ 40 %

답 구하기 이때 $g'(x)=e^{x+1}f(x)+e^{x+1}f'(x)$이므로

$$g'(1)=e^2f(1)+e^2f'(1)=2e$$

따라서 $f(1)+f'(1)=\frac{2}{e}$ ▶ 30 %

20 해결 과정 $f(3x-2)=3x^2-6x+1$에서

$3f'(3x-2)=6x-6$ ▶ 30 %

이므로 $f'(3x-2)=2x-2$ ▶ 30 %

답 구하기 $3x-2=7$에서 $x=3$이므로 ▶ 20 %

$f'(7)=2\times3-2=4$ ▶ 20 %

21 문제 이해 $f(x)=(x-1)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ▶ 10 %

해결 과정 접점의 좌표를 $(k, (k-1)e^k)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(k-1)e^k=ke^k(x-k)$ ▶ 10 %

이 접선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-(k-1)e^k=ke^k(a-k)$,

$k^2-(a+1)k+1=0$ …… ① ▶ 20 %

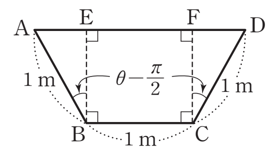
이차방정식 ①이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 하므로 ①의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4=(a+3)(a-1)>0$

에서 $a<-3$ 또는 $a>1$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 a의 값이 될 수 없는 정수는 -3, -2, -1, 0, 1의 5개이다. ▶ 30 %

22 문제 이해 다음 그림과 같이 꼭짓점 B, C에서 변 AD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



▶ 10 %

해결 과정 $\angle ABE=\angle DCF=\theta-\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{AE}=\overline{DF}=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$$

$$\overline{BE}=\overline{CF}=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$$

수로의 단면의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=$(사다리꼴 ABCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(2-2\cos\theta)\times\sin\theta$

$=\sin\theta(1-\cos\theta)$ ▶ 30 %

$S'(\theta)=\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta\sin\theta$

$S'(\theta)=\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=0$에서

$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$,

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

그런데 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, 즉 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ▶ 40 %

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

답 구하기 따라서 수로의 단면의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}^2$이다. ▶ 20 %