Ⅱ_1. 복소수의 뜻과 성질, 사칙연산

[10공수1-02-01] 복소수의 뜻과 성질을 설명하고,
사칙연산을 수행할 수 있다.

A : 복소수의 뜻과 성질을 이해하여 설명할 수 있으며, 복소수의 성질을 이용하여 사칙연산을 수학적 절차에 따라 체계적으로 수행할 수 있다.

B : 복소수의 뜻과 성질을 이해하여 설명할 수 있으며, 사칙연산을 수행할 수 있다.

C : 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 수행할 수 있다.

D : 복소수의 뜻을 알고, 간단한 사칙연산을 수행할 수 있다.

E : 복소수의 뜻을 알고, 안내된 절차에 따라 간단한 사칙연산을 수행할 수 있다.

✡ 실수의 분류

$$\text{실수}(R)\begin{cases}\text{유리수}(Q)\begin{cases}\text{정수}(Z)\begin{cases}\text{자연수}(N)\\ \quad 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수(분수)}\end{cases}\\ \text{무리수}(I)\end{cases}$$

☑ 자연수 : Natural number ⇒ N

☑ 정수 : Integral number → Zahlen(독일어, 수) ⇒ Z

☑ 유리수 : Rational number → 有理數, Quotient ⇒ Q

$$\Rightarrow \frac{n}{m}\ (m,\ n\text{은 서로소인 정수},\ m \neq 0)\text{의 꼴}$$

☑ 무리수 : Irrational number → 無理數 ⇒ I

☑ 실수 : Real number ⇒ R

1 허수단위 i ⇔ imaginary unit

(1) 허수단위 : 제곱하여 -1이 되는 수 중에서 하나는 i로 나타내고, 이를 '허수단위'라 한다. 즉,

$$i^2=-1,\ \sqrt{-1}=i$$

(2) $i=\sqrt{-1},\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$

허수단위

$i=\sqrt{-1}$

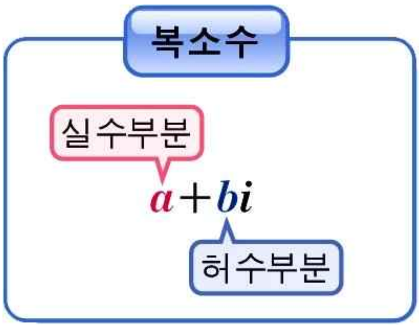
$i^2=-1$

2 복소수(Complex Number)의 정의

(1) a, b가 실수일 때, $a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있는 수를 '복소수'라 하고, a를 '실수부분', b를 '허수부분'이라 한다.

a, b가 실수일 때, 복소수

$$a+bi=\begin{cases} 실수\quad a & (b=0일\ 때) \\ 허수\ a+bi & (b\neq 0일\ 때) \end{cases}$$

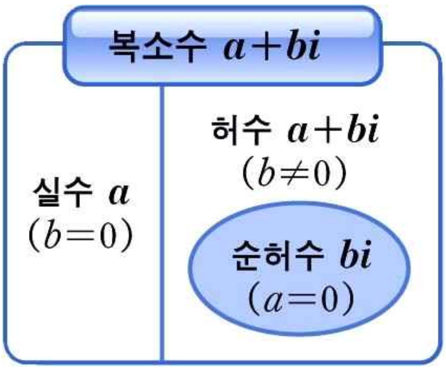


(2) 허수의 성질

① 실수부분이 0인 허수를 '순허수'라 한다.

② 허수는 대소 관계를 갖지 않는다.

✡ 복소수($z = a + bi$)의 분류



실수 a, b에 대하여

$$
\text{복소수}\begin{cases}
\text{실수} : a\,(b=0) \\
\quad \Leftrightarrow z^2 \geq 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \\
\text{허수} : a + bi\,(b \neq 0) \begin{cases}
\text{순허수} : bi\,(a = 0,\ b \neq 0) \\
\quad \Leftrightarrow z^2 < 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \\
\text{기타의 허수} : a + bi\,(a \neq 0,\ b \neq 0)
\end{cases}
\end{cases}
$$

☑ $(\text{실수})^2 \geq 0$, $(\text{순허수})^2 < 0$

3 두 복소수가 서로 같을 조건 ⇔ 복소수의 상등

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$

(2) $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d$

(3) 두 복소수가 서로 같을 조건 확장

x가 허수일 때,

$a + bx = c + dx \Leftrightarrow a = c,\ b = d$

4 복소수의 기본 연산

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) 덧셈 : $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) 뺄셈 : $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) 곱셈 : $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 나눗셈 : $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(단, $c+di\neq 0$)

5 켤레복소수

켤레복소수

$\overline{a+bi}=a-bi$

복소수 $z=a+bi$(a, b는 실수)에 대하여

(1) 켤레복소수 : $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

$\Leftrightarrow$ 허수부분의 부호를 바꾼 복소수

① $z+\overline{z}=2a$ (실수) ② $z-\overline{z}=2bi$ (순허수)

③ $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$(실수)

(2) 켤레복소수의 성질 : 복소수 α, β에 대하여

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ ② $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

③ $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ ④ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ (단, $\beta\neq 0$)

⑤ $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

✡ 복소수와 켤레복소수의 성질

복소수 $z=a+bi$(a, b는 실수)에 대하여

(1) $\overline{z}=z \Leftrightarrow z$는 실수

(2) $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z$는 순허수 또는 0

(3) $z+\overline{z}$와 $z\overline{z}$는 실수

(4) $z^2 \geq 0 \Leftrightarrow z$는 실수

(5) $z^2 < 0 \Leftrightarrow z$는 순허수

(6) z가 순허수가 아닌 허수 $\Rightarrow z^2$은 허수

6 음의 실수의 제곱근 ❶

(1) 음의 실수의 제곱근의 성질

① $a>0$이면 $\Rightarrow \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

② $a<0$이면 $\Rightarrow \sqrt{-a}=-\sqrt{a}\,i$

(2) 음의 실수의 제곱근의 계산

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab} \Leftrightarrow a \leq 0,\ b \leq 0 \Leftrightarrow$ 모두 음수

그 외의 경우는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}} \Leftrightarrow a \geq 0,\ b<0 \Leftrightarrow$ 분모만 음수

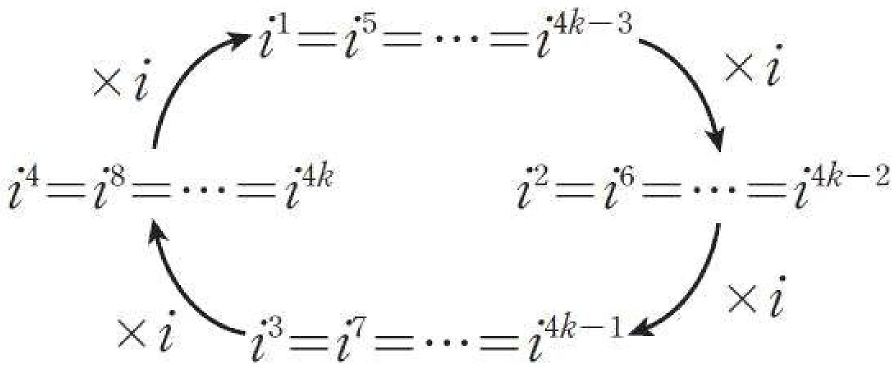
그 외의 경우는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

6 음의 실수의 제곱근 ❷

(3) ① $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a<0,\ b<0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{\dfrac{a}{b}} \Leftrightarrow a>0,\ b<0$

✡ i^n의 규칙



(1) $i^{4n+1}=i$

(2) $i^{4n+2}=-1$

(3) $i^{4n+3}=-i$

(4) $i^{4n}=1$

☑ $i^{4n+k}=i^k$ (단, $k=0,1,2,3$)

✡ 자주 나오는 복소수의 계산

(1) $(1\pm i)^2=\pm 2i$, $(1+i)(1-i)=2$

(2) $\left(\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2=\pm i$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1\pm i}\right)^2=\mp i$

(3) $\dfrac{1+i}{1-i}=i$, $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

(4) $\dfrac{1}{i}=-i$

✡ 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 허근의 성질

$\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$일 때,

(1) $\omega^3 = 1$

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(3) $\omega + \overline{\omega} = -1$

(4) $\omega\overline{\omega} = 1$

(5) $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = \omega^2$ (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

✡ 방정식 $x^3 + 1 = 0$의 허근의 성질

$\omega = \dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$일 때,

(1) $\omega^3 = -1$, $\omega^6 = 1$

(2) $\omega^2 - \omega + 1 = 0$

(3) $\omega + \overline{\omega} = 1$

(4) $\omega\overline{\omega} = 1$

(5) $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = -\omega^2$ (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)