확률과 통계 해설 및 정답

Ⅰ-1 순열과 조합

01 여러 가지 순열

기본

01 답 (1) 125 (2) 1024

(1) ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

(2) ${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$

02 답 (1) 2520 (2) 2520 (3) 15120

(1) $\dfrac{7!}{2!} = 2520$

(2) $\dfrac{7!}{2!} = 2520$

(3) $\dfrac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 15120$

03 답 (1) 210 (2) 60 (3) 150

가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

(1) $\dfrac{10!}{6! \times 4!} = 210$ …… ㉠

(2) 점 A에서 점 P로 가는 최단 경로의 수는 가로가 3칸, 세로가 2칸이므로
$a,\ a,\ a,\ b,\ b$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.
$\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$
점 P에서 점 Q로 가는 최단 경로의 수는 a뿐이므로 1가지 점 Q에서 점 B로 가는 최단 경로의 수는 가로가 2칸, 세로가 2칸이므로
$a,\ a,\ b,\ b$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.
$\dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$
따라서 점 A에서 선분 PQ를 거쳐 점 B로 가는 최단 경로의 수는
$10 \times 1 \times 6 = 60$ …… ㉡

(3) 점 A에서 출발하여 선분 PQ를 거치지 않고 점 B로 가는 최단 경로의 수는 모든 경우의 수 ㉠에서 선분 PQ를 거치는 경우의 수 ㉡를 빼면 되므로
$210 - 60 = 150$

04 답 (1) 144 (2) 144

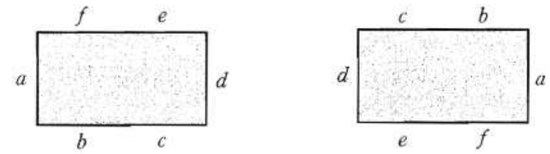
(1) $(4-1)! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

(2) $(4-1)! \times {}_4P_3 = 6 \times 24 = 144$

표준

01 답 ③

6명을 일렬로 나열하는 경우에서 다음의 두 가지는 배열 순서가 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2} = 360$

02 답 ③

세 쌍의 부부를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3 = 4$
세 쌍의 부부를 각각 한 묶음으로 생각하여 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)! = 2$
그 사이에 한 쌍의 부부가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는
${}_3P_2 = 6$
세 쌍의 부부가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$
따라서 구하는 방법의 수는
$4 \times 2 \times 6 \times 8 = 384$

03 답 ①

전체 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2! \times 2!} = 180$

$(a,\ a)$가 이웃하는 경우는 $(a,\ a)$를 묶어서 하나로 간주하면 $\dfrac{5!}{2!} = 60$

$(b,\ b)$가 이웃하는 경우는 $(b,\ b)$를 묶어서 하나로 간주하면

$\dfrac{5!}{2!} = 60$

(a, a), (b, b)가 각각 이웃하는 경우는
$4!=24$
따라서 같은 문자끼리는 이웃하지 않는 경우의 수는
$180-(60+60-24)=84$

04 답 ④
자음 b, c, d에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 문자열의 양 끝에 배열하는 경우의 수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
알파벳 a, b, c, d, e에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 문자열의 양 끝이 아닌 곳에 배열하는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 문자열의 개수는
$9\times25=225$

발전

01 답 ①
정육면체의 가로 방향, 세로 방향, 높이 방향으로 움직이는 것을 각각 a, b, c라 하면 A 지점에서 B 지점까지 가기 위해서는 a가 두 번, b가 한 번, c가 세 번 있어야 한다.
따라서 모든 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\times1!\times3!}=60$
A 지점에서 P 지점까지 가는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
P 지점에서 B 지점까지 가는 경우의 수는
$3!=6$이므로 A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 가는 경우의 수는
$3\times6=18$
따라서 구하는 경우의 수는 $60-18=42$

02 답 10
(ⅰ) 세 번째 문제에서 A가 퀴즈왕이 되는 경우
A가 연속하여 3문제를 맞히는 경우이므로
1
(ⅱ) 네 번째 문제에서 A가 우승하는 경우
○○○A에서 앞의 세 문제 중 A가 2문제를 맞히는 경우이므로 A, A, B를 배열하는 경우의 수와 같다.
$\frac{3!}{2!}=3$
(ⅲ) 다섯 번째 문제에서 A가 우승하는 경우
○○○○A에서 앞의 네 문제 중 A가 2문제를 맞히는 경우이므로 A, A, B, B를 배열하는 경우의 수와 같다.
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $1+3+6=10$

Ⅰ-1 순열과 조합

02 중복 조합

기본

01 답 45

3개의 통을 A, B, C라 하면 중복을 허용하여 A, B, C를 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$$

02 답 (1) 66 (2) 36

(1) 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$$_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12\times11}{2\times1} = 66$$

(2) 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$$_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\times8}{2\times1} = 36$$

03 답 21

$$(a+b+c)^5 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

이므로 $(a+b+c)^5$을 전개할 때 나타나는 항은 a^5, a^2b^2c, ab^3c, c^5, $\cdots$과 같은 a, b, c에 대한 오차식이다.

이것은 a, b, c의 3개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$

04 답 (1) 21 (2) 6

(1) 사과, 배, 귤 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$

(2) 미리 사과, 배, 귤을 한 개씩 샀다고 하면 사과, 배, 귤 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

표준

01 답 1350

흰 구슬 2개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$$_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

붉은 구슬 4개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$$_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

검은 구슬 7개를 적어도 1개씩 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 먼저 3명에게 1개씩을 주고 남은 4개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수이므로

$$_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times15\times15 = 1350$

02 답 15

정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대한 함숫값은 10, 11, 12 중 하나이고

$f(1) \ge f(2) \ge f(3) \ge f(4)$이어야 한다.

즉, 함수의 개수는 10, 11, 12 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 다음, 큰 것부터 차례대로 1, 2, 3, 4에 대응시키는 방법의 수와 같다.

따라서 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

03 답 ③

5명의 학생 A, B, C, D, E에게 2자루씩 먼저 나누어 주고 나머지 3개를 학생 A, B, C, D, E에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다. 즉,

(A, A, A), (A, A, B), (A, B, B), $\cdots$, (E, E, E)

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

04 답 7

무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 A, B 중 중복을 허용하여 6명

을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$

발전

01 답 ④

$1 \le f(1) \le f(3) \le (5) \le 5$이므로

$f(1) \le f(3) \le f(5)$를 만족시키는 경우의 수는

$_5H_3 = {}_7C_3 = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

또한 $5 \ge f(2) \ge f(4) \ge 1$이므로 $f(2) \ge f(4)$를 만족시키는 경우의 수는

$_5H_2 = {}_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$35\times15 = 525$

02 답 115

$x=2l,\ y=2m,\ z=2n-1,\ u=2k-1$ ($l,\ m,\ n,\ k$는 자연수)로 놓으면

$x+y+z+10u = 2(l+m+n+10k)-11 = 41$

$l+m+n+10k = 26$ …… ㉠

(ⅰ) $k=1$일 때, ㉠에서 $l+m+n=16$

$l,\ m,\ n$은 자연수이므로 $l,\ m,\ n$이 각각 적어도 한 개씩은 포함되어야 한다.

즉, 방정식 $l+m+n=16$을 만족시키는 자연수 $l,\ m,\ n$의 순서쌍 $(l,\ m,\ n,\ 1)$의 개수는 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 13개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_{13} = {}_{3+13-1}C_{13} = {}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \dfrac{15\times14}{2\times1} = 105$

(ⅱ) $k=2$일 때, ㉠에서 $l+m+n=6$

$l,\ m,\ n$은 자연수이므로 $l,\ m,\ n$이 각각 적어도 한 개씩은 포함되어야 한다.

즉, 방정식 $l+m+n=16$을 만족시키는 자연수 $l,\ m,\ n$의 순서쌍 $(l,\ m,\ n,\ 2)$의 개수는 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$105+10 = 115$

I-1 순열과 조합

01 64	**02** 60	**03** ②	**04** ③
05 250	**06** ①	**07** 40	**08** ②
09 ④	**10** ⑤	**11** ②	**12** 20
13 ②	**14** 36	**15** 2	**16** 72
17 3	**18** ①	**19** 36	**20** ②
21 35	**22** 146	**23** 495	**24** 54400

01 ${}_4\Pi_3=64$

02 s, s, s를 하나의 문자 s로 간주할 때
s, c, c, u, e의 순열의 수이므로
$\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=60$

03 부모와 자녀 한 명을 한 사람으로 생각하면
3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
부모가 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는
$2!=2$
부모 사이에 앉는 자녀 한 명을 고르는 경우의 수는 3
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times2\times3=12$

04 2개의 깃발을 한 번 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_1=2$
2개의 깃발을 두 번 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$
같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_2\Pi_3$, ${}_2\Pi_4$, ${}_2\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는
${}_2\Pi_1+{}_2\Pi_2+{}_2\Pi_3+{}_2\Pi_4+{}_2\Pi_5$
$=2+4+8+16+32=62$

05 일의 자리의 수부터 천의 자리의 수까지 만들어 보면

(i) 한 자리의 자연수의 개수
0은 자연수가 아니므로 일의 자리에는 2, 3, 4, 5의 4

(ii) 두 자리의 자연수의 개수
십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 십의 자리에는 2, 3, 4, 5의 4
일의 자리에는 0, 2, 3, 4, 5의 5개의 수가 올 수 있으므로 5
따라서 두 자리의 자연수의 개수는
$4\times5=20$

(iii) 세 자리의 자연수의 개수
백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에는 2, 3, 4, 5의 4
십의 자리, 일의 자리에는 0, 2, 3, 4, 5의 5개의 수를 중복을 허용하여 나열할 수 있으므로
${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 세 자리의 자연수의 개수는
$4\times25=100$

(iv) 2□□□□ 꼴의 자연수의 개수
5개의 수에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

(i)~(iv)는 동시에 일어나지 않으므로 한 자리의 수부터 천의 자리가 2인 네 자리의 수까지의 개수는
$4+20+100+125=249$
이므로 3000은 250번째의 수이다.

06 1, 2, 3을 사용하여 만든 네 자리 자연수의 개수 ${}_3\Pi_4$에서 1 또는 2를 사용하지 않은 자연수의 개수를 빼면 된다.
1을 사용하지 않은 자연수는 2와 3만으로 만든 자연수이므로
${}_2\Pi_4=16$
또, 2를 사용하지 않은 자연수도 마찬가지로
${}_2\Pi_4=16$
그런데 이 중에는 3만을 사용하여 만든 네 자리 수 3333이 중복되어 있으므로 구하는 개수는
$${}_3\Pi_4-({}_2\Pi_4+{}_2\Pi_4-1)=81-(16+15-1)=50$$

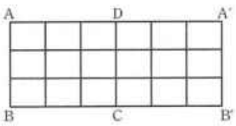
07 주어진 도형의 선들로 만들 수 있는 직사각형의 개수는
${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$
한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 12

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 6
한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 2
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
$60-(12+6+2)=60-20=40$

08 정사면체의 밑면을 고정시켜 한 가지 색을 칠하는 경우의 수는 4
나머지 3가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
이때 정사면체의 모든 면은 합동이므로 정사면체의 각 면이 밑면이 되는 경우는 모두 같은 경우이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times2\times\frac{1}{4}=2$

09 3명의 후보자 중 5명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

10 A 지점에서 출발하여 선분 CD 위의 점을 적어도 한 번 경유해서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 그림과 같이 도로망 전체를 선분 CD에 대하여 대칭이동시켰을 때, 도로망 ABB′A′ 위의 점 A에서 B′까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{9!}{3!\times6!}=84$

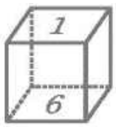
11 2, 3, 4를 A로 바꾸어 생각하여
A, A, A, 5, 5의 다섯 개의 숫자를 일렬로 배열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 A를 각각 2, 3, 4로 바꾸는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

12 한 학생에게 적어도 한 자루의 색연필을 나누어 주어야 하므로 먼저 4명의 학생에게 색연필을 한 자루씩 나누어 주고 나머지 색연필 3자루를 중복을 허용하여 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

13 $(x+y+z)^6$의 전개식의 항은
$x^py^qz^r\,(p+q+r=6)$꼴이다.
따라서 서로 다른 항의 개수는 방정식
$p+q+r=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

14 치역과 공역이 같으려면 집합 Y의 원소 $1, 2, 3$은 적어도 한 번씩은 집합 X의 원소와 대응되어야 한다. 가능한 경우를 따져 보면
$(1,2,3,3)$, $(1,2,2,3)$, $(1,1,2,3)$
(i) $(1,2,3,3)$을 나열하는 경우 $\frac{4!}{2!}=12$
(ii) $(1,2,2,3)$을 나열하는 경우 $\frac{4!}{2!}=12$
(iii) $(1,1,2,3)$을 나열하는 경우 $\frac{4!}{2!}=12$
(i), (ii), (iii)은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 함수의 개수는
$12+12+12=36$

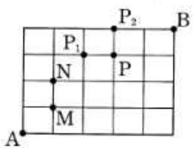
15 오른쪽 그림과 같이 한 면에 1을 쓰면 마주보는 면에는 6을 써야 하므로 1, 6을 쓴 면을 제외한 나머지 4개의 면에는 순서대로
$(2,3,5,4)$ 또는 $(2,4,5,3)$이 올 수 있다.
따라서 구하는 경우의 수는 2이다.



16 어머니의 자리를 고정시키면 아버지는 어머니와 마주 앉으므로 아버지의 자리는 고정되고, 동생 3명은 이웃하므로
$2\times3!\times3!=2\times6\times6=72$

17 $a=11!\times2$, $b=11!\times6$
$\frac{b}{a}=\frac{6}{2}=3$

18 오른쪽 그림과 같이 도로가 없는 부분을 연결하고 그 교점을 M, N이라 하자
(i) A→B의 경로의 수는



$\dfrac{9!}{4!\times 5!}=126$

(ii) $A\to M\to N\to B$ 의 경로의 수는

$2\times\dfrac{6!}{4!\times 2!}=30$

(iii) P 지점에서 좌회전을 하는 경우는

$A\to P_1\to P\to P_2\to B$ 이므로 경로의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times 2!}\times 1=10$

(iv) $A\to M\to N\to P_1\to P\to P_2\to B$ **의 경로의** 수는 $2\times 2\times 1=4$(가지)

따라서 구하는 최단 경로의 수는 (iv)의 경우가 (ii)와 (iii)에 중복되어 있으므로

$126-(30+10)+4=90$

19 과일 바구니에 사과, 배, 자두를 각각 x개, y개, z개 넣는다고 하면

$x+y+z=10$ $(x\ge 0,\ y\ge 1,\ z\ge 2)$

$x=a,\ y-1=b,\ z-2=c$로 놓으면

$a+b+c=7$ $(a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$

따라서 구하는 방법의 수는 $a,\ b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$$

20 세 종류의 꽃에서 10 송이를 사는 경우는 서로 다른 3 개에서 10 개를 택하는 중복조합의 수이므로 $a={}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=66$

적어도 한 송이씩을 포함하려면 3 종류의 꽃을 한 송이씩 택하고 나머지 7 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

따라서 $a+b=66+36=102$

21 해결 과정 적어도 한 번은 2단을 올라가므로 1단 또는 2단 또는 3단으로 7단으로 계단을 오르는 경우는

(i) 1단이 5번 ➡ $(1,1,1,1,1,2)$

(ii) 1단이 3번 ➡ $(1,1,1,2,2)$

(iii) 1단이 2번 ➡ $(1,1,2,3)$

(iv) 1단이 1번 ➡ $(1,2,2,2)$

(v) 1단이 0번 ➡ $(2,2,3)$ ▸ 2점

(i) $(1,1,1,1,1,2)$의 경우

6개의 숫자 중 1이 5개이므로 $\dfrac{6!}{5!}=6$ ▸ 1점

(ii) $(1,1,1,2,2)$의 경우

5개의 숫자 중 1이 3개, 2가 2개이므로

$\dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$ ▸ 1점

(iii) $(1,1,2,3)$의 경우

4개의 숫자 중 1이 2개이므로 $\dfrac{4!}{2!}=12$ ▸ 1점

(iv) $(1,2,2,2)$의 경우

4개의 숫자 중 2가 3개이므로 $\dfrac{4!}{3!}=4$ ▸ 1점

(v) $(2,2,3)$의 경우

3개의 숫자 중 2가 2개이므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$ ▸ 1점

답 구하기 (i)~(v)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$6+10+12+4+3=35$ ▸ 1점

22 해결 과정 n쌍의 부부, 즉 $2n$명이 앉아 있는 경우, 새로 도착한 부부 중 한 명의 선택은 $2n$가지 (사람과 사람 사이의 공간의 개수), 나머지 한 명의 선택은 $(2n-1)$가지

즉, $x_n=2n(2n-1)$ ▸ 5점

$x_4=56,\quad x_5=90$

답 구하기 따라서 $x_4+x_5=56+90=146$ ▸ 3점

23 해결 과정 정수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$가

$a\ge 0,\ b\ge 1,\ c\ge 2,\ d\ge 3,\ e\ge 4$ …… ㉠

이므로 방정식 $a+b+c+d+e=18$은

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$가 각각 적어도 0개, 1개, 2개, 3개, 4개 택해진다. 이때 택해지지 않은 개수는

$18-(1+2+3+4)=8$(개) ▸ 4점

따라서 ㉠을 만족시키는 방정식

$a+b+c+d+e=18$의 정수해는 서로 다른 5개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에서 8개를 택하여 만들 수 있으므로 주어진 방정식의 정수해의 개수는 서로 다른 5개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

답 구하기 따라서 ${}_5H_8={}_{12}C_8=495$ ▸ 4점

24 해결 과정 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이고, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 2, 4, 6, 8이 중복하여 올 수 있으므로 모든 세 자리의 자연수의 개수는

$4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$ ▸ 1점

100개의 자연수 중에서 백의 자릿수가 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 25개씩이므로

$(200+400+600+800) \times 25 = 50000$ ▸ 2점

100개의 자연수 중에서 십의 자릿수가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로

$(0+20+40+60+80) \times 20 = 4000$ ▸ 2점

100개의 자연수 중에서 일의 자릿수가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로

$(0+2+4+6+8) \times 20 = 400$ ▸ 2점

따라서 구하는 모든 세 자리의 자연수의 합은

답 구하기 $50000+4000+400=54400$ ▸ 1점

Ⅰ-2 이항정리

01 이항정리

기본

01 답 (1) $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

(2) $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

02 답 (1) 405 (2) 40 (3) 60

03 답 (1) ${}_7C_4$ (2) ${}_8C_4$

04 답 풀이 참조

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$ ······ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2^n=2({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots)$

따라서 $2^{n-1}={}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots$

표준

01 답 ①

전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax^2)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}(-1)^rx^{10-5r}$

상수항은 $10-5r=0$, 즉 $r=2$인 경우이므로

${}_5C_2a^3(-1)^2=270$, $10a^3=270$, 즉 $a=3$

x^5의 계수는 $10-5r=5$, 즉 $r=1$인 경우이므로

${}_5C_1\times3^4\times(-1)=-405$

02 답 (1) 11 (2) 1024 (3) 2^{98}

(1) ${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이므로

$1024\le2^n-1<2048$에서

$1025\le2^n<2049$

그런데 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로 $n=11$

(2) ${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}=1024$

(3) ${}_{99}C_1+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{99-1}=2^{98}$

03 답 -31

$(a-b)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_ra^{7-r}(-b)^r={}_7C_r(-1)^ra^{7-r}b^r$

a^lb^3항은 $7-r=l$, $r=3$일 때이므로

$l=4$

따라서 a^4b^3의 계수는 ${}_7C_3(-1)^3=-35$

즉, $m=-35$

그러므로 $l+m=4+(-35)=-31$

04 답 (1) 729 (2) 5^{20}

(1) $(1+x)^6={}_6C_0+{}_6C_1x+{}_6C_2x^2+\cdots+{}_6C_6x^6$

이므로 $x=2$를 대입하면

${}_6C_0+2{}_6C_1+2^2{}_6C_2+\cdots+2^6{}_6C_6$

$=3^6=729$

(2) ${}_{20}C_0-6\,{}_{20}C_1+6^2\,{}_{20}C_2-6^3\,{}_{20}C_3+\cdots$

$+6^{20}\,{}_{20}C_{20}$

$=(1-6)^{20}$

$=5^{20}$

발전

01 답 ②

$({}_7C_0)^2+({}_7C_1)^2+({}_7C_2)^2+\cdots+({}_7C_7)^2$

$={}_7C_0\times{}_7C_7+{}_7C_1\times{}_7C_6+\cdots+{}_7C_7\times{}_7C_0$

이므로 구하는 값은 $(1+x)^7(1+x)^7$의 전개식에서

x^7의 계수와 같다.

즉, $(1+x)^{14}$에서 x^7의 계수이므로 ${}_{14}C_7$

02 답 495

8가지의 재료 중에서 중복하여 n가지를 추가하는 경우의 수는 8가지의 재료 중에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_8H_n={}_{8+n-1}C_n={}_{7+n}C_n$

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{7}\mathrm{C}_{0}+{}_{8}\mathrm{C}_{1}+{}_{9}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}$$
$$={}_{8}\mathrm{C}_{0}+{}_{8}\mathrm{C}_{1}+{}_{9}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}$$
$$={}_{9}\mathrm{C}_{1}+{}_{9}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}$$
$$={}_{11}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}$$
$$={}_{12}\mathrm{C}_{4}$$
$$=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$$
$$=495$$

Ⅰ-2 이항정리

01 $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

02 ②	**03** ②	**04** ③	**05** ⑤
06 ②	**07** ③	**08** ②	**09** ④
10 ②	**11** ③	**12** ④	**13** ②
14 ④	**15** ⑤	**16** ③	**17** ①
18 ③	**19** ④	**20** ⑤	**21** 3^{50}
22 56	**23** 102	**24** 2^{17}	

01 $(2a-b)^5$

$={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4(-b)$

$\quad+{}_5C_2(2a)^3(-b)^2+{}_5C_3(2a)^2(-b)^3$

$\quad+{}_5C_4(2a)(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$

$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

02 $(3x-2y)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2y)^r$

x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^2y^3의 계수는

${}_5C_3\times3^2\times(-2)^3={}_5C_2\times9\times(-8)$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times9\times(-8)=-720$

03 $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\times2^{6-r}\times x^{12-2r}\times x^{-r}$

$={}_6C_r\times2^{6-r}\times x^{12-3r}$

$\dfrac{1}{x^3}$항은 $12-3r=-3$에서 $r=5$일 때이므로

$\dfrac{1}{x^3}$의 계수는

${}_6C_5\times2^{6-5}=6\times2=12$

04 $(ax+y)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(ax)^{5-r}y^r={}_5C_ra^{5-r}x^{5-r}y^r$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^2y^3의 계수는

${}_5C_3a^2=90,\ 10a^2=90,\ a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$

05 $(x+3)^5$의 전개식에서 일반항은 ${}_5C_rx^{5-r}3^r$

다항식 $(2x+1)(x+3)^5$의 전개식에서 x^3항은 다음과 같은 경우에 만들어진다.

(ⅰ) $2x+1$에서 상수항과 $(x+3)^5$에서 x^3항이 곱해지는 경우

$1\times{}_5C_2\times x^3\times3^2=90x^3$

(ⅱ) $2x+1$에서 x항과 $(x+3)^5$에서 x^2항이 곱해지는 경우

$2x\times{}_5C_3\times x^2\times3^3={}_5C_2\times54x^3=540x^3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 x^3의 계수는

$90+540=630$

06 $(x^2+2)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}2^r={}_nC_r2^rx^{2n-2r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

x^4항은 $2n-2r=4$에서 $r=n-2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_nC_{n-2}2^{n-2}={}_nC_22^{n-2}$

x^2항은 $2n-2r=2$에서 $r=n-1$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_nC_{n-1}2^{n-1}={}_nC_12^{n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

x^4의 계수와 x^2의 계수가 같으므로

${}_nC_22^{n-2}={}_nC_12^{n-1}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=2n,\ n^2-n=4n$

$n^2-5n=0,\ n(n-5)=0$

$n\ge2$이므로 $n=5$

따라서 ㉠에서 x^2의 계수는

${}_5C_1\times2^4=5\times16=80$

07 $(x-1)^n$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_nC_2(-1)^{n-2}$이다.

즉, ${}_nC_2(-1)^{n-2}=-55$

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-1)^{n-2}=-55$

이때 n이 자연수이므로 $(-1)^{n-2}=-1$

이어야 한다.

즉, $\dfrac{n(n-1)}{2}=55$에서 $n^2-n-110=0$

$(n-11)(n+10)=0$, 즉 $n=11$

따라서 x^3의 계수 a는

${}_{11}C_3(-1)^{11-3}=165$

이므로 $a+n=176$

08 ${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{21}C_{18}$

$=({}_4C_0+{}_4C_1)+{}_5C_2+\cdots+{}_{21}C_{18}$

$(\because\ {}_3C_0={}_4C_0)$

$=({}_5C_1+{}_5C_2)+{}_6C_3+\cdots+{}_{21}C_{18}$

$=({}_6C_2+{}_6C_3)+\cdots+{}_{21}C_{18}$

$\vdots$

$={}_{21}C_{17}+{}_{21}C_{18}$

$={}_{22}C_{18}={}_{22}C_4$

09 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$

$=2^n-({}_nC_0+{}_nC_n)=2^n-2$

즉, $2^n-2=62$에서

$2^n=64$이므로 $n=6$

10 $N=({}_{20}C_0\times9^0+{}_{20}C_1\times9^1+{}_{20}C_2\times9^2+\cdots+{}_{20}C_{20}\times9^{20})-{}_{20}C_0\times9^0$

$=(1+9)^{20}-1$

$=10^{20}-1$

$=\underbrace{999\cdots99}_{20개}$

따라서 N은 20자리의 수이다.

11 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중에서 원소가 n개인 부분집합의 개수는 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 중에서 서로 다른 n개의 원소를 택하는 방법의 수와 같으므로 원소의 개수가 홀수인 집합의 개수는

${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=512$

12 $11^{99}=(1+10)^{99}$

$={}_{99}C_0+{}_{99}C_1\times10+{}_{99}C_2\times10^2+\cdots+{}_{99}C_{99}\times10^{99}$

이때 세 번째항 이후로는 100으로 나누어떨어지므로 11^{99}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{99}C_0+{}_{99}C_1\times10$을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

${}_{99}C_0+{}_{99}C_1\times10=1+990=991$

이므로 구하는 나머지는 91이다.

13 ${}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+{}_{15}C_7+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{11}+{}_{15}C_{13}+{}_{15}C_{15}$

$=2^{15-1}=2^{14}$

따라서 $n=14$

14 ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$

이므로 $2^{2n-1}=2048=2^{11}$

$2n-1=11$, 즉 $n=6$

15 $500<{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n<1000$

에서 ${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이므로

$500<2^n-1<1000$

따라서 $n=9$

16 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_rx^{8-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_8C_rx^{8-2r}$ …… ㉠

즉,

$(x^2+2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$

이 전개식에서 상수항이 되는 경우는 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항, 2와 ㉠의 상수항이 곱해질 때이다.

(ⅰ) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $8-2r=-2$, 즉 $r=5$일 때이므로 ${}_8C_5x^{-2}=\dfrac{56}{x^2}$

(ⅱ) ㉠에서 상수항은 $8-2r=0$, 즉 $r=4$
일 때이므로 ${}_8C_4=70$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수항은

$x^2\times\frac{56}{x^2}+2\times70=56+140=196$

17 20개의 점들 중에서 n개의 점을 택하여 만들 수 있는 n각형의 개수는 ${}_{20}C_n$개이므로

$a_n={}_{20}C_n$

따라서

$a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{19}$

$={}_{20}C_3+{}_{20}C_5+{}_{20}C_7+{}_{20}C_9+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$={}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+{}_{20}C_7+{}_{20}C_9$
$+\cdots+{}_{20}C_{19}-{}_{20}C_1$

$=2^{19}-20$

18 (ⅰ) 이항정리에 의하여

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+$
$\cdots+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$

$2^n-{}_nC_0-{}_nC_1$

$={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$

$2^n-2={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$

이므로

$f(n)=2^n-2$

(ⅱ) 이항정리에 의하여

$(1+x)^{2n}$

$={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+{}_{2n}C_3x^3+$
$\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

이므로

$g(n)=2^{2n}=4^n$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{2^n-2}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

따라서 $m=1$, $n=-2$이므로 $m-n=3$

19 $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n$ 에서

좌변의 $\boxed{x^k}$ 의 계수는 ${}_{n+1}C_k$ ⋯⋯ ㉠

우변의 $(1+x)^n$ 에서 x^{k-1} 의 계수는

$\boxed{{}_nC_{k-1}}$, x^k 의 계수는 ${}_nC_k$

즉, 우변은

$(1+x)(\cdots+\boxed{{}_nC_{k-1}}\ x^{k-1}+{}_nC_kx^k+\cdots)$

꼴로 나타내어지므로 $\boxed{x^k}$ 의 계수는

${}_nC_k+{}_nC_{k-1}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡은 같으므로

${}_{n+1}C_k={}_nC_k+{}_nC_{k-1}$

20 $(1+x)^{20}=(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 이므로

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_1+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_{10}$

$(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{20}C_{10}$

따라서 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 구한 x^{10}의 계수와 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ 이다.

21 해결 과정 이항정리에 의하여

$(1-2)^{50}={}_{50}C_0+{}_{50}C_1(-2)+{}_{50}C_2(-2)^2+$
$\cdots+{}_{50}C_{50}(-2)^{50}$ ⋯⋯ ㉠ ▸ 2점

$(1+2)^{50}={}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times2+{}_{50}C_2\times2^2+$
$\cdots+{}_{50}C_{50}\times2^{50}$ ⋯⋯ ㉡ ▸ 2점

㉠+㉡에서

$(-1)^{50}+3^{50}=2({}_{50}C_0+2^2\times{}_{50}C_2$
$+2^4\times{}_{50}C_4+\cdots+2^{50}\times{}_{50}C_{50})$

$S={}_{50}C_0+2^2\times{}_{50}C_2+2^4\times{}_{50}C_4+$
$\cdots+2^{50}\times{}_{50}C_{50}=\frac{1+3^{50}}{2}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $2S-1=2\left(\frac{1+3^{50}}{2}\right)-1=3^{50}$

▸ 1점

22 해결 과정 $a={}_2C_0$, $b={}_3C_1$, $c={}_4C_2$, $d={}_5C_3$, $e={}_6C_4$, $f={}_7C_5$이므로

$a+b+c+d+e+f$

$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$ ▸ 3점

이때 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$에 의하여

${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots{}_nC_{n-2}={}_{n+1}C_{n-2}$

▸ 3점

답 구하기

따라서 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_8C_5=56$ ▸ 2점

23 해결 과정 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ (n은 10 이하의 자연수)의 전개식에서 상수항을 a_n이라 하자.

이때 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_nC_r\,x^{2n-3r}$ ▸ 2점

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

이므로 상수항은

$2n-3r=0$, 즉 $2n=3r$ $\cdots\cdots$ ㉠ ▸ 2점

를 만족시키는 정수 n, r에 의해 정해진다.

(ⅰ) $n=3k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이면 $r=2k$이므로

$a_n={}_nC_r={}_{3k}C_{2k}$

(ⅱ) n이 3의 배수가 아니면 ㉠을 만족시키는 정수 r가 없으므로 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 상수항 $a_n=0$이다. ▸ 2점

답 구하기 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수항은

$(a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8+a_{10})$

$+(a_3+a_6+a_9)$

$=0+{}_3C_2+{}_6C_4+{}_9C_6$

$=3+15+84=102$ ▸ 2점

24 문제 이해 조건 (가)에서 19을 원소로 갖는 집합 X는 집합 A의 부분집합이고, 조건 (나)에서 원소의 개수가 홀수이므로

해결 과정 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 18\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 것의 개수와 같다.

원소의 개수가 $2n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 9)$인 부분집합의 개수는 ${}_{18}C_{2n}$이다.

답 구하기

$k={}_{18}C_0+{}_{18}C_2+{}_{18}C_4+\cdots+{}_{18}C_{18}=2^{18-1}$

$=2^{17}$

▸ 2점

I 경우의 수

01 ④	**02** ④	**03** ②	**04** ②	**05** ①
06 ④	**07** 17	**08** 18	**09** ②	**10** 10
11 ⑤	**12** ①	**13** ③	**14** ④	**15** 5
16 ②	**17** 112	**18** ③	**19** 45	
20 (1) 625 (2) 5 (3) 70		**21** 30		
22 1, 2, 7, 8, 9	**23** 65	**24** 9	**25** 45	

01 수진이와 민호 2명을 묶어서 6명을 원 모양으로 먼저 둘러앉게 하는 경우의 수는
$(6-1)!=120$이고, 그 각각에 대하여 수진이와 민호가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6!-(6-1)!\times 2=720-120\times 2=480$

02 네 쌍의 부부를 각각 묶어서 한 묶음으로 생각하여 원형의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는
$(4-1)!=6$이고, 네 쌍의 부부 각각에 대하여 한 쌍의 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2\times 2\times 2\times 2=16$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times 16=96$

03 백의 자리에는 1, 2, 3이 올 수 있으므로 그 경우의 수는 3
십의 자리와 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3이 모두 올 수 있으므로 그 경우의 수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$3\times 16=48$

04 5명의 신입사원을 배치할 수 있는 부서가 각각 4개씩이므로 구하는 경우의 수는 4개 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4\Pi_5=4^5$

05 양 끝에 노란색 깃발을 배열하면 가운데 7개의 깃발은 노란색 깃발 2개, 빨간색 깃발 5개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{2!5!}=21$

06 6개의 수를 일렬로 배열하는 순열의 수에서 0이 처음에 오는 순열의 수를 빼면 된다.
즉, 6개의 수를 일렬로 배열하는 순열의 수는
$\dfrac{6!}{2!2!}=180$
0이 처음에 오는 순열의 수는
$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$180-30=150$

07 A 지점에서 C 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$
A 지점에서 B 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}=6$
또, B 지점에서 C 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{3!}{2!1!}=3$
이므로 A 지점에서 B 지점을 지나 C 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$6\times 3=18$
따라서 A 지점에서 C 지점까지 가는 최단 경로 중에서 B 지점을 지나지 않는 경우의 수는
$35-18=17$

08 10명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는 $(10-1)!$이고, 그 각각에 대하여 다른 경우가 2가지씩 있으므로
$(10-1)!\times 2=18\times 8!$, 즉 $p=18$

09 흰 공을 a, 검은 공을 b, 회색 공을 c이라 놓으면 b, b, c를 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$

이때 흰 공이 이웃하지 않으려면

$\square b \square b \square c \square$

흰 공을 위의 그림의 네 개의 빈 칸 중 세 개를 택하여 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3 \times {}_4C_3 = 12$

10 주어진 조건에 맞는 트럭과 승용차를 주차시키는 방법의 수는 트럭을 a라 하고, 승용차를 b라고 할 때, 트럭 3대, 승용차 2대, 즉, a, a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

11 빨간색 사탕과 노란색 사탕을 각각 한 개씩 꺼낸 후, 나머지 사탕에서 6개의 사탕을 꺼내는 방법을 생각할 수 있다. 이때 같은 색깔의 사탕은 서로 구별이 되지 않으므로 서로 다른 세 종류의 사탕에서 중복을 허용하여 6개의 사탕을 꺼내는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$

12 (ⅰ) $(a+b+c)^6$을 전개할 때 생기는 항들은 서로 다른 3개의 문자 a, b, c에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$

(ⅱ) $(x+y)^4$을 전개할 때 생기는 항들은 서로 다른 2개의 문자 x, y에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$28 \times 5 = 140$

13 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중에서 원소가 n개인 부분집합의 개수는 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 중에서 서로 다른 n개의 원소를 택하는 경우의 수와 같으므로

원소의 개수가 홀수인 집합의 개수는

${}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9 = 2^9 = 512$

14 ㄱ. ${}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 + {}_{12}C_2 + {}_{12}C_3 + \cdots + {}_{12}C_{12} = 2^{12}$

${}_{12}C_1 + {}_{12}C_2 + {}_{12}C_3 + \cdots + {}_{12}C_{12} = 2^{12} - 1$

(거짓)

ㄴ. ${}_6C_0 - {}_6C_1 + {}_6C_2 - {}_6C_3 + {}_6C_4 - {}_6C_5 + {}_6C_6 = 0$ (참)

ㄷ. ${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5$

$= {}_{11}C_{11} + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_5$

$= {}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 $(x^2-1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 = x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 - \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r\, x^{6-2r}$

(ⅰ) $x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 x^2의 계수는

$2+(6-2r)=2$, 즉 $r=3$인 경우이므로

${}_6C_3 = 20$

(ⅱ) $-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 x^2의 계수는

$6-2r=2$, 즉 $r=2$인 경우이므로

$(-1)\times{}_6C_2 = -15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 x^2의 계수는

$20-15=5$

16 (ⅰ) 5가 세 개인 경우

$\boxed{5}\square\boxed{5}\square\boxed{5}$ 꼴이므로

${}_4P_2 = 12$

(ⅱ) 5가 두 개인 경우

$\boxed{5}\square\boxed{5}\square\square$, $\boxed{5}\square\square\boxed{5}\square$,

$\boxed{5}\square\square\square\boxed{5}$, $\square\boxed{5}\square\boxed{5}\square$,

$\square\boxed{5}\square\square\boxed{5}$, $\square\square\boxed{5}\square\boxed{5}$

꼴이므로 6

이때 나머지 세 개의 자리는 1, 2, 3, 4 중에서 세 개를 배열하는 방법은

$6 \times {}_4P_3 = 6 \times 24 = 144$

(ⅲ) 5가 한 개인 경우, 즉 모두 다른 숫자인 경우

$5! = 120$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$12 + 144 + 120 = 276$

17 $f(n)$은 정n각형의 n개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 정n각형의 n개의 변을 빼면 되므로 ${}_nC_2 - n$

$f(4) + f(5) + f(6) + \cdots + f(10)$

$({}_4C_2 - 4) + ({}_5C_2 - 5) + \cdots + ({}_{10}C_2 - 10)$

$= {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 - 49$

$= ({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) - {}_2C_2 - {}_3C_2 - 49$

$= {}_{11}C_3 - 1 - 3 - 49 = 165 - 53 = 112$

18 $1 + (1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{10}$

$= \dfrac{(1+x)^{11} - 1}{(1+x) - 1} = \dfrac{(1+x)^{11} - 1}{x}$

따라서 구하는 값은 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^8의 계수와 같으므로

${}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$

19 a, b, c를 각각 x개, y개, z개 택했을 때, 만들어지는 정수는

$a^x b^y c^z$ (단, $x + y + z = 8$)

따라서 $x + y + z = 8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 해의 개수는 x, y, z의 3개의 문자 중 중복을 허용하여 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = 45$

20 (1) 해결 과정 공역 Y에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

답 구하기 ${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$ ▸ 2점

(2) 해결 과정 공역 Y에서 4개를 택하여 정의역 X의 서로 다른 원소에 크기 순으로 대응시키는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수 f의 개수는

답 구하기 ${}_5C_4 = 5$ ▸ 2점

(3) 해결 과정 공역 Y에서 4개를 택하여 정의역 X의 원소에 크기순으로 대응시키는 중복조합의 수와 같다. 즉, 구하는 함수 f의 개수는

답 구하기 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$ ▸ 2점

21 해결 과정 가운데 정팔각형을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4가지 색을 마주 보는 직각이등변삼각형에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)! = 3! = 6$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$5 \times 6 = 30$ ▸ 3점

22 해결 과정 $(1-x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(-1)^r x^r$

$(1+x)^{9-n}$의 전개식의 일반항은 ${}_{9-n}C_s x^s$ 이므로

$(1-x)^n(1+x)^{9-n}$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r \times {}_{9-n}C_s(-1)^r x^{r+s}$ ▸ 2점

$x^{r+s} = x^2$에서 $r + s = 2$이므로 순서쌍 (r, s)는 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$ ▸ 2점

즉, x^2의 계수는

${}_nC_0 \times {}_{9-n}C_2(-1)^0 + {}_nC_1 \times {}_{9-n}C_1(-1)^1 + {}_nC_2 \times {}_{9-n}C_0(-1)^2$

$= 2n^2 - 18n + 36 = 2(n-3)(n-6)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 x^2의 계수가 양수이려면

$2(n-3)(n-6) > 0$에서

$n < 3$ 또는 $n > 6$

그런데 n은 9이하의 자연수이므로 n의 값은

1, 2, 7, 8, 9이다. ▸ 2점

23 해결 과정 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 3, 4, 5 중 하나이어야 하고 그 함수의 개수는

$_3H_4 = 3^4 = 81$ ▸ 2점

이때 함숫값이 4또는 5인 함수의 개수는

$_2H_4 = 2^4 = 16$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$81 - 16 = 65$ ▸ 2점

24 해결 과정 구하는 수의 천의 자리 숫자는 1이고,

(ⅰ) 3이 0개 오는 경우

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되려면 1이 1개, 2가 2개 포함되어야 하므로 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{1! \times 2!} = 3$

▸ 2점

(ⅱ) 3이 1개 포함 되는 경우

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되려면 3이 1개, 1이 2개 포함되어야 하므로 1, 1, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$

▸ 2점

(ⅲ) 3이 2개 포함 되는 경우

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되려면 3이 2개, 2가 1개 포함되어야 하므로 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{1! \times 2!} = 3$

▸ 2점

답 구하기 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$3 + 3 + 3 = 9$ ▸ 2점

25 해결 과정 $(1+x)^{20}(1+x)^{10} = (1+x)^{30}$ 이므로 이 식의 양변에서 각각 x^{15} 항의 계수를 구해 본다.

(ⅰ) 좌변: $(1+x)^{20}(1+x)^{10}$ 의 전개식에서

x^{15} 항을 구하면

$_{20}C_5 x^5 \times {}_{10}C_{10} x^{10} = ({}_{20}C_5 \times {}_{10}C_{10})x^{15}$

$_{20}C_6 x^6 \times {}_{10}C_9 x^9 = ({}_{20}C_6 \times {}_{10}C_9)x^{15}$

$_{20}C_7 x^7 \times {}_{10}C_8 x^8 = ({}_{20}C_7 \times {}_{10}C_8)x^{15}$

$\vdots$

$_{20}C_{15} x^{15} \times {}_{10}C_0 x^0 = ({}_{20}C_{15} \times {}_{10}C_0)x^{15}$

이때 x^{15} 항의 계수는

$_{20}C_5 \times {}_{10}C_{10} + {}_{20}C_6 \times {}_{10}C_9 + {}_{20}C_7 \times {}_{10}C_8$
$+ \cdots + {}_{20}C_{14} \times {}_{10}C_1 + {}_{20}C_{15} \times {}_{10}C_0$ ▸ 2점

(ⅱ) 우변: $(1+x)^{30}$ 의 전개식에서 x^{15} 의

계수는 $_{30}C_{15}$ ▸ 2점

답 구하기 (ⅰ), (ⅱ)에서

$_{20}C_5 \times {}_{10}C_{10} + {}_{20}C_6 \times {}_{10}C_9 + {}_{20}C_7 \times {}_{10}C_8$
$+ \cdots + {}_{20}C_{15} \times {}_{10}C_0 = {}_{30}C_{15}$

따라서 $a + b = 30 + 15 = 45$ ▸ 2점

Ⅱ-1 확률의 뜻과 활용

01 확률의 뜻

기본

01 답 (1) $\{1, 2, 3, 5\}$ (2) $\{3, 5\}$ (3) $\{2, 4, 6\}$

사건 A와 B를 집합으로 나타내면

$A=\{1, 3, 5\}, B=\{2, 3, 5\}$

(1) $A \cup B=\{1, 2, 3, 5\}$

(2) $A \cap B=\{3, 5\}$

(3) $A^C=\{2, 4, 6\}$

02 답 8

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

짝수의 눈이 나오는 사건이 A이므로

$A=\{2, 4, 6\}$

사건 A에 대하여 여사건을 구하면

$A^C=\{1, 3, 5\}$

사건 A와 여사건 A^C은 서로 배반사건이므로 사건 A의 배반사건은 여사건 A^C의 부분집합과 같다.

A^C의 부분집합은

$\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\},$

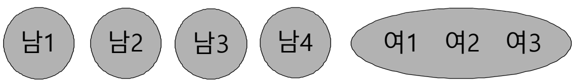
따라서 집합 $A^C=\{1, 3, 5\}$의 원소의 개수가 3개이므로 사건 A와 배반인 사건 A^C의 개수는

$2^3=8$

03 답 (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{3}{10}$

(1) (ⅰ) 전체 경우: 남녀 7명을 일렬로 세우는 경우의 수는 7!

(ⅱ) 해당 경우: 여자 3명이 이웃하는 경우의 수는 $5! \times 3!$



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{5! \times 3!}{7!}=\frac{1}{7}$

(2) (ⅰ) 전체 경우: 총 5개에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2$

(ⅱ) 해당 경우: 검은 공 3개에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

04 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{7}{36}$

두 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$6 \times 6=36$

(1) 두 눈의 수가 같은 경우는

$(1,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 3), (4,\ 4), (5,\ 5), (6,\ 6)$

의 6 가지이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) (ⅰ) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1,\ 2), (2,\ 1)$ 의 2 가지

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 2 인 경우는

$(1,\ 1)$ 의 1 가지

이상에서 두 눈의 수의 합이 3이하인 경우는 $2+1=3$ 이므로 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(3) (ⅰ) 두 눈의 수의 곱이 12인 경우는

$(2,\ 6), (3,\ 4), (4,\ 3), (6,\ 2)$ 의 4 가지

(ⅱ) 두 눈의 수의 곱이 24 인 경우는

$(4,\ 6), (6,\ 4)$ 의 2 가지

(ⅲ) 두 눈의 수의 곱이 36인 경우는

$(6,\ 6)$의 1 가지

이상에서 두 눈의 수의 곱이 12 의 배수인 경우는 $4+2+1=7$ 이므로 구하는 확률은

$\frac{7}{36}$

표준

01 답 ②

주사위를 4 회 던지는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6^4

$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 은 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 서로 같은 것이 있어도 되므로 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 에서 4 개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉, ${}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}=126$

따라서 구하는 확률은

$\frac{126}{6^4}=\frac{7}{72}$

02 답 ④

등록한 자동차 1679천 대 중에서 승용차는 1248 천 대이므로 구하는 확률은

$\frac{1248}{1679}=0.7432\cdots$, 즉 0.743

03 답 ①

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이므로

$A=\{2,\ 5\}$, $B=\{4,\ 20\}$, $C=\{1,\ 2,\ 4\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{4\}$, $C\cap A=\{2\}$

이므로 사건 A와 B는 배반사건이지만 B와 C, C와 A는 배반사건이 아니다.

04 답 ③

10 개의 점 중에서 3 개를 택하는 경우의 수는

$_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

이므로 만들 수 있는 삼각형은 120 개다.

외접원의 지름의 양 끝 점을 포함하여 세 점을 연결하면 직각삼각형을 만들 수 있다. 정삼각형의 외접원의 지름의 양 끝 점을 선택하는 방법이 5 가지이고 나머지 8 개의 점 중에서 하나를 선택하여 직각삼각형을 만드는 방법은 $5\times8=40$ 이므로 구하는 확률은

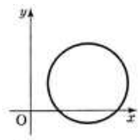
$\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$

발전

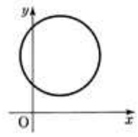
01 답 131

점 $(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c 인 원이 좌표축과 만나는 경우를 분류해 보면

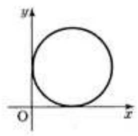
(i) x 축과 두 점에서 만나는 경우
$b<c<a$ 가 성립해야 한다.
즉, $_6\mathrm{C}_3=20$



(ii) y 축과 두 점에서 만나는 경우 $a<c<b$ 가 성립해야 한다.
즉, $_6\mathrm{C}_3=20$



(iii) x 축, y 축에 동시에 접하는 경우 $a=b=c$ 가 성립해야 한다.
즉, 6



세 개의 주사위를 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6^3=216$ 이므로 구하는 확률은

$\frac{20+20+6}{216}=\frac{23}{108}$

따라서 $p+q=108+23=131$

02 답 ⑤

혜주와 태규가 도착하는 시각이 각각 1시 x분, 1시 y분이라 하면, 두 사람은 1시와 2시 사이에 임의로 도착하므로

$0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60$ …… ㉠

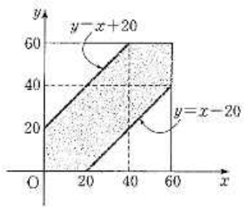
이때 두 사람이 만나게 되는 경우는 $|x-y|\le 20$

즉, $-20\le x-y\le 20$ …… ㉡

(i) $x-y\le 20$에서
$y\ge x-20$ (직선 $y=x-20$의 윗쪽 부분)

(ii) $x-y\ge -20$에서
$y\ge x+20$ (직선 $y=x+20$의 아랫쪽 부분)

즉, ㉠의 범위 내에서 ㉡을 만족하는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{어두운 부분의 넓이})}{(\text{정사각형의 넓이})}$

$=\frac{60\times60-2\times\frac{1}{2}\times40\times40}{60\times60}$

$=\frac{5}{9}$

Ⅱ-1 확률의 뜻과 활용

02 확률의 덧셈정리

기본

01 답 (1) $\frac{8}{15}$ (2) 0.4

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

(2) $P(A)=0.6$, $P(B)=0.8$, $P(A\cup B)=1$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=0.6+0.8-P(A\cap B)$

즉, $P(A\cap B)=0.4$

02 답 ②

$P(A^c)=\frac{2}{3}$에서 $P(A)=1-P(A^c)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+P(B)$

즉, $P(B)=\frac{5}{12}$

03 답 $\frac{4}{9}$

10개의 공 중 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

두 공에 적힌 숫자가 (짝수, 짝수)인 사건을 A, (홀수, 홀수)인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{10}{45}$, $P(B)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{10}{45}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{45}+\frac{10}{45}=\frac{4}{9}$

04 답 $\frac{9}{14}$

(ⅰ) '적어도 한 개가 불량품'의 여사건은 '모두 정상품'이다.

즉, (구하는 확률)$=1-$(모두 정상품일 확률)

(ⅱ) (모두 정상품일 확률)

$$=\frac{(\text{정상품에서 3개를 뽑는 경우})}{(\text{전체에서 3개를 뽑는 경우})}=\frac{{}_6C_3}{{}_8C_3}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $1-\frac{{}_6C_3}{{}_8C_3}=\frac{9}{14}$

표준

01 답 ③

$P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)=\frac{7}{10}$

즉, $P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{9}{10}=2P(B)+P(B)-\frac{3}{10}$

즉, $P(B)=\frac{2}{5}$

02 답 $\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-2mx+m+2=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-1\times(m+2)\le 0$

$m^2-m-2\le 0$

$(m+1)(m-2)\le 0$

즉, $-1\le m\le 2$

따라서 구하는 확률은 $-6\le m\le 6$을 만족시키는 실수 m이 $-1\le m\le 2$일 확률이므로

$\frac{2-(-1)}{6-(-6)}=\frac{1}{4}$

03 답 ②

탁구공 12개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_4=495$

흰 색 탁구공이 노란 색 탁구공보다 많은 경우는 흰 색 탁구공 3개, 노란 색 탁구공 1개 또는 흰 색 탁구공 4개를 꺼내는 경우이다.

(ⅰ) 흰 색 탁구공 3개, 노란 색 탁구공 1개를 꺼내는 경우의 수는

$_7C_3 \times {_5C_1} = 35 \times 5 = 175$

(ii) 흰 색 탁구공 4개를 꺼내는 경우의 수는

$_7C_4 = {_7C_3} = 35$

따라서 구하는 확률은

$\frac{175+35}{495} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$

04 답 ①

주머니 속에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 2개 모두 검은 공이 나오는 사건을 A라 하면 적어도 1개가 흰 공일 사건은 A^C이다.

검은 공의 개수를 $n(0 \le n \le 10)$이라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{_nC_2}{_{10}C_2} = \frac{n(n-1)}{90}$

이때 $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{n(n-1)}{90} = \frac{8}{15}$에서

$n^2 - n - 42 = 0$, $(n-7)(n+6) = 0$, 즉 $n = 7$

따라서 검은 공의 개수가 7이므로 흰 공의 개수는 3이다.

발전

01 답 ⑤

x축과 평행한 직선 2개와 y축과 평행한 직선 2개를 따라 선분을 그으면 직사각형이 그려지므로 그릴 수 있는 직사각형의 총 개수는

$_4C_2 \times {_4C_2} = 36$

각 직선 사이의 간격을 1이라 하면

(i) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수

x축 및 y축과 평행한 직선 위에 길이가 1인 선분을 잡는 방법이 각각 3가지씩 있으므로

$3 \times 3 = 9$

(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수

x축 및 y축과 평행한 직선 위에 길이가 2인 선분을 잡는 방법이 각각 2가지씩 있으므로

$2 \times 2 = 4$

(iii) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수

x축 및 y축과 평행한 직선 위에 길이가 3인 선분을 잡는 방법이 각각 1가지씩 있으므로

$1 \times 1 = 1$

따라서 그릴 수 있는 정사각형의 개수는 14이므로 (i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

02 답 ⑤

12장의 카드에서 3장을 꺼낼 때, 3장이 모두 스페이드, 하트, 다이아몬드 무늬인 사건을 각각 A, B, C라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{_4C_3}{_{12}C_3} = \frac{4}{220}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{_3C_3}{_{12}C_3} = \frac{1}{220}$

$\mathrm{P}(C) = \frac{_5C_3}{_{12}C_3} = \frac{10}{220}$

A, B, C는 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{10}{220} = \frac{3}{44}$$

따라서 두 가지 이상의 무늬의 카드가 나올 확률은

$$\mathrm{P}((A \cup B \cup C)^c) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{3}{44} = \frac{41}{44}$$

Ⅱ-1 확률의 뜻과 활용

01 ③	**02** ①	**03** 66	**04** ④	**05** ②
06 ②	**07** ④	**08** ⑤	**09** ②	**10** ⑤
11 ④	**12** ①	**13** ④	**14** ④	**15** ③
16 10	**17** ②	**18** ③	**19** ②	**20** $\frac{1}{15}$
21 15	**22** 6	**23** 98	**24** $\frac{25}{41}$	

01 {HHH}, {HHT}, {HTH}, {THH}, {HTT}, {THT}, {TTH}, {TTT}
따라서 근원사건은 8개이다.

02 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$$

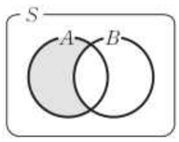
03 적어도 한 명의 남학생이 뽑힐 사건을 A라 하면 남학생이 한 명도 뽑히지 않는 사건은
A^C이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$
이므로 $p+q=35+31=66$

04 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $D=\{1,\ 4\}$에서
$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\{2,\ 6\}$, $B\cap D=\varnothing$, $C\cap D=\{1\}$
따라서 두 사건 B와 D는 서로 배반사건이다.

05 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이고, 나오는 눈의 수의 합이 4 이하가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면
$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 6가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

06 6명의 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 그 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
부모가 서로 마주보고 앉는 사건은 아버지를 제외하고 5명의 가족이 먼저 식탁에 앉은 후에 아버지가 어머니의 맞은 편에 앉으면 되므로 그 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

07 카드의 번호가 3의 배수인 사건을 A, 카드의 번호가 5의 배수인 사건을 B라 하면



$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$,
$B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$, $A\cap B=\{15\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{20}+\frac{4}{20}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

08 2개 모두 흰 공이 나오는 사건을 A, 2개 모두 파란 공이 나오는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{14}$
그런데 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$

09 10개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑을 때, 2개 모두 당첨 제비가 뽑히지 않을 확률은
$\frac{{}_{10-k}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$
이므로 $1-\frac{{}_{10-k}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$
$\frac{{}_{10-k}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$
$\frac{(10-k)(9-k)}{90}=\frac{1}{3}$
$k^2-19k+60=0$, $(k-4)(k-15)=0$
이때 $1\le k\le 10$이므로 $k=4$

10 원판의 전체 넓이는

$\pi \times 4^2 = 16\pi \ (\text{cm}^2)$

원판의 색칠된 부분의 넓이는

$\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = 3\pi \ (\text{cm}^2)$

따라서 구하는 확률은

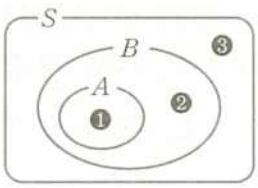
$\dfrac{3\pi}{16\pi} = \dfrac{3}{16}$

11 각자 가위, 바위, 보 중 하나를 낼 수 있으므로 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3$

이긴 사람이 아무도 없는 경우는 모두 다른 것을 내는 경우와 모두 같은 것을 내는 경우가 있고 모두 다른 것을 내는 사건과 모두 같은 것을 내는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{3!}{3\times3\times3} + \dfrac{3}{3\times3\times3} = \dfrac{9}{3\times3\times3} = \dfrac{1}{3}$

12 집합 S의 부분집합 A, B에 대하여 $A \subset B$와 같은 관계가 성립하는 경우의 수는 집합 S의 각 원소를 ❶, ❷, ❸중 하나에 속하게 하는 경우의 수와 같다.



예를 들어 1, 2, 3, 4에 대하여

1, 2 → ❶, 3 → ❷, 4 → ❸

과 같이 대응하는 경우

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

으로 $A \subset B$가 성립한다.

집합 S의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$이므로 전체 부분집합 16개에서 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{16}C_2$

한 집합이 다른 집합의 부분집합이 되는 경우의 수는 집합 S의 각 원소가

❶, ❷, ❸에 대응될 수 있으므로 3^4

이때 모든 원소가 ❶, ❸에만 대응되는 경우는 $A = B$가 되어 조건에 모순이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{3^4 - 2^4}{{}_{16}C_2} = \dfrac{81-16}{\dfrac{16\times15}{2\times1}} = \dfrac{13}{24}$

13 이차방정식 $ax^2 - 8x + b = 0$이 실근을 가지려면

$\dfrac{D}{4} = (-4)^2 - ab \geq 0$, 즉 $ab \leq 16$이어야 한다.

(ⅰ) $a = 1$일 때,

$b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ➡ 6개

(ⅱ) $a = 2$일 때,

$b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ➡ 6개

(ⅲ) $a = 3$일 때, $b = 1, 2, 3, 4, 5$ ➡ 5개

(ⅳ) $a = 4$일 때, $b = 1, 2, 3, 4$ ➡ 4개

(ⅴ) $a = 5$일 때, $b = 1, 2, 3$ ➡ 3개

(ⅵ) $a = 6$일 때, $b = 1, 2$ ➡ 2개

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6+6+5+4+3+2}{6\times6} = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$

14 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2 = 28$

정육면체의 한 면에서의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이고, 정육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{3}$이다.

이때 한 면에는 대각선이 두 개씩 있으므로 길이가 $\sqrt{2}$인 대각선의 개수는 $2 \times 6 = 12$이고, 길이가 $\sqrt{3}$인 대각선의 개수는 $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$의 4이므로 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 선분의 개수는 $12 + 4 = 16$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$

15 10개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2 = \dfrac{10\times9}{2\times1} = 45$

흰 공의 개수를 n $(n > 5)$이라 하면 검은 공의 개수는 $10 - n$이므로 2개의 공이 서로 다른 색이 나오는 경우의 수는

${}_nC_1 \times {}_{10-n}C_1 = n \times (10 - n)$

그러므로 확률은

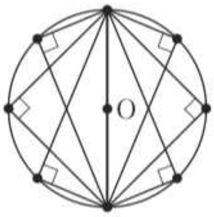
$\dfrac{n(10-n)}{45} = \dfrac{8}{15}$

$n(10-n) = 24 = 6 \times 4$

이때 $n > 5$이므로 $n = 6$

16 8개의 점에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_8C_3 = 56$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 지름 하나에서 만들 수 있는 직각삼각형이 6개이고, 지름은 모두 4개이므로 직각삼각형의 개수는 24이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

17 5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1}=10$

5개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$1+2+3+4+5=15$

꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합이 8 이상이어야 주머니 안에 남아 있는 공에 적혀 있는 세 수의 합보다 크다.

꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합이 8 이상인 경우는 $(3,\ 5)$, $(4,\ 5)$

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

18 A, B, C, D 네 사람에게 4개의 선물을 나누어 주는 경우의 수는 $4!=24$

A가 2개 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우는 3가지가 있다. 같은 방법으로 A가 3, 4가 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우도 각각 3가지씩 있으므로

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

19 봉사 동아리를 선호하는 학생 및 교사의 수는

$25+6+14+5=50$

이고, 이 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$_{50}C_2 = 1225$

여자 교사 5명 중에서 1명을 뽑고, 남학생 25명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_{25}C_1 = 5\times25=125$

따라서 구하는 확률은

$\frac{_5C_1\times{}_{25}C_1}{_{50}C_2}=\frac{5}{49}$

20 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$, 두 수의 합이 7이 되는 경우는

$(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$

이 순서쌍을 세 열에 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!\times2\times2\times2=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

21 문제 이해 abc의 값이 짝수가 되려면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수가 되어야 한다. ▸ 2점

해결 과정 크기가 다른 세 개의 주사위를 던질 때, 짝수인 눈이 적어도 하나가 나오는 사건을 A라 하면 여사건 A^C은 세 개의 주사위의 눈의 수가 모두 홀수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ ▸ 2점

이므로 $p+q=7+8=15$ ▸ 1점

22 해결 과정 $\frac{15+n}{24+n}\ge\frac{7}{10}$ 이므로 ▸ 3점

$10(15+n)\ge 7(24+n)$

$10n+150 \ge 7n+168$

$10n-7n \ge 168-150$

$3n \ge 18$, $n \ge 6$

답 구하기 따라서 n의 최솟값은 6이다. ▸ 5점

23 해결 과정 갑이 이기고, 지고, 비기는 사건을 각각 A, B, C라 하고 그 사건이 일어난 횟수를 각각 a, b, c로 놓으면 가위바위보를 5번하므로

$a+b+c=5$ …… ㉠

2계단씩 a번, 0계단씩 b번, 1계단씩 c번 오르므로

$2a+c=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c는

$a=0$일 때, $b=0$, $c=5$

$a=1$일 때, $b=1$, $c=3$

$a=2$일 때, $b=2$, $c=1$

의 세 가지 경우가 있다. ▸ 4점

이때 이기고, 지고, 비기는 경우의 확률은 $\frac{1}{3}$로

모두 같으므로

(i) $a=0$, $b=0$, $c=5$인 경우

5개의 C를 일렬로 배열하는 경우의 수는

1가지이므로 $1\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$ ▸ 1점

(ii) $a=1$, $b=1$, $c=3$인 경우

A, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우

의 수는 $\frac{5!}{3!}$이므로 $\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$ ▸ 1점

(iii) $a=2$, $b=2$, $c=1$인 경우

A, A, B, B, C를 일렬로 배열하는 경우

의 수는 $\frac{5!}{2!2!}$이므로 $\frac{5!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$ ▸ 1점

답 구하기 (i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$1\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{5!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$=(1+20+30)\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{17}{81}$

따라서 $p+q=81+17=98$ ▸ 1점

24 해결 과정 $10x^2+3nx-n^2=(5x-n)(2x+n)$

이므로 근은 $x=\frac{n}{5}$ 또는 $x=-\frac{n}{2}$이고, n은 5

또는 2로 나누어떨어져야 한다. ▸ 1점

(i) $n=5k$(k는 정수)를 만족시키는 경우

$n\in\{-20, -15, -10, \cdots, 10, 15, 20\}$

▸ 2점

(ii) $n=2k$(k는 정수)를 만족시키는 경우

$n\in\{-20, -18, -16, \cdots, 16, 18, 20\}$

▸ 2점

(iii) $n=10k$(k는 정수)를 만족시키는 경우

$n\in\{-20, -10, 0, 10, 20\}$ ▸ 2점

답 구하기 (i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{41}+\frac{21}{41}-\frac{5}{41}=\frac{25}{41}$ ▸ 1점

Ⅱ-2 조건부확률

01 조건부확률

기본

01 답 (1) 0.2 (2) 0.5

(1) $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서 $0.4=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{0.5}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

(2) $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.1}{0.2}=0.5$

02 답 ③

임의로 선택한 한 명이 A차를 선호하는 사람일 사건을 A,여자일 사건을 F라 하면

$\mathrm{P}(F\mid A)=\dfrac{n(A\cap F)}{n(A)}=\dfrac{52}{96}=\dfrac{13}{24}$

03 답 $\dfrac{3}{5}$

(구하는 확률)$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{5}$

04 답 ④

대학생인 사건을 A, 남자인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.7$, $\mathrm{P}(B\mid A)=0.4$, $\mathrm{P}(B\mid A^c)=0.5$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B\mid A)\mathrm{P}(A)=0.4\times0.7=0.28$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(B\mid A^c)\mathrm{P}(A^c)=0.5\times0.3=0.15$

이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=0.28+0.15=0.43$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.28}{0.43}=\dfrac{28}{43}$

표준

01 답 (1) $\dfrac{5}{6}$ (2) $\dfrac{2}{5}$

(1) $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{4}\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{12}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{7}{12}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{12}=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{2}{5}$

02 답 ④

주말에 비가 오는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 B라 할 때 야구팀이 주말에 이길 확률은

(ⅰ) 주말에 비고 오고, 경기를 이기는 확률

$\mathrm{P}(A\cap B)$

(ⅱ) 주말에는 비가 안 오고, 경기를 이기는 확률

$\mathrm{P}(A^C\cap B)$

주말에 비가 올 확률이 0.3이므로 $\mathrm{P}(A)=0.3$

비가 오는 날 경기에서 이길 확률이 0.4이므로

$\mathrm{P}(B\mid A)=0.4$

따라서 (ⅰ)을 만족시키는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\mid A)=0.3\times0.4=0.12$

주말에 비가 오지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.3=0.7$

비가 오지 않는 날 경기에서 이길 확률이 0.6

이므로 $\mathrm{P}(B\mid A^C)=0.6$

따라서 (ⅱ)를 만족시키는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B\mid A^C)$

$=0.7\times0.6=0.42$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.12+0.42=0.54$

03 답 $\frac{1}{3}$

A 주머니에서 흰 공을 뽑는 사건을 A, B 주머니에서 흰 공을 뽑는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.
이때 B 주머니에서 꺼낸 공이 흰 공일 경우는 다음의 두 가지이므로 각각의 확률을 구하면

(ⅰ) A 주머니에서 흰 공을 꺼내어 B 주머니에 넣고, B 주머니에서 흰 공을 꺼내는 경우

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{56}$$

(ⅱ) A 주머니에서 검은 공을 꺼내어 B 주머니에 넣고, B 주머니에서 흰 공을 꺼내는 경우

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{20}{56}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}\\&=\frac{\frac{10}{56}}{\frac{10}{56}+\frac{20}{56}}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

04 답 ④

첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{n+2}$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{n+2}\\&=\frac{3n}{(n+3)(n+2)}\end{aligned}$$

즉, $\frac{3n}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{4}$이므로

$(n+3)(n+2)=12n$, $n^2-7n+6=0$

$(n-1)(n-6)=0$

즉, $n=1$ 또는 $n=6$

따라서 모든 n의 값의 합은 7이다.

발전

01 답 $\frac{3}{10}$

임의로 답을 표기할 때, 5문제 중 3문제를 맞힐 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2$ …… ㉠

이때 보기 ③이 정답인 2문제를 모두 맞히고, 다른 3문제 중에서 1문제를 맞힐 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^0\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 조건부확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^0\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2}{{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{10}$$

02 답 ③

실제로 불량품인 사건을 A, 불량품이라고 판정하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=0.9$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.01$, $\mathrm{P}(A)=0.1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)=0.9\times0.1=0.09$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B|A^C)\mathrm{P}(A^C)\\&=0.01\times0.9=0.009\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.09+0.009=0.099\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.09}{0.099}=\frac{10}{11}$$

Ⅱ-2 조건부확률

02 사건의 독립과 종속

기본

01 답 (1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{16}{49}$

첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면

(1) 첫 번째에 흰 공이 나왔을 때, 꺼낸 공을 다시 넣지 않으므로 두 번째 꺼낼 때에는 주머니 속의 공의 개수는 6개이고, 그 중 흰 공은 3개이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

(2) 첫 번째에 꺼낸 공을 다시 넣었으므로 첫 번째에 흰 공이 나올 확률과 두 번째에 흰 공이 나올 확률은 같다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$

02 답 ①

갑이 10점인 표적을 맞힐 사건을 A,
을이 10점인 표적을 맞힐 사건을 B라 하면
두 사건 A와 B는 서로 독립이므로
두 사건 A와 B^C, 두 사건 A^C과 B도 각각 서로 독립이다.
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=0.85\times0.08+0.15\times0.92$
$=0.068+0.138$
$=0.206$

03 답 ④

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $C=\{5,\ 6\}$이고 $A\cap B=\{2,\ 6\}$, $B\cap C=\{6\}$, $A\cap C=\{6\}$이다.

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (독립)

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

즉, $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ (종속)

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$ (독립)

따라서 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 $\frac{5}{32}$

$p=$(1번 던질 때 앞면이 나올 확률)$=\frac{1}{2}$이므로

$q=1-p=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5}{32}$

표준

01 답 ④

$\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$에서

① $A\subset B$이므로 $A\cap B=A$

즉, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$ (참)

③ $\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(B^C|A)$

$=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}+\frac{\mathrm{P}(B^C\cap A)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)+\mathrm{P}(B^C\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$ (참)

④ A, B가 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0$

에서 $\mathrm{P}(A)\neq0$이므로 $\mathrm{P}(B|A)=0$

그런데 $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로 $\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(B|A)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)

⑤ 주어진 명제의 대우 'A^C, B가 서로 독립이면 A, B도 서로 독립이다.'를 증명한다.

A^C, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$ ⋯⋯ ㉠

또한 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡으로부터

$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^{C})\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A^{C})\}\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

이것은 A, B가 서로 독립임을 의미하므로 주어진 명제의 대우는 참이다.
따라서 원래의 명제도 참이다. (참)

02 답 12

표본공간 S는 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고,
$A=\{3,\ 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
또 $n(A\cap X)=1$이므로 $\mathrm{P}(A\cap X)=\frac{1}{6}$
이때 두 사건 A와 X가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X)$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\mathrm{P}(X)$
즉, $\mathrm{P}(X)=\frac{3}{6}$
따라서 집합 X는 3, 6중에서 한 개의 원소를 포함하고, 3, 6을 제외한 나머지 4개의 원소에서 2개의 원소를 포함해야 하므로 구하는 사건 X의 개수는
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=2\times6=12$

03 답 $\frac{609}{625}$

$1-$(0명이 치유될 확률)
$=1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^{4-0}$
$=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$

04 답 $(0.8)^9$

B팀은 5번 성공하고, A팀은 4번 성공, 1번 실패할 때이므로 구하는 확률은
(B팀이 5번 성공할 확률)
× (A팀이 4번 성공, 1번 실패할 확률)
(ⅰ) B팀이 5번 차서 5번 성공할 확률은
${}_5\mathrm{C}_5(0.8)^5(0.2)^0$
(ⅱ) A팀이 5번 차서 4번 성공할 확률은
${}_5\mathrm{C}_4(0.8)^4(0.2)^1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은
${}_5\mathrm{C}_5(0.8)^5(0.2)^0\times{}_5\mathrm{C}_4(0.8)^4(0.2)^1=(0.8)^9$

발전

01 답 263

주사위를 6번 던졌을 때 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 a라 하면
$2a-(6-a)=0$, 즉 $a=2$
이때 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은
${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{20}{243}$
즉, $p=243$, $q=20$
따라서 $p+q=263$

02 답 ④

10의 약수가 나온 횟수를 x라 하면 점수의 총합은
$5x-2(10-x)=7x-20$
얻은 점수가 40점 이상이어야 하므로
$7x-20\geq 40$, 즉 $x\geq 8.57\cdots$
x는 $0\leq x\leq 10$인 정수이므로
$x=9$ 또는 $x=10$
이때 10의 약수가 나올 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고,
그 이외의 숫자가 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로
구하는 확률은
${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{2}{5}\right)^9\left(\frac{3}{5}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{10}=\frac{2^{14}}{5^{10}}$

Ⅱ-2 조건부확률

01 ②	02 ③	03 ③	04 ④	05 ③
06 0.96	07 ②	08 ③	09 $\frac{2}{5}$	10 ③
11 $\frac{3}{8}$	12 7	13 ⑤	14 ①	15 ⑤
16 ④	17 ④	18 ⑤	19 0.61	20 ④
21 $\frac{1}{3}$	22 $\frac{2}{15}$	23 학교, 독서실, 분식집		
24 $\frac{7}{16}$				

01 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{20}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{3}{4}$

02 남학생을 뽑는 사건을 A, 여학생을 뽑는 사건을 B, 인터넷 접속 시간이 평균 한 시간 미만인 학생을 뽑는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{7}{15}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(C|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{15}}=\dfrac{5}{14}$

03 사건 A와 사건 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이므로

$\dfrac{5}{8}=\mathrm{P}(A)+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\mathrm{P}(A)$

$\dfrac{7}{8}\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{7}$

04 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3\times6}{36}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{6\times2}{36}=\dfrac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(C)=\dfrac{3\times3}{36}=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3\times2}{36}=\dfrac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{3\times3}{36}=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B\cap C)=\dfrac{3\times1}{36}=\dfrac{1}{12}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)P(B)=\dfrac{1}{6}$ (독립)

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$ (종속)

ㄷ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{12}$ (독립)

따라서 서로 독립인 사건끼리 짝 지어진 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2}=\dfrac{15}{36}$

$A\cap B=\{(2,1),(3,2),(4,1),(4,3),(5,2),$
$(5,4),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{9}{36}$

따라서

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{9}{36}}{\frac{15}{36}}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

06 세 명 모두 맞히지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)$

$=0.2\times0.4\times0.5=0.04$

따라서 적어도 한 명이 맞힐 확률은

$1-0.04=0.96$

07 A형인 학생이 뽑힐 사건을 A, 남학생이 뽑힐 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{40}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{30}{100}$

따라서 A형인 학생 중에서 1명을 뽑았을 때, 그 학생이 남학생일 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{3}{4}$

따라서 $8p=6$

08 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이라고 해서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$인 것은 아니다. (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

09 태희가 불량품을 뽑는 사건을 A, 정현이가 불량품을 뽑는 사건을 B라고 하면 태희가 불량품을 뽑고 정현이가 불량품을 뽑는 경우와 태희가 불량품을 뽑지 않고 정현이가 불량품을 뽑는 경우로 나눌 수 있으므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

10 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A|B)=0$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

(거짓)

ㄷ. $0<\mathrm{P}(A|B)<\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}<\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

즉, $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 동전을 3회 던져 앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(3-x)$이다. 이때 동점 P는 $2\times x+1\times(3-x)$만큼 움직인다.

또 동점 P가 한 꼭짓점을 출발하여 다시 출발점에 도착하려면 4만큼 움직여야 하므로

$2x+(3-x)=4$ 즉, $x=1$

즉, 동전을 3회 던져 앞면이 1회 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

12 '적어도 한 번 앞면이 나오는 사건'의 여사건은 '모두 뒷면이 나오는 사건'이다.

동전을 n번 던질 때, 적어도 한 번 앞면이 나올 확률은

$$1-{}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq 0.99$$

$$\frac{1}{100}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad 2^n\geq 100$$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $n\geq 7$

따라서 동전을 7번 이상 던져야 한다.

13 시험에 합격하려면 3문제 또는 4문제를 맞혀야 하므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$=4\times\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}+\frac{16}{81}=\frac{16}{27}$$

14 주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{4}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{40}\end{aligned}$$

(ⅱ) 주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{40}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^{C}\cap B)$$
$$=\frac{9}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{4}$$

15 앞면이 나온 동전의 개수가 5이므로 찬호가 던진 주사위의 눈의 수는 5 또는 6임을 알 수 있다.
따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1}{\frac{1}{6}\times{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1}$$
$$=\frac{\frac{6}{2^6}}{\frac{1}{2^5}+\frac{6}{2^6}}=\frac{3}{4}$$

16 제품을 기계 A에서 만들 사건을 A, 기계 B에서 만들 사건을 B, 불량품일 사건을 E라 하면
$\mathrm{P}(A\cap E)=0.4\times0.01=0.004$
$\mathrm{P}(B\cap E)=0.6\times0.02=0.012$
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=0.016$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.012}{0.016}=\frac{3}{4}$$

17 던지는 횟수가 5 이하인 사건을 A라 하면 여사건 A^c는 던지는 횟수가 6회 이상인 사건이다.
즉, 5회까지 1 또는 2의 눈이 나오지 않아야 하므로
$$\mathrm{P}(A^c)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$
따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=\dfrac{211}{243}$

18 $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
그런데 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$$
$$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$
여사건의 확률에 의하여 $1-\mathrm{P}(B)=\boxed{\mathrm{P}(B^C)}$
이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\boxed{\mathrm{P}(B^C)}$
따라서 두 사건 A와 B^C는 서로 독립이다.
그러므로 (가) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, (나) $\mathrm{P}(B^C)$

19 비가 오는 사건을 A, K 축구팀이 경기에서 이기는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(B|A)=0.4$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.7$,
$\mathrm{P}(A)=0.3$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=0.3\times0.4+0.7\times0.7$$
$$=0.61$$

20 사건 A는 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$
사건 A와 사건 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, 즉 $n(B)=4$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$에서 $n(A\cap B)=2$
따라서 사건 B는 A의 원소 중에서 2개, 여사건 A^C의 원소 중에서 2개로 이루어져 있으므로 구하는 사건 B의 개수는
$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\right)^2=36$$

21 해결 과정 남자 직원을 선택하는 사건을 A, 여자 직원을 선택하는 사건을 B, 회계사 자격증을 가지고 있는 직원을 선택하는 사건을 C라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{7}{10}$
또한, $\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{5}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(A\cap C^C)$
$\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}+\mathrm{P}(A\cap C^C)$
즉, $\mathrm{P}(A\cap C^C)=\dfrac{1}{5}$ ▸ 4점
이때 $\mathrm{P}(C^C)=1-\mathrm{P}(C)=\dfrac{3}{10}$이므로
$\mathrm{P}(C^C)=\mathrm{P}(A\cap C^C)+\mathrm{P}(B\cap C^C)$
$\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{5}+\mathrm{P}(B\cap C^C)$
즉, $\mathrm{P}(B\cap C^C)=\dfrac{1}{10}$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $P(B|C^C)=\dfrac{P(B\cap C^C)}{P(C^C)}$

$=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{3}$ ▸ 2점

22 해결 과정 두 사건 A와 C는 서로 독립이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$에서 ▸ 2점

$\dfrac{1}{3}=P(A)\times\dfrac{1}{2}$

따라서 $P(A)=\dfrac{2}{3}$ ▸ 2점

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cap B)=0$ ▸ 2점

답 구하기 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}+P(B)$

따라서 $P(B)=\dfrac{2}{15}$ ▸ 2점

23 해결 과정 학교, 분식집, 독서실을 각각 A, B, C라 하고 우산을 분실하는 사건을 E라 하고, A, B, C에서 우산을 분실한 사건을 각각 A, B, C라 하면

$P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{P(E)}$ ▸ 2점

$P(B|E)=\dfrac{P(B\cap E)}{P(E)}=\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}}{P(E)}=\dfrac{\frac{3}{20}}{P(E)}$ ▸ 2점

$P(C|E)=\dfrac{P(C\cap E)}{P(E)}=\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}}{P(E)}$

$=\dfrac{\frac{6}{25}}{P(E)}$ ▸ 2점

$P(A|E)>P(C|E)>P(B|E)$이므로

답 구하기 A, C, B, 즉 학교, 독서실, 분식집의 순서대로 가는 것이 합리적이다. ▸ 2점

24 해결 과정 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나올 확률과 짝수의 눈이 나올 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이다. ▸ 1점

(ⅰ) 홀수의 눈이 나올 때, 동전을 3번 던져 앞면이 한 번 나올 확률은

$\dfrac{1}{2}\times{}_3C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{16}$ ▸ 3점

(ⅱ) 짝수의 눈이 나올 때, 동전을 2번 던져 앞면이 한 번 나올 확률은

$\dfrac{1}{2}\times{}_2C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{1}{4}$ ▸ 3점

답 구하기 이때 홀수의 눈이 나오는 사건과 짝수의 눈이 나오는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{16}$ ▸ 1점

II 확률

01 ②	02 $\frac{1}{2}$	03 ④	04 ⑤	05 ①
06 $\frac{11}{12}$	07 ②	08 $\frac{1}{7}$	09 ④	10 ⑤
11 ⑤	12 ②	13 ②	14 ①	15 ③
16 $\frac{3}{28}$	17 $\frac{1}{3}$	18 0.54	19 703	20 7
21 $\frac{1}{3}$	22 $\frac{11}{15}$	23 8	24 485	25 $\frac{1}{3}$

01 ㄱ. 두 개의 동전과 한 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 표본공간 S의 원소의 개수는 $2\times2\times6=24$이다. (거짓)

ㄴ. 두 눈이 모두 같게 되는 경우는 $(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 6)$으로 사건 A의 원소의 개수는 6이다. (참)

ㄷ. 모두 뒷면이 나오는 사건의 여사건은 앞면이 적어도 한 개 나오는 사건으로 앞면이 한 개 또는 두 개가 나오는 경우이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

02 모두 남학생일 사건을 A, 모두 여학생일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{6\times5}{9\times8}=\dfrac{5}{12}$,

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{3\times2}{9\times8}=\dfrac{1}{12}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}-0\\&=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

03 표본공간을 S라 하면 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,

$A=\{2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$이므로

$B^c=\{1,\ 4\}$, $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$A\cap B=\{2\}$, $A^C=\{1,\ 3,\ 5\}$

따라서 옳은 것은 ④ $A\cap B=\{2\}$이다.

04 한 줄로 앉는 경우의 수는 $5!$

부모가 양 끝에 앉고, 가운데에 3명의 자녀가 앉는 경우의 수는

$2!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{2!\times3!}{5!}=\dfrac{2}{5\times4}=\dfrac{1}{10}$

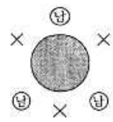
05 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=120$

먼저 3명의 남자가 원탁에 앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2$

이때 오른쪽 그림에서 ×한 곳에 여자 3명을 앉히는 경우의 수는 남자들이 고정되어 있으므로



$3!=6$

남녀가 교대로 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12}{120}=\dfrac{1}{10}$

06 원점을 지나는 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$의 기울기가 3 이하인 사건을 A라 하면 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$의 기울기가 3 초과인 사건은 A^C이므로 $\dfrac{b}{a}>3$이기 위한 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6)$의 3가지이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$

07 15개 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{15}\mathrm{C}_2$이다.

구하는 흰 공의 개수를 n이라 하면 2개를 꺼낼 때, 모두 흰 공일 확률은 $\dfrac{1}{5}$이므로

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{n(n-1)}{15\times14}=\dfrac{1}{5}$

$n^2-n-42=0$, $(n-7)(n+6)=0$

그런데 $n\geq2$이므로 $n=7$

08 8팀을 4, 4의 두 조로 편성하는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!}$$

두 조의 각 4팀을 2, 2의 두 조로 편성하는 경우의 수는

$$\left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)$$

그러므로 8팀을 대진표에 배정하는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)^2$$

이때 특정한 두 팀이 첫 번째 게임에서 만날 방법의 수는 첫 번째 게임을 하는 두 팀을 제외한 나머지 선수 6팀을 나머지 대진표에 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_2 \times {}_4C_4 \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_4 \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)}{{}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)^2} = \frac{1}{7}$$

09 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$$

짝수의 눈 중에서 소수의 눈은 2뿐이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

10 정사면체를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

(i) 나온 눈의 수의 합이 4가 되는 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1) ➡ 3가지

(ii) 나온 눈의 수의 합이 5가 되는 경우
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ➡ 4가지

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3+4}{16} = \frac{7}{16}$$

11 (i) 주사위를 처음 던질 때 5 이상의 눈의 수가 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) 처음에 3 이하의 눈의 수가 나오고 두 번째로 던진 주사위에서 5 이상의 눈의 수가 나올 확률은 $\dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

12
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B^C) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{5}$

13 매 경기에서 A팀이 이길 확률은 $\dfrac{2}{3}$이고, 비기는 경우는 없으므로 질 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

A팀이 3번째 경기까지 2승 1패를 하고, 4번째 경기에서 이기면 되므로 구하는 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

14 3명 중 적어도 2명이 표적을 맞히는 사건의 여사건은 3명 모두 못 맞히거나 1명만 맞히는 사건이다.

(i) 3명 모두 못 맞힐 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{30}$$

(ii) 1명만 맞힐 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{6+3+4}{30} = \frac{13}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{13}{30}\right) = \frac{11}{30}$$

15 동전의 앞면이 나온 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(a,\ 2b)$이므로

$a+b=4$

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+4b^2}=\sqrt{a^2+4(4-a)^2}=\sqrt{5a^2-32a+64}\le 4$$

$5a^2-32a+48\le 0,\ (5a-12)(a-4)\le 0$

$\frac{12}{5}\le a\le 4$

$a=3$ 또는 $a=4$

즉, 원점 O로부터 점 P까지의 거리가 4 이하일 경우는 $a=3,\ b=1$ 또는 $a=4,\ b=0$이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

16 첫 번째 꺼낸 구슬이 파란 구슬일 사건을 A, 두 번째 꺼낸 구슬이 파란 구슬일 사건을 B라고 하면 처음에 파란 구슬이 나왔을 때, 두 번째에도 파란 구슬이 나올 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

17 A, B와 경기에서 이겼을 사건을 각각 A, B라 하고, C와의 경기에서 졌을 사건을 C, 세 경기에서 한 번 졌을 사건을 E라 하면 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(E)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(E\cap C)=\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

따라서 $\mathrm{P}(C|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap C)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\frac{9}{64}}{\frac{27}{64}}=\dfrac{1}{3}$

18 야구팀이 주말 경기에서 이기는 경우는 비가 오는지에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 주말에 비가 오고, 주말 경기에서 이기는 경우 이때의 확률 p_1은

$p_1=0.3\times0.4=0.12$

(ⅱ) 주말에 비가 오지 않고, 주말 경기에서 이기는 경우 이때의 확률 p_2는

$p_2=(1-0.3)\times0.6=0.42$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$p_1+p_2=0.12+0.42=0.54$

19 4번째 게임에서 최종 우승자가 결정되려면 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타낼 때

○×○○

와 같이 게임이 진행되어야 한다.

이때 한 번의 게임에서 A가 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 한 번의 게임에서 B가 이길 확률은

$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이다.

(i) A가 최종 우승자가 되는 경우

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{54}{625}$

(ii) B가 최종 우승자가 되는 경우

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{24}{625}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{54}{625}+\frac{24}{625}=\frac{78}{625}$

이므로 $p=625,\ q=78$

따라서 $p+q=625+78=703$

20 해결 과정 사건 A와 배반인 사건은 $A^C=\{5,\ 6,\ 8\}$의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 $B^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$의 부분집합이다. ▸ 2점

따라서 사건 C는 $A^c\cap B^c=\{5,\ 6,\ 8\}$의 부분집합이어야 한다. ▸ 2점

답 구하기 그런데 $C\neq\varnothing$이므로 사건의 개수는

$2^3-1=7$ ▸ 2점

21 해결 과정 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 $4!$

(i) 3번째에 4가 나오는 경우의 수는 $3!$ ▸ 2점

(ii) 1번째에 4가 나오고 3번째에 3이 나오는 경우의 수는 $2!$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$\frac{3!+2!}{4!}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ ▸ 2점

22 문제 이해 두 사건 A, B가 독립이므로

해결 과정 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$ ▸ 2점

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

즉, $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{11}{15}$ ▸ 1점

23 해결 과정 처음 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 B, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 W라 하면

$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(B\cap W)+\mathrm{P}(B^C\cap W)$

(i) 처음 꺼낸 공이 검은 공일 확률은 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

검은 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 3개와 흰 공 3개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(W|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

즉

$\mathrm{P}(B\cap W)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(W|B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

▸ 2점

(ii) 처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}$

흰 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 2개와 흰 공 4개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(W|B^C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

즉, $\mathrm{P}(B^C\cap W)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(W|B^C)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$ ▸ 2점

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(B\cap W)+\mathrm{P}(B^C\cap W)$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

따라서 $p+q=5+3=8$ ▸ 2점

24 해결 과정 정육면체 모양의 상자를 한 번 던질 때 나온 수가 홀수일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 짝수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다. ▸ 2점

이 상자를 5번 던질 때, 나온 다섯 개의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 나온 다섯 개의 수의 곱이 홀수인 사건이고, 5번 모두 홀수가 나와야 하므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}$ ▸ 3점

답 구하기 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{243}$

$=\frac{242}{243}$ ▸ 2점

즉, $p=243$, $q=242$

따라서 $p+q=243+242=485$ ▸ 1점

25 해결 과정 B를 검은 바둑돌, W를 흰 바둑돌이라 하자.

(i) 첫 번째 시행에서 서로 같은 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

첫 번째 시행에서 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하고 두 번째 시행에서도 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하여 교환하여야 하므로 흰 바둑돌을 선택하는 경우와 검은 바둑돌을 선택하는 경우로 2가지 경우가 있고 각 상자에서 하나의 바둑돌을 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ ▸ 3점

(ii) 첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\rightarrow (B,\ B),\ (W,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\rightarrow (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

한 상자에서 바둑돌을 한 개 선택하면 다른 한 상자에서 그와 다른 색 바둑돌을 한 개 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 번째 시행에서 네 상자 중에서 $(B,\ B)$, $(W,\ W)$인 상자를 선택한 다음 바둑돌을 하나씩 꺼내 교환하면 되므로

$\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{{}_4C_2}\times1=\frac{1}{12}$ ▸ 3점

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ▸ 2점

Ⅲ-1 확률분포

01 확률변수와 확률분포

기본

01 답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{4}{5}$

(1) 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수가 확률변수 X이므로 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이다. 검은 공 2개와 흰 공 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_3$이고, 꺼낸 공 중에서 검은 공이 x개인 경우의 수는 ${}_2C_x \times {}_4C_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2C_x \times {}_4C_{3-x}}{{}_6C_3}$ (단, $x=0, 1, 2$)

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2) 검은 공을 1개 또는 2개 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$
$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

(3) 검은 공을 1개 이하로 꺼낼 확률은
$X \le 1$에서 $X=0$, $X=1$이므로

$\mathrm{P}(X \le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

02 답 $\frac{27}{40}$

확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 이에 따른 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{k}{3^0}=k$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{k}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{k}{9}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{k}{27}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$k+\frac{k}{3}+\frac{k}{9}+\frac{k}{27}=1$, $\frac{40}{27}k=1$

즉, $k=\frac{27}{40}$

03 답 ②, ④

04 답 ③

표준

01 답 $\frac{21}{40}$

확률질량함수의 성질에 의해

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$+\cdots+\mathrm{P}(X=20)$

$=\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}+\cdots+\frac{k}{20\times21}$

$=k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=k\left(1-\frac{1}{21}\right)=1$

즉, $\frac{20}{21}k=1$이므로 $k=\frac{21}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{21}{20x(x+1)}$ $(x=1, 2, 3, \cdots, 20)$

이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{21}{20\times2}=\frac{21}{40}$

02 답 ③

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{a^3}{2}+\frac{1-a^2}{4}+\left(\frac{3}{2}-2a\right)=1$

$2a^3-a^2-8a+4=0$, $(2a-1)(a+2)(a-2)=0$

그런데 $\frac{1}{4}\le a \le \frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	1

이때 $X^2-5X+4=0$에서 $(X-1)(X-4)=0$

즉, $X=1$ 또는 $X=4$

따라서

$\mathrm{P}(X^2-5X+4=0)=\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=4)$
$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=4)$
$=0+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$

03 답 ②

$a+2a+3a+b=1$이므로 $6a+b=1$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(X=2)$이므로 $b=3a$

따라서 $a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X=3)=3a=\frac{1}{3}$

04 답 ④

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times2=1$에서 $a=\frac{1}{4}$

$$a+\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times1$$
$$=\frac{5}{8}$$

발 전

01 답 ③

X	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{12}$	$2b$

확률의 합이 1이므로

$\frac{1}{6}+a+\frac{1}{12}+2b=1$, 즉 $a+2b=\frac{3}{4}$ ……㉠

$$\mathrm{P}(X^2-3X+2\leq0)=\mathrm{P}((X-1)(X-2)\leq0)$$
$$=\mathrm{P}(1\leq X\leq2)$$
$$=a+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

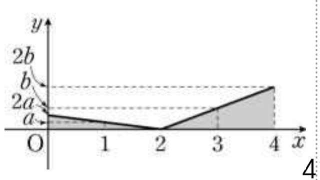
즉, $a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$이므로 ㉠에서 $b=\frac{1}{4}$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}$

02 답 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{8}$

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times2a+\frac{1}{2}\times2\times2b=1$

에서 $a+b=\frac{1}{2}$ ……㉠

이때 $\mathrm{P}(1\leq X\leq3)=2a$이므로

$\frac{1}{2}\times1\times a+\frac{1}{2}\times1\times b=2a$, $b=3a$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{8}$

Ⅲ-1 확률분포

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

기본

01 답 $E(X)=\frac{4}{5}$, $V(X)=\frac{9}{25}$, $\sigma(X)=\frac{3}{5}$

X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\frac{{}_2C_x\times{}_3C_{2-x}}{{}_5C_2}$ (단, $x=0$, 1, 2)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

X의 평균 $E(X)$는

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

X^2의 평균 $E(X^2)$은

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=1$

X의 분산 $V(X)$는

$V(X)=E(x^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

따라서 X의 표준편차 $\sigma(X)$는

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

02 답 150

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 동전을 세 번 던져 받을 수 있는 상금은

(H, H, H) ➜ 300 원
(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H) ➜ 200 원
(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H) ➜ 100 원
(T, T, T) ➜ 0 원

상금으로 받는 금액을 확률변수 X라 하면 X가 취할 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이므로 그에 따른 각각의 확률은 다음 표와 같다.

X	0	100	200	300	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{3}{8}+200\times\frac{3}{8}+300\times\frac{1}{8}$

$=150$(원)

03 답 ④

$P(X=2)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$, $P(X=4)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$P(X=6)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$, $P(X=8)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서

$E(X)=2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{10}=\frac{20}{5}=4$

$V(X)=2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+6^2\times\frac{1}{5}+8^2\times\frac{1}{10}-4^2$

$=20-16=4$

04 답 ③

확률의 총합이 1 이므로

$a+2a+b=1$, 즉 $3a+b=1$ ……㉠

$P(X\geq 1)=\frac{4}{5}$ 이므로 $2a+b=\frac{4}{5}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

따라서 $E(10X-2)=10E(X)-2$

$=10\times\frac{6}{5}-2=10$

표준

01 답 평균: 5, 분산: 3

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$P(X=0)=\frac{{}_2C_2\times{}_2C_0}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{4}{6}$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_0\times{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

X의 평균 $E(X)$는

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{4}{6}+2\times\frac{1}{6}=1$$

X^2의 평균 $E(X^2)$은

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{4}{6}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$$

X의 분산 $V(X)$는

$$V(X)=E(x^2)-\{E(X)\}^2=\frac{4}{3}-1^2=\frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 $Y=3X+2$의 평균 $E(Y)$, 분산 $V(X)$는

$$E(Y)=E(3X+2)=3E(X)+2=3\times1+2=5$$

$$V(Y)=V(3X+2)=3^2V(X)=9\times\frac{1}{3}=3$$

02 답 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4}$

전체 확률의 합은 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$E(X)=2$에서 $1\times a+2\times b+3\times c=2$

즉, $a+2b+3c=2$ …… ㉡

$V(X)=\frac{1}{2}$에서

$$(1^2\times a+2^2\times b+3^2\times c)-2^2=\frac{1}{2}$$

즉, $a+4b+9c=\frac{9}{2}$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

㉡−㉠에서 $b+2c=1$

㉢−㉡에서 $2b+6c=\frac{5}{2}$, 즉 $b+3c=\frac{5}{4}$

그러므로 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4}$

03 답 210

$E(X)=9,\ V(X)=2^2=4$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+9^2=85$

따라서 $E(3X^2-5X)=3E(X^2)-5E(X)$

$=3\times85-5\times9=210$

04 답 8

상금을 확률변수 X라 하면 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	5	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{35}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{1}{50}$	1

확률변수 X의 기댓값 $E(X)$는

$$E(X)=0\times\frac{35}{50}+1\times\frac{10}{50}+5\times\frac{4}{50}+10\times\frac{1}{50}$$

$$=\frac{40}{50}=0.8(\text{만 원})$$

따라서 기댓값이 8천 원이므로 $a=8$

발전

01 답 ③

(ⅰ) $X=0$인 경우

주사위 한 개를 던져 3의 배수가 나오고 동전을 2번 던져 앞면이 나오지 않거나 주사위 한 개를 던져 3의 배수가 나오지 않고 동전을 1번 던져 앞면이 안 나오는 경우이므로

$$P(X=0)=\frac{1}{3}\times{}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

(ⅱ) $X=1$인 경우

주사위 한 개를 던져 3의 배수가 나오고 동전을 2번 던져 앞면이 1번 나오거나 주사위 한 개를 던져 3의 배수가 나오지 않고 동전을 1번 던져 앞면이 1번 나오는 경우이므로

$$P(X=1)=\frac{1}{3}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

(ⅲ) $X=2$인 경우

주사위 한 개를 던져 3의 배수가 나오고 동전을 2번 던져 앞면이 2번 나오는 경우이므로

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

$$E(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

따라서 $\mathrm{E}(6X+4)=6\mathrm{E}(X)+4=6\times\frac{2}{3}+4=8$

02 답 ④

흰 공의 개수를 x, 검은 공의 개수를 $10-x$ 라 하면 $\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=3)$ 이므로

$$\frac{{}_{x}\mathrm{C}_{2}\times{}_{10-x}\mathrm{C}_{1}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=3\times\frac{{}_{x}\mathrm{C}_{3}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}$$

$$\frac{x(x-1)}{2}\times(10-x)=3\times\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$x\geq 3$ 이므로

$10-x=x-2$, 즉 $x=6$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{4}\mathrm{C}_{3}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{2}\times{}_{4}\mathrm{C}_{1}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{3}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}\\&=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}\end{aligned}$$

Ⅲ-1 확률분포

03 이항분포

기본

01 답 $E(3X-4)=56$, $V(3X-4)=144$, $\sigma(3X-4)=12$

이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$, $V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\frac{20}{5}=4$

따라서

$E(3X-4)=3E(X)-4=56$,

$V(3X-4)=3^2V(X)=144$,

$\sigma(3X-4)=3\sigma(X)=3\times4=12$

02 답 (1) 평균: 6번, 표준편차: 2번
(2) 평균: 1000개, 표준편차: 30개

(1) 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 평균 $E(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$는

$E(X)=18\times\frac{1}{3}=6$(번)

$\sigma(X)=\sqrt{18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{4}=2$(번)

(2) 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10000,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 X의 평균 $E(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$는

$E(X)=10000\times\frac{1}{10}=1000$(개)

$\sigma(X)=\sqrt{10000\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=\sqrt{900}=30$(개)

03 답 ③

이산확률변수 X가 이항분포 $B\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=48\times\frac{1}{4}=12$

$V(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=9+12^2=9+144=153$

04 답 0.660

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05$을 변형하면

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05$, $-\frac{1}{20}<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<\frac{1}{20}$

즉, $\frac{7n}{60}<X<\frac{13n}{60}$

$n=50$일 때 $\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.05$을 만족시키는 X의 값의 범위는 $\frac{350}{60}<X<\frac{650}{60}$

즉, $5.833\cdots<X<10.833\cdots$

이때 X가 취할 수 있는 값은 자연수이므로

$X=6$, $X=7$, $X=8$, $X=9$, $X=10$

따라서

$P\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$

$=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$
$\quad+P(X=9)+P(X=10)$

$=0.112+0.140+0.151+0.141+0.116=0.660$

표준

01 답 48

두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 한 번할 때, 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 주사위 모두 홀수의 눈이 나와야 하므로 그 확률은

$\frac{3\times3}{6^2}=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때 확률변수 X의 분산이 9이므로

$n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

즉, $n=48$

02 답 $\frac{1}{4}$

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르고, X의 평균이 12, 표준편차가 3이므로

$\mathrm{E}(X)=np=12$ ...... ㉠

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=3$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\sqrt{12(1-p)}=3$

양변을 제곱하면

$12(1-p)=9$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$

03 답 (1) 1 (2) 19

확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=r)={}_{16}\mathrm{C}_r\left(\dfrac{1}{4}\right)^r\left(\dfrac{3}{4}\right)^{16-r}$ 인 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

(1) 전체 확률의 합이므로 주어진 식의 값은 1이다.

(2) 변량의 제곱 r^2에 확률

$\mathrm{P}(X=r)={}_{16}\mathrm{C}_r\left(\dfrac{1}{4}\right)^r\left(\dfrac{3}{4}\right)^{16-r}$ 을 곱하여 더한 것이므로 확률변수 X의 제곱의 평균을 뜻한다.

즉, $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=3+4^2=19$

04 답 ④

통계적 확률은 $\dfrac{4}{100}$이고, 이때 시행횟수 n이 충분히 크므로 수학적 확률로 사용해도 된다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \dfrac{4}{100}\right)$를 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{600\times\dfrac{4}{100}\times\dfrac{96}{100}}=\dfrac{24}{5}$

발전

01 답 ②

30번 던져서 같은 색의 공이 나온 횟수를 확률변수 X라 하자.

한 번의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{21}{45}=\dfrac{7}{15}$

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \dfrac{7}{15}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=30\times\dfrac{7}{15}=14$

따라서 얻을 수 있는 점수를 확률변수 Y라 하면

$Y=4X+2(30-X)=2X+60$ 이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+60)=2\mathrm{E}(X)+60$

$=28+60=88$

02 답 36

두 개의 정사면체 A, B를 던질 때, 정사면체 A의 바닥면에 있는 수를 a, 정사면체 B의 바닥면에 있는 수를 b라 하면 두 수의 곱이 소수가 되는 경우의 a, b의 순서쌍은

(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)

의 4개이므로 이 경우의 확률은 $\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때 $X+Y=16$, 즉 $Y=16-X$이므로

$3X+2Y=3X+2(16-X)=X+32$

$\mathrm{E}(3X+2Y)=\mathrm{E}(X+32)=\mathrm{E}(X)+32$

$=16\times\dfrac{1}{4}+32=36$

Ⅲ-1 확률분포

04 정규분포

기본

01 답 (1) 0.9772 (2) 0.8185 (3) 0.9332

(1) $\mathrm{P}(Z \le 2) = \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

(2) $\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

(3) $\mathrm{P}(Z \ge -1.5) = \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(Z \ge 0)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) + 0.5$
$= 0.4332 + 0.5 = 0.9332$

02 답 ④

ㄱ. 평균과 비교하여 상위 성적의 표준편차가 B 고등학교보다 A 고등학교가 더 크다. (참)
ㄴ. A 고등학교와 B 고등학교는 평균이 같다.(거짓)
ㄷ. C 고등학교 보다 B 고등학교의 표준편차가 작으므로 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 11

정규분포곡선은 직선 $x = 20$ 에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(X \ge 29)$ 에서

$\dfrac{a+29}{2} = 20,\ a + 29 = 40$

즉, $a = 11$

04 답 ②

② $x = m$일 때 최댓값을 갖는다.

표준

01 답 수학

각각의 학생들이 세 과목의 성적을 받는 것은 독립시행이므로 국어, 영어, 수학 성적을 각각 확률변수 A, B, C라 하면

A는 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 9^2)$
B는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 11^2)$
C는 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 10^2)$을 따른다.

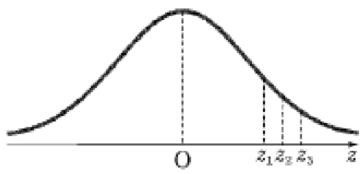
확률변수 X에서 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$으로 경배의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 표준화하면

국어: $z_1 = \dfrac{64-56}{9} = \dfrac{8}{9} = 0.88\cdots$

영어: $z_2 = \dfrac{61-50}{11} = \dfrac{11}{11} = 1$

수학: $z_3 = \dfrac{60-48}{10} = \dfrac{12}{10} = 1.2$

표준화한 세 점수 z_1, z_2, z_3을 표준정규분포곡선에 나타내면



위의 그래프에서
$\mathrm{P}(Z \ge z_1)$, $\mathrm{P}(Z \ge z_2)$, $\mathrm{P}(Z \ge z_3)$의 값을 비교하면 $\mathrm{P}(Z \ge z_1) > \mathrm{P}(Z \ge z_2) > \mathrm{P}(Z \ge z_3)$
……㉠

$\mathrm{P}(Z \ge z)$의 값이 작을수록 성적이 높은 점수 분포에 속하므로 ㉠에 의해 수학 과목을 60점 이상 받을 확률이 가장 낮으므로 상대적으로 높은 점수 분포에 속한다.
따라서 경배가 다른 학생들보다 제일 잘한다고 할 수 있는 과목은 수학이다.

02 답 (1) 30.72 % (2) 114명

시험에서 받은 성적을 확률변수 X라 하면 정규분포 $\mathrm{N}(345,\ 10^2)$을 따른다.

(1) 구하는 확률은
$\mathrm{P}(350 \le X \le 375)$
$= \mathrm{P}\left(\dfrac{350-345}{10} \le Z \le \dfrac{375-345}{10}\right)$
$= \mathrm{P}(0.5 \le Z \le 3)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 3) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$= 0.4987 - 0.1915 = 0.3072$

따라서 점수가 350점 이상 375점 이하인 학생의 전체 지원자에 대한 비율은 30.72 %

(2) 구하는 확률은

$P(X \ge 365)$

$= P\left(Z \ge \dfrac{365-345}{10}\right) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

따라서 365점 이상을 받은 학생 수는

$5000 \times 0.0228 = 114$(명)

03 답 (1) 0.8185 (2) 0.0668 (3) 0.0228

(1) 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100, \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(X) = 100 \times \dfrac{1}{2} = 50$

$V(X) = 100 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 25$

이므로 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따른다.

$P(40 \le X \le 55)$는 $Z = \dfrac{X-50}{5}$에서

$P(40 \le X \le 55)$

$= P(-2 \le Z \le 1)$

$= P(0 \le Z \le 2) + P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$

(2) 발아한 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(150, \dfrac{3}{5}\right)$을 따른다.

$E(X) = 150 \times \dfrac{3}{5} = 90$

$V(X) = 150 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = 36$

이므로 정규분포 $N(90, 6^2)$을 따른다.

$P(X \ge 99)$는 $Z = \dfrac{X-90}{6}$에서

$P(X \ge 99) = P(Z \ge 1.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

(3) 안경 낀 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(300, \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

$E(X) = 300 \times \dfrac{1}{4} = 75$

$V(X) = 300 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{225}{4}$

그러므로 정규분포 $N\left(75, \left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(X \le 60)$는 $Z = \dfrac{X-75}{\frac{15}{2}}$에서

$P(X \le 60) = P(Z \le -2) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

04 답 ⑤

주어진 확률분포는 162회의 독립시행에서 어느 사건이 일어날 확률이 $\dfrac{2}{3}$임을 뜻하므로 X는 이항분포 $B\left(162, \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

X의 평균 $E(X)$와 분산 $V(X)$를 구하면

$E(X) = 162 \times \dfrac{2}{3} = 108$

$V(X) = 162 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = 36 = 6^2$

이때 시행 횟수 $n = 162$는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108, 6^2)$을 따른다.

$102 \le X \le 117$을 $Z = \dfrac{X-108}{6}$로 표준화하면

$P(102 \le X \le 117)$

$= P\left(\dfrac{102-108}{6} \le Z \le \dfrac{117-108}{6}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 1.5)$

$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.5)$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.34 + 0.43 = 0.77$

발전

01 답 34.5 점

시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(28, 5^2)$을 따르고, $Z = \dfrac{X-28}{5}$로 표준화하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따른다.

합격한 지원자의 최저 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X \geq k) = 0.1$

이 성립해야 한다. 즉,

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{k-28}{5}\right) = 0.1$,

$0.5 - \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{k-28}{5}\right) = 0.1$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{k-28}{5}\right) = 0.4$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.3) = 0.4$ 이므로

$\frac{k-28}{5} = 1.3$, $k-28 = 6.5$, 즉 $k = 34.5$

따라서 합격한 지원자의 최저 점수는 34.5 점이다.

02 답 2082명

10000명의 복권 구매자 중에서 복권 당첨자 수를 확률변수 X라 할 때, 복권의 당첨 확률은 0.2이고, 복권 구매자 10000명에 대한 독립시행이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.2)$를 따른다.

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$\mathrm{E}(X) = 10000 \times 0.2 = 2000$

$\mathrm{V}(X) = 10000 \times 0.2 \times 0.8 = 1600 = 40^2$

이때 시행 횟수 $n = 10000$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 40^2)$을 따른다.

따라서 복권 회사가 매주 준비해야 하는 최소 당첨 인원수를 a라 할 때, 실제 당첨 인원 수가 a보다 클 확률이 2 %이내이므로 $\mathrm{P}(X \geq a) \leq 0.02$

$X \geq a$를 $Z = \frac{X-2000}{40}$으로 표준화하면

$$\mathrm{P}(X \geq a) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-2000}{40}\right)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-2000}{40}\right) \leq 0.02$$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-2000}{40}\right) \geq 0.48$

이때 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.05) = 0.48$이므로

$\frac{a-2000}{40} \geq 2.05$

즉, $a \geq 2082$

따라서 복권 회사는 매주 최소 2082명분의 당첨금을 준비해야 한다.

Ⅲ-1 확률분포

01 ① 02 $\frac{34}{35}$ 03 ③ 04 ④ 05 860
06 ① 07 ④ 08 96 09 ③ 10 ③
11 ① 12 ② 13 ④ 14 ① 15 ①
16 ② 17 ① 18 ④ 19 ② 20 ④
21 $\frac{9}{20}$ 22 140 23 5^{10} 24 $\frac{3}{2}$

01 확률의 총합은 1이므로 $a=\frac{1}{3}$

$P(2\le X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{2}$

02

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$P(X\le 2)=\frac{34}{35}$

03 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=k)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}+\cdots+\frac{k}{15}$

$=\frac{1}{15}\times(1+2+3+4+\cdots+k)$

$=\frac{1}{15}\times\frac{k(k+1)}{2}=1$

$k(k+1)=30$, 즉 $k=5$

$E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{5}{15}$

$=\frac{1}{15}\times(1+4+9+16+25)=\frac{11}{3}$

04

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

$V(X)$

$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\frac{11}{12}$

따라서 $E(X)+V(X)=\frac{3}{2}+\frac{11}{12}=\frac{29}{12}$

이므로 $p+q=12+29=41$

05 상금을 X라 하면 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	5000	2000	500	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{82}{100}$	1

따라서 상금의 기댓값 $E(X)$는

$E(X)=5000\times\frac{3}{100}+2000\times\frac{15}{100}+500\times\frac{82}{100}$

$=860$

06

X	30	45	60	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$E(X)=30\times\frac{2}{5}+45\times\frac{8}{15}+60\times\frac{1}{15}=40$

07 확률변수 X가 정규분포 $N(80,\ 10^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-80}{10}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(70\le X\le 100)$

$=P\left(\frac{70-80}{10}\le Z\le\frac{100-80}{10}\right)$

$=P(-1\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

08 확률변수 X가 이항분포 $B\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=150\times\frac{3}{5}=90$

$V(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

$n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\frac{X-90}{6}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\geq a)=0.16$에서 $a>90$이므로

$P(X\geq a)=P\left(Z\geq\frac{a-90}{6}\right)$

$=0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-90}{6}\right)=0.16$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{a-90}{6}\right)=0.34$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.34$이므로

$\frac{a-90}{6}=1$

즉, $a=96$

09

X	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$

$V(X)$

$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=6^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}+8^2\times\frac{1}{4}+9^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{15}{2}\right)^2$

$=\frac{115}{2}-\frac{225}{4}=\frac{5}{4}$

10 운동화 한 켤레의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(456,\ 12^2)$을 따른다.

확률변수 $Z=\frac{X-456}{12}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(450\leq X\leq 474)$

$=P\left(\frac{450-456}{12}\leq Z\leq\frac{474-456}{12}\right)$

$=P(-0.5\leq Z\leq 1.5)$

$=P(0\leq Z\leq 0.5)+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

11 최저 합격 점수를 k라 하면

$P(X\geq k)=\frac{320}{2000}=0.16$

응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(240,\ 20^2)$을 따르므로

$P\left(Z\geq\frac{k-240}{20}\right)=0.16$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{k-240}{20}\right)=0.34$이므로

$\frac{k-240}{20}=1$에서 $k=260$

12 확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=r)={}_{50}C_r\left(\frac{1}{5}\right)^r\left(\frac{4}{5}\right)^{50-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$E(X)=50\times\frac{1}{5}=10$

$V(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=8$

$E(X^2)-E(X)=V(X)+\{E(X)\}^2-E(X)$

$=8+100-10=98$

13 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로

$E(X)=np$이고 $V(X)=np(1-p)$이다.

$E(3X)=3E(X)$이므로

$E(3X)=4V(X)$에서

$3np=4np(1-p)$

n은 자연수이고 $0<p<1$이므로

$1-p=\frac{3}{4}$, 즉 $p=\frac{1}{4}$

14 하이패스가 있는 자동차의 대수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때 100은 충분히 큰 수이고

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르며 $Z=\dfrac{X-20}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq n)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{n-20}{4}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{n-20}{4}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{n-20}{4}\right)=0.4772$

따라서 $\dfrac{n-20}{4}=2$이므로 $n=28$

15 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X+5)=4\mathrm{E}(X)+5=13$에서

$\mathrm{E}(X)=2$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이고,

$\mathrm{V}(X)=6$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=6+2^2=10$

16 빵 하나의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 2^2)$을 따른다.

이때 빵이 판매 가능할 확률은

$\mathrm{P}(X \geq 96)=\mathrm{P}(Z \geq -2)=0.98$

2500개의 빵 중에서 판매 가능한 빵의 개수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.98)$을 따르고 n이 충분히 크므로 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2450,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y \geq 2443)=\mathrm{P}(Z \geq -1)=0.84$

17 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르고,

$\mathrm{P}(X \leq 5)=\mathrm{P}(X \geq 9)$가 성립하므로

$m=\dfrac{5+9}{2}=7$

따라서

$\mathrm{P}(3 \leq X \leq 11)=\mathrm{P}\left(\dfrac{3-7}{4} \leq Z \leq \dfrac{11-7}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 1)$

$=2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=2 \times 0.3413$

$=0.6826$

18 여학생의 키를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160, 8^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \dfrac{15}{200}=0.075$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{a-160}{8}\right) \leq 0.075$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-160}{8}\right) \leq 0.425$

$\dfrac{a-160}{8} \geq 1.44,\ a \geq 171.52$

따라서 a의 최솟값은 171.52이다.

19 제품 A의 무게를 확률변수 X라고 하면 정규분포 $\mathrm{N}(10, 0.4^2)$을 따른다.

제품 A가 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(X \leq 9.1)+\mathrm{P}(X \geq 10.9)$

$=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{9.1-10}{0.4}\right)+\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{10.9-10}{0.4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq -2.25)+\mathrm{P}(Z \geq 2.25)$

$=1-2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.25)$

$=1-2 \times 0.4878$

$=1-0.9756$

$=0.0244$

따라서 10000개의 제품 A 중에서 예상되는 불량품의 개수는

$10000 \times 0.0244=244$

20 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(12-x)=f(12+x)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=12$에 대하여 대칭이다.

이때 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $m=12$이다.

$\mathrm{P}(|X-m| \leq 3)$

$=\mathrm{P}(m-3 \leq X \leq m+3)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{(m-3)-m}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{(m+3)-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{3}{\sigma}\right)=2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{3}{\sigma}\right)$

에서 $2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{3}{\sigma}\right)=0.6826$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{3}{\sigma}\right)=0.3413$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\dfrac{3}{\sigma} = 1, \ \sigma = 3$

따라서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(12, 3^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(9 \le X \le 18)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{9-12}{3} \le Z \le \dfrac{18-12}{3}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

21 해결 과정 X가 취할 수 있는 수는 1, 2, 3이고, 이에 대응하는 확률을 각각 구하면

$\mathrm{P}(X=1) = \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3) = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{10}$

이를 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

▸ 4점

$\mathrm{E}(X) = 1 \times \dfrac{3}{5} + 2 \times \dfrac{3}{10} + 3 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{2}$ ▸ 2점

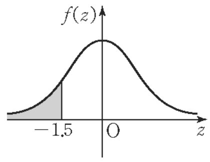
답 구하기

$\mathrm{V}(X) = 1^2 \times \dfrac{3}{5} + 2^2 \times \dfrac{3}{10} + 3^2 \times \dfrac{1}{10} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$= \dfrac{9}{20}$ ▸ 2점

22 문제 이해 2000명의 학생들의 몸무게를 X kg이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 4^2)$을 따르므로 $Z = \dfrac{X-60}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. ▸ 2점

해결 과정 $\mathrm{P}(X \le 54)$



$= \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{54-60}{4}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le -1.5)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1.5)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 - 0.43 = 0.07$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 전체 학생 수가 2000명이므로 몸무게가 54 kg 이하인 학생 수는

$0.07 \times 2000 = 140$(명) ▸ 2점

23 해결 과정 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고 한 개의 주사위를 10번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X=r) = {}_{10}\mathrm{C}_r \left(\dfrac{1}{3}\right)^r \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-r}$

$(r = 0, 1, 2, \cdots, 10)$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 구하는 상금의 기댓값은

$\mathrm{E}(13^X)$

$= {}_{10}\mathrm{C}_0 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_1 \left(\dfrac{13}{3}\right)^1 \left(\dfrac{2}{3}\right)^9 + \cdots$

$+ {}_{10}\mathrm{C}_{10} \left(\dfrac{13}{3}\right)^{10}$

$= \left(\dfrac{13}{3} + \dfrac{2}{3}\right)^{10} = 5^{10}$ ▸ 4점

24 해결 과정 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 3이므로

$\mathrm{E}(X) = np = 3$ ⋯⋯ ㉠

또, $5\mathrm{P}(X=1) = 2\mathrm{P}(X=2)$이므로

$5 \times {}_n\mathrm{C}_1 p(1-p)^{n-1} = 2 \times {}_n\mathrm{C}_2 p^2 (1-p)^{n-2}$

$5 \times np(1-p)^{n-1} = 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

$5(1-p) = (n-1)p$

$np + 4p = 5$ ⋯⋯ ㉡ ▸ 4점

㉠을 ㉡에 대입하면

$3 + 4p = 5, \ p = \dfrac{1}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 이때 $n = 6$이므로

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)$

$=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ▸ 2점

Ⅲ-2 통계적 추정

01 모집단과 표준

기본

01 답 (1)16 (2) 12 (3) 6

(1) 복원추출하는 경우의 수는 4장의 카드에서 중복을 허락하여 2장을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$

(2) 비복원추출로 1장씩 2번 뽑는 경우의 수는 4장의 카드에서 2장의 카드를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

(3) 비복원추출로 동시에 2장을 뽑는 경우의 수는 4장의 카드에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

02 답 $E(\overline{X}) = 1,\ V(\overline{X}) = \frac{1}{8}$

주어진 모집단에서 모평균 m과 모분산 σ^2을 구하면

$$m = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma^2 = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

표본의 크기가 $n = 4$이므로

$E(\overline{X}) = m,\ V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$임을 이용하여

$E(\overline{X}),\ V(\overline{X})$를 구하면

$$E(\overline{X}) = m = 1,\ V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{8}$$

03 답 ③

모집단이 정규분포 $N(20, 3^2)$을 따르므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(20, \frac{3^2}{36}\right)$을 따른다.

따라서

$$P(\overline{X} \geq 21) = P\left(Z \geq \frac{21-20}{0.5}\right)$$
$$= P(Z \geq 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

04 답 ③

크기가 2인 표본을 복원추출할 때, $\overline{X} = 3.5$인 경우는 $X = 3$과 $X = 4$ 또는 $X = 4$와 $X = 3$을 추출하는 경우이므로

$$P(\overline{X} = 3.5)$$
$$= P(X=3) \times P(X=4) + P(X=4) \times P(X=3)$$
$$= \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{25}$$

표준

01 답 $E(\overline{X}) = 2,\ V(\overline{X}) = \frac{1}{6}$

주어진 모집단에서 모평균 m과 모분산 σ^2을 구하면

$$m = \frac{1+1+2+2+2+2+3+3}{8} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2+1^2+2^2+2^2+2^2+2^2+3^2+3^2}{8} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

표본의 크기가 $n = 3$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$E(\overline{X}) = m = 2,\ V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

02 답 ②

이 해수욕장의 $10\,m^2$당 수거되는 쓰레기의 무게를 확률변수 X(톤)이라 하면 X는 정규분포 $N(3,\ 0.3^2)$을 따른다. 이때 이 해수욕장의 면적이 $250\,m^2$인 어느 구역에서 수거된 쓰레기의 무게가 78톤 이상이려면 $10\,m^2$당 수거된 쓰레기의 무게의 평균이 $\frac{78}{25} = 3.12$(톤) 이상이어야 한다. 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(3,\ \frac{0.3^2}{25}\right)$, 즉, $N(3,\ 0.06^2)$을 따르므로

$$P(\overline{x} \geq 3.12) = P\left(Z \geq \frac{3.12-3}{0.06}\right)$$
$$= P(Z \geq 2)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

03 답 144

모집단이 정규분포 $N(36,\ 6^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본을 추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 $E(\overline{X})=36,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{6}{\sqrt{n}}$ 인 정규분포를 따른다.

따라서

$$P(35 \le \overline{X} \le 37)$$
$$=P\left(\dfrac{35-36}{\frac{6}{\sqrt{n}}} \le Z \le \dfrac{37-36}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=P\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{6} \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$$
$$=2P\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.9544$$

$$P\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4772$$

$$\dfrac{\sqrt{n}}{6}=2$$

즉, $n=144$

04 답 ③

비타민의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(700,\ 20^2)$ 을 따른다.

이때 100 개의 제품의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(700,\ 2^2)$ 을 따른다.

한편, 100 개의 무게가 69.6 g 이상 70.4 g 이하이면 정품이므로 표본평균은 696 mg 이상 704 mg 이하가 되면 정품이다.

따라서 이 제품이 정품일 확률은

$$P(696 \le \overline{X} \le 704)$$
$$=P\left(\dfrac{696-700}{2} \le \dfrac{\overline{X}-700}{2} \le \dfrac{704-700}{2}\right)$$
$$=P(-2 \le Z \le 2)$$
$$=2P(0 \le Z \le 2)$$
$$=2 \times 0.4772$$
$$=0.9544$$

발전

01 답 ①

모집단이 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따르므로 표본의 크기가 9 일 때, 표본평균 $\overline{X}$는 $E(\overline{X})=50$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$인 정규분포 $N\left(50,\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서

$$P(48.5 \le \overline{X} \le 53)$$
$$=P\left(\dfrac{48.5-50}{\frac{5}{3}} \le Z \le \dfrac{53-50}{\frac{5}{3}}\right)$$
$$=P(-0.9 \le Z \le 1.8)$$
$$=P(0 \le Z \le 0.9)+P(0 \le Z \le 1.8)$$
$$=0.3159+0.4641=0.7800$$

이때 갑과 을이 독립적으로 표본을 임의추출하므로 구하는 확률은

$$0.78^2=0.6084$$

02 답 319

X는 이항분포 $B\left(200,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$m=200\times\dfrac{1}{2}=100$$

$$\sigma^2=200\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=50$$

크기 2인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$E(\overline{X})=100,\ V(\overline{X})=\dfrac{50}{2}=25$$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{25}=5$이므로

$$E(3\overline{X}+4)+\sigma(3\overline{X}+4)$$
$$=\{3E(\overline{X})+4\}+3\sigma(\overline{X})$$
$$=304+15=319$$

Ⅲ-2 통계적 추정

02 모평균의 추정

기본

01 답 (1) $492.16 \le m \le 507.84$
(2) $489.68 \le m \le 510.32$

표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{X}=500$이고 n은 충분히 크므로 모표준편차 σ대신 표본표준편차 $s=40$을 이용할 수 있다.
이 공장의 전구의 평균수명을 m이라 하면
(1)모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$500-1.96\frac{40}{\sqrt{100}} \le m \le 500+1.96\frac{40}{\sqrt{100}}$$

$$500-7.84 \le m \le 500+7.84$$

따라서 $492.16 \le m \le 507.84$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$500-2.58\frac{40}{\sqrt{100}} \le m \le 500+2.58\frac{40}{\sqrt{100}}$$

$$500-10.32 \le m \le 500+10.32$$

따라서 $489.68 \le m \le 510.32$

02 답 (1)16명 (2)28명

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

모표준편차 $\sigma=5$이고 신뢰구간의 길이가 4.9 cm이어야 하므로

$$2\times1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \le 4.9$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{2\times1.96\times5}{4.9},\quad \sqrt{n}\ge 4,\ \text{즉}\ n \ge 16$$

따라서 최소한 16명 이상의 표본을 조사해야 한다.

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모표준편차 $\sigma=5$이고 신뢰구간의 길이가 4.9 cm이어야 하므로

$$2\times2.58\frac{5}{\sqrt{n}} \le 4.9$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{2\times2.58\times5}{4.9},\quad \sqrt{n}\ge\frac{258}{49}$$

즉, $n \ge 27.72\cdots$

따라서 최소한 28명 이상의 표본을 조사해야 한다.

03 답 ①

모평균 m의 신뢰구간이

$$\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

일 때, 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

따라서 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

04 답 ②

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=l$$

즉, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{l}{4}$

따라서 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 $64n$일 때, 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times3\times\frac{\sigma}{\sqrt{64n}}=\frac{3}{4}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{l}{4}=\frac{3}{16}l$$

표준

01 답 11

모표준편차는 알 수 없으나 표본의 크기 49가 충분히 크므로 표본표준편차 14를 모표준편차 대신 사용할 수 있다.
따라서 학생 전체의 수학 성적의 평균 m에 대한 신뢰도 99 % 의 신뢰구간은

$$63-2.6\times\frac{14}{\sqrt{49}} \le m \le 63+2.6\times\frac{14}{\sqrt{49}}$$

즉, $57.8 \le m \le 68.2$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는
58, 59, $\cdots$, 68 의 11개이다.

02 답 ③

모평균이 m이고 모표준편차가 a인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간은 다음과 같다.

$\overline{x}-2.58\times\frac{a}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{a}{\sqrt{n}}$

이때 표본평균 $\overline{x}$와 모평균 m의 차 $|\overline{x}-m|$의 값이 $\frac{1}{2}a$ 이하 이어야 하므로

$|\overline{x}-m|\le 2.58\frac{a}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}a$

$\sqrt{n}\ge 2\times2.58=5.16$

$n\ge 5.16^2=26.6256$

따라서 자연수 n의 최솟값은 27이다.

03 답 ④

모집단의 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$이라 하면 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 l이므로

$l=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉠

한편, $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}l$이므로

$\frac{1}{2}l=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $k=0.98$

따라서 주어진 표준정규분포표에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-0.98\le Z\le0.98)&=2\mathrm{P}(0\le Z\le0.98)\\&=2\times0.3365\\&=0.6730\end{aligned}$$

이므로 $\alpha=67.30$

04 답 ⑤

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$이다.

또, 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4\sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본평균을 $\overline{y}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$\overline{y}-1.96\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{y}+1.96\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

따라서 $b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{5}$,

$d-c=2\times1.96\times\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$d-c=\sqrt{2}(b-a)$에서

$2\times1.96\times\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{5}$

$\sqrt{n}=5\sqrt{2}$

즉, $n=50$

발전

01 답 ③

ㄱ. 모집단의 분산 $\mathrm{V}(X)$는 일정하고,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$가 성립하므로 n이 커지면

$\mathrm{V}(\overline{X})$는 작아진다. (참)

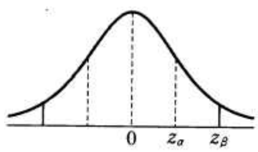
ㄴ. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(-z_\alpha\le Z\le z_\alpha)=\frac{\alpha}{100}$,

$\mathrm{P}(-z_\beta\le Z\le z_\beta)=\frac{\beta}{100}$가 성립하도록

z_α, z_β를 잡으면

$\alpha<\beta$이므로 $z_\alpha<z_\beta$가 성립한다.



따라서 신뢰도 α% 로 추정한 신뢰구간 $[\alpha_1,\ \alpha_2]$는

$\overline{X}-z_\alpha\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+z_\alpha\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고,

신뢰도 β% 로 추정한 신뢰구간 $[\beta_1,\ \beta_2]$는

$\overline{X}-z_\beta\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+z_\beta\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$\beta_1<\alpha_1<\alpha_2<\beta_2$ 이다. (참)

ㄷ. (반례) 신뢰도 95%로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기가 $n_1 = 4$일 때, 신뢰구간은

$$\overline{X} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}} \le m \le \overline{X} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}}$$

즉, $\overline{X} - \sigma \le m \le \overline{X} + \sigma$

표본의 크기가 $n_1 = 16$일 때, 신뢰구간은

$$\overline{X} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le \overline{X} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

즉, $\overline{X} - \frac{\sigma}{2} \le m \le \overline{X} + \frac{\sigma}{2}$

이때 표본의 크기는 $4 < 16$이지만

$\overline{X} - \sigma \le m \le \overline{X} + \sigma$는

$\overline{X} - \frac{\sigma}{2} \le m \le \overline{X} + \frac{\sigma}{2}$에 포함되지 않는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 ③

크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$T_n = \left(\overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

ㄱ. $T_{16} = \frac{4\sigma}{\sqrt{16}} = \sigma$ (참)

ㄴ. $T_{2n} = \frac{4\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} T_n$

$T_{2n}{}^2 = \frac{1}{2} T_n{}^2$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{4}\sigma < T_n \le \frac{1}{2}\sigma$에서 $\frac{1}{4}\sigma < \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}\sigma$

$8 \le \sqrt{n} < 16$

즉, $64 \le n < 256$

따라서 부등식 $\frac{1}{4}\sigma < T_n \le \frac{1}{2}\sigma$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 $256 - 64 = 192$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⅲ-2 통계적 추정

01 $\frac{1}{225}$	**02** ③	**03** 1.568	**04** ⑤
05 ④	**06** ①	**07** ③	**08** ②
09 ③	**10** ②	**11** ③	**12** ④
13 ③	**14** ①	**15** 177	**16** ②
17 ⑤	**18** 68	**19** ④	**20** ②
21 256	**22** 167	**23** 144	**24** 196

01 $\frac{1}{225}$

03 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 표본의 크기 1600이 충분히 크므로 표본표준편차 16을 모표준편차 대신 사용할 수 있다.
모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$$\overline{X}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{1600}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{1600}}$$
즉, $\overline{X}-0.784\le m\le\overline{X}+0.784$
따라서 $\alpha=\overline{X}-0.784$, $\beta=\overline{X}+0.784$이므로
$$\beta-\alpha=(\overline{X}+0.784)-(\overline{X}-0.784)$$
$$=1.568$$

04 확률의 총합이 1이므로
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a=1,\ a=\frac{1}{2}$$
모집단의 평균과 분산을 구하면
$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{2}=4$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=0\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{3}+36\times\frac{1}{2}-4^2=5$$
크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은
$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=4$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{5}{4}$$
따라서
$$\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=4+\frac{5}{4}$$
$$=\frac{21}{4}$$

05 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 1)$을 따르며 $Z=\frac{\overline{X}-10}{1}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서
$$\mathrm{P}(8\le\overline{X}\le 11)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{8-10}{1}\le Z\le\frac{11-10}{1}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772+0.3413=0.8185$$

06
$$\mathrm{E}(X)=1\times\mathrm{P}(X=1)+2\times\mathrm{P}(X=2)$$
$$+3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)$$
$$=\frac{1^2}{10}+\frac{2^2}{10}+\frac{3^2}{10}+\frac{4^2}{10}=3$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=1^2\times\mathrm{P}(X=1)+2^2\times\mathrm{P}(X=2)+$$
$$3^2\times\mathrm{P}(X=3)+4^2\times\mathrm{P}(X=4)-3^2$$
$$=\frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10}-9$$
$$=10-9=1$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$$
따라서
$$\sigma(12\overline{X})=12\sigma(\overline{X})$$
$$=12\times\frac{\sigma(X)}{\sqrt{36}}$$
$$=12\times\frac{1}{6}=2$$

07 n개의 표본을 뽑아 신뢰도 99 %로 모평균을 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.6 이하이어야 하므로
$$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 0.6,\ \sqrt{n}\ge 43$$
즉, $n\ge 1849$
따라서 표본의 크기를 1849 이상으로 해야 한다.

08 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})$이므로
$$\mathrm{E}(X)+2\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X})+2\mathrm{E}(\overline{X})$$
$$=3\mathrm{E}(\overline{X})=9$$

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$

또한, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{3}$, 즉 $\mathrm{V}(X)=3\mathrm{V}(\overline{X})$

이므로

$$\mathrm{V}(X)+3\mathrm{V}(\overline{X})=3\mathrm{V}(\overline{X})+3\mathrm{V}(\overline{X})$$
$$=6\mathrm{V}(\overline{X})=42$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=7$

따라서

$$\mathrm{E}(\overline{X^2})=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=7+3^2=16$$

09 도시의 1 인당 하루 물 사용량을 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 40^2)$ 을 따르므로 표본의 크기가 100 인 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 4^2)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-300|\geq 8)$$
$$=\mathrm{P}(\overline{X}\leq 292)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 308)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{292-300}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{308-300}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\leq -2)+\mathrm{P}(Z\geq 2)$$
$$=2\mathrm{P}(Z\geq 2)$$
$$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\}$$
$$=2(0.5-0.4772)=0.0456$$

11 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{450}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{450-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 450)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$$

$$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$$

이때 표본의 크기가 2 이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$\mathrm{E}(\overline{X})=300,\quad \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{100}{2}=50$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=50+300^2=90050$$

12 복원추출하는 방법의 수는 5 개 중에서 중복을 허락하여 2 개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$5^2=25$

한 번에 하나씩 2 개를 비복원추출하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=5\times 4=20$

따라서 $25+20=45$

13 100은 충분히 큰 수이므로 표본표준편차 16을 모표준편차 대신 사용하면 $\mathrm{P}(|Z|<1.96)=0.95$ 이므로 A 대학교 학생이 가입한 인터넷 카페의 개수의 평균 m 을 신뢰도 95% 로 추정한 신뢰구간은

$$40-1.96\times\frac{16}{\sqrt{100}}\leq m$$
$$\leq 40+1.96\times\frac{16}{\sqrt{100}}$$

즉, $36.864\leq m\leq 43.136$이다.

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는

37, 38, 39, 40, 41, 42, 43

이다.

따라서 구하는 모든 정수의 개수는 7이다.

14 상자에서 임의로 1 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{8}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{3}{8}-2^2$$
$$=\frac{3}{4}$$

표본의 크기가 n 일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{16}$ 이므로

$$\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{1}{16},\ \text{즉 } n=12$$

15 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(175,\ \frac{5^2}{16}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(171 \le \overline{X} \le k)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{171-175}{\frac{5}{4}} \le Z \le \frac{k-175}{\frac{5}{4}}\right)$

$= \mathrm{P}\left(-3.2 \le Z \le \frac{4}{5}k - 140\right)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 3.2) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{5}k - 140\right)$

$= 0.4993 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{5}k - 140\right) = 0.9445$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{5}k - 140\right)$

$= 0.9445 - 0.4993 = 0.4452$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.6) = 0.4452$ 이므로

$\frac{4}{5}k - 140 = 1.6,\ \ \frac{4}{5}k = 141.6$

즉, $k = 177$

16 이 과수원에서 재배한 사과 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(294,\ 12^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(294,\ 4^2)$을 따른다.

사과가 9개 들어 있는 한 박스의 무게가 2.7 kg 이상이면 특별 상품으로 판매하므로 한 박스에 들어 있는 사과 1개의 무게의 평균은 300 g 이상이어야 한다.

$Z = \frac{\overline{X} - 294}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 300)$

$= \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{300-294}{4}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1.5) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

17 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{m^2}{16}\right)$을 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{m^2}{1600}\right)$을 따른다. 따라서

$\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le 82) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{82-m}{\frac{m}{40}}\right)$이고

$\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le 82) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$이므로

$\frac{82-m}{\frac{m}{40}} = 1,\ \ 82 - m = \frac{m}{40}$, 즉 $m = 80$

18 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(-k \le Z \le k) = \frac{\alpha}{100}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$, 표본표준편차 σ, 표본의 크기 n에 대하여

$\overline{X} = 65,\ \ \sigma = 10,\ \ n = 25$ 이므로

$65 - k\frac{10}{\sqrt{25}} \le m \le 65 + k\frac{10}{\sqrt{25}}$

$65 - 2k \le m \le 65 + 2k$

그런데 $63 \le m \le 67$ 에서

$65 - 2k = 63,\ \ 65 + 2k = 67$

즉, $k = 1$

따라서 $\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1) = 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 2 \times 0.34 = 0.68$

$= \frac{\alpha}{100}$

즉, $\alpha = 68$

19 신뢰도 α%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$l = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 임을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다. $\left(\text{단, } \mathrm{P}(-k \le Z \le k) = \frac{\sigma}{100}\right)$

ㄱ. $l = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서 α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 l은 길어지고, n의 값이 커지면 l은 짧아진다.
따라서 α와 n의 값이 커지면 l의 길이는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $l = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서 n의 값이 일정할 때 α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 l은 길어진다. (참)

ㄷ. $l = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서 α의 값이 작아지면 k의 값이 작아지므로 l은 짧아지고, n의 값이 커지면 l은 짧아진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20 가구당 평균 소득을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 50^2)$을 따르므로 표본의 크기가 100인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 5^2)$을 따른다. 따라서

$\mathrm{P}(|\overline{X}-300|\ge 10)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\le 290)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge 310)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{290-300}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{310-300}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\}$

$=2(0.5-0.4772)=0.0456$

21 해결 과정 신뢰도 $\alpha\%\left(\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}\right)$로 추정한 신뢰구간의 길이를 l, 표본의 크기를 n이라 하면

$l=2\times k\times \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ ▸ 3점

$n=16$일 때, $l=2$이므로

$2=2\times k\times \dfrac{2}{\sqrt{16}}$

즉, $k=2$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 신뢰구간의 길이가 0.5가 되려면

$0.5=2\times 2\times \dfrac{2}{\sqrt{n}},\ \dfrac{8}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$

즉, $n=256$ ▸ 2점

22 해결 과정 신뢰도 99%로 모평균을 추정할 때 모평균과 표본평균의 차가 2 이하이면

$|m-\overline{X}|\le 2.58\times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 2$ ▸ 3점

이고 모표준편차 $\sigma=10$이므로

$2.58\times \dfrac{10}{\sqrt{n}}\le 2,\ \sqrt{n}\ge 12.9$

$n\ge 166.41$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 자연수 n의 최솟값은 167이다. ▸ 1점

23 문제 이해 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본을 임의추출한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. ▸ 2점

해결 과정 $\mathrm{P}(X\ge 20)=\mathrm{P}(\overline{X}\le 33)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{20-32}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{33-32}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

$\mathrm{P}(Z\ge -3)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)$ ▸ 2점

$\mathrm{P}(Z\le 3)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)$

답 구하기 따라서 $\dfrac{\sqrt{n}}{4}=3$

즉, $n=144$ ▸ 4점

24 해결 과정 표본의 크기가 16인 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m을 신뢰도 α%로 추정할 때의 신뢰구간은

$\overline{X}-k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le \overline{X}+k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}$ ▸ 2점

신뢰구간의 길이가 $\dfrac{7}{8}\sigma$이므로

$2k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}=\dfrac{7}{8}\sigma$, 즉 $k=\dfrac{7}{4}$ ▸ 2점

한편, 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X_n}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(|\overline{X_n}-m|\le\dfrac{\sigma}{8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\overline{X_n}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\le \dfrac{\frac{\sigma}{8}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $\mathrm{P}\left(|Z|\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)=\dfrac{\alpha}{100}$에서

$\dfrac{\sqrt{n}}{8}=k=\dfrac{7}{4},\ \sqrt{n}=14$

즉, $n=196$ ▸ 2점

III 통계

01 ①	**02** ⑤	**03** ⑤	**04** ③	**05** ①
06 ②	**07** ③	**08** ④	**09** ④	**10** ②
11 ⑤	**12** ②	**13** ①	**14** ①	**15** ④
16 $\frac{17}{50}$	**17** 30	**18** 500	**19** 18	**20** 87
21 46	**22** 850	**23** 36	**24** $3d$	

01 $20a^2+10a^2+3a=\frac{3}{5}$에서

$(5a+1)(10a-1)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{10}$

02 확률변수 X는 이항분포 $B\left(40,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{40\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

04 $P(80\le X\le n)$

$=P\left(\dfrac{80-n}{\frac{n}{3}}\le Z\le 0\right)$

$=P\left(0\le Z\le -\dfrac{240-3n}{n}\right)$

$=P(0\le Z\le 1)$

에서 $-\dfrac{240-3n}{n}=1$이므로 $n=120$

05 $\dfrac{P(X=2)}{P(X=1)}=10$이므로

${}_nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=10\,{}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\dfrac{n(n-1)}{2}=10n$

에서 $n=21$

따라서 $E(X)=21\times\frac{1}{2}=\frac{21}{2}$

06 $E(2X-1)=1$에서

$2E(X)-1=1$, 즉 $E(X)=1$

$E(X)=1$이고 $E((x-1)^2)=V(X)$이므로

$V(X)=4$이다.

따라서 $V(1-2X)=4V(X)=4\times4=16$

07 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공의 개수가 2일 확률은

$\dfrac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 600번 반복하는 것은 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

이때 $E(X)=600\times\frac{3}{5}=360$

$\sigma(X)=\sqrt{600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}=12$

이고 시행횟수 600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\dfrac{X-360}{12}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P(X\le 372)$

$=P\left(Z\le\dfrac{372-360}{12}\right)=P(Z\le 1)$

$=0.5+P(0\le Z\le 1)=0.5+0.3413$

$=0.8413$

08 확률변수 X가 정규분포 $N(65,12^2)$을 따르므로

$P(65\le X\le k)$

$=P\left(\dfrac{65-65}{12}\le Z\le\dfrac{k-65}{12}\right)$

$=P\left(0\le Z\le\dfrac{k-65}{12}\right)$ ······㉠

또한, 확률변수 Y가 정규분포 $N(58,10^2)$을 따르므로

$P(43\le Y\le 58)$

$=P\left(\dfrac{43-58}{10}\le Z\le\dfrac{58-58}{10}\right)$

$=P(-1.5\le Z\le 0)$

$=P(0\le Z\le 1.5)$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$P\left(0\le Z\le\dfrac{k-65}{12}\right)=P(0\le Z\le 1.5)$

이므로 $\dfrac{k-65}{12}=1.5$, 즉 $k=83$

09 임의 추출한 A 음료 한 개의 용량을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(k, 4^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq 295) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{295-k}{4}\right) = 0.9332$

에서 $\dfrac{295-k}{4} < 0$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{295-k}{4}\right)$

$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{k-295}{4}\right)$

즉, $0.5 + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{k-295}{4}\right) = 0.9332$

에서 $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{k-295}{4}\right) = 0.4332$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$이므로

$\dfrac{k-295}{4} = 1.5$, $k = 301$

10 표본의 크기 $n = 16$, 표본평균 $\overline{x} = 100$이고, 모표준편차 $\sigma = 8$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$100 - 1.96 \times \dfrac{8}{\sqrt{16}} \leq m \leq 100 + 1.96 \times \dfrac{8}{\sqrt{16}}$

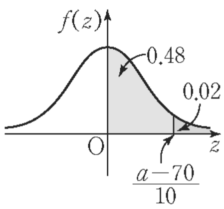
즉, $96.08 \leq m \leq 103.92$

11 1000명의 학생들의 수학 성적을 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 10^2)$을 따른다.

a점 이상이 20등 이내라고 하면

$\mathrm{P}(X \geq a) = \dfrac{20}{1000} = 0.02$

확률변수 $Z = \dfrac{X-70}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로



$\mathrm{P}(X \geq a)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{a-70}{10}\right)$

$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-70}{10}\right) = 0.02$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-70}{10}\right) = 0.48$

그런데 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$이므로

$\dfrac{a-70}{10} = 2$, 즉 $a = 90$

따라서 수학 성적이 상위 20등 이내에 들기 위해서는 90점 이상을 받아야 한다.

12 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{n}{3}$

$\sigma(X) = \sqrt{n \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2n}}{3}$

이때 n은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{n}{3},\ \left(\dfrac{\sqrt{2n}}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\left|X - \dfrac{n}{3}\right| \leq 8\right) \geq 0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X - \frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{2n}}{3}}\right| \leq \dfrac{8}{\frac{\sqrt{2n}}{3}}\right) \geq 0.9544$

$\mathrm{P}\left(|Z| \leq \dfrac{24}{\sqrt{2n}}\right) \geq 0.9544$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{24}{\sqrt{2n}} \leq Z \leq \dfrac{24}{\sqrt{2n}}\right) \geq 0.9544$

이때

$\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2) = 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$

$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$

이므로 $\dfrac{24}{\sqrt{2n}} \geq 2$이어야 한다.

즉, $\sqrt{2n} \leq 12$에서 $n \leq 72$

따라서 자연수 n의 최댓값은 72이다.

13 음료수 1개의 용량을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 4^2)$을 따르므로 임의추출한 음료수 25개의 용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(180,\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 182)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{182-180}{\frac{4}{5}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 2.5)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5)$

$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$

14 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는

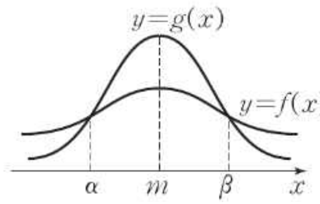
$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{4}{\sqrt{16}}=1$ 인 정규분포

$\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(X\geq m)=\mathrm{P}(\overline{X}\leq m)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(X\geq m)+\mathrm{P}(\overline{X}\leq m)=1$ (참)

ㄴ. $\sigma(X)>\sigma(\overline{X})$ 이므로 두 확률밀도함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$의 최댓값이 $g(x)$의 최댓값보다 작다. (거짓)

ㄷ. 위의 그림에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=m$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근의 합은 $2m$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

15 $2\times3\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}=\dfrac{30}{\sqrt{n}}\leq5,\ \dfrac{6}{\sqrt{n}}\leq1$

즉, $n\geq36$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

16 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=18$이므로

$\mathrm{E}(X)=10\times\dfrac{1}{2}+20a+30\left(\dfrac{1}{2}-a\right)$

$=20-10a=18$

즉, $a=\dfrac{1}{5}$

크기가 2인 표본을 복원추출할 때, $\overline{X}=20$인 경우는 10과 30, 20과 20, 30과 10을 추출하는 경우이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}=20)&=\mathrm{P}(X=10)\times\mathrm{P}(X=30)\\&\quad+\mathrm{P}(X=20)\times\mathrm{P}(X=20)\\&\quad+\mathrm{P}(X=30)\times\mathrm{P}(X=10)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{20}+\frac{1}{25}+\frac{3}{20}=\frac{17}{50}\end{aligned}$$

17 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$이므로 $m=3$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{9}$이므로 $\dfrac{\sigma^2}{9}=3,\ \sigma^2=27$

따라서 $m+\sigma^2=3+27=30$

18 비누 4개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=100,$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{\sqrt{4}}=5$

한편, 제품 검사에서 한 상자의 무게가 360 g 미만이면 불량품으로 판정하므로

$4\overline{X}<360$, 즉 $\overline{X}<90$

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}<90)=\mathrm{P}\left(Z<\dfrac{90-100}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<-2)=\mathrm{P}(Z>2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.48$

$=0.02$

따라서 불량품인 상자의 수는

$25000\times0.02=500$

19 해결 과정 $\mathrm{E}(X)=6$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)$

$=a\mathrm{E}(X)+b=6a+b=8$ ······㉠ ▸ 2점

또, $\mathrm{V}(X)=5$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=5a^2=20$

$a^2=4$ ▸ 2점

이때 $a<0$이므로 $a=-2$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$6\times(-2)+b=8,\ b=20$

답 구하기 $a+b=(-2)+20=18$ ▸ 2점

20 해결 과정 확률변수 X가 이항분포 $B\left(25,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X) = 25 \times \frac{2}{5} = 10$ ▸ 2점

$V(X) = 25 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 6$ ▸ 2점

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$에서

$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 6 + 100 = 106$

▸ 2점

답 구하기 따라서

$E(X^2) - E(2X) + 1$

$= E(X^2) - 2E(X) + 1$

$= 106 - 20 + 1 = 87$ ▸ 2점

21 해결 과정 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 각각의 확률은

$P(X=1) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$

$P(X=2) = \frac{3}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$

$P(X=3) = \frac{4}{{}_5C_2} = \frac{2}{5}$

$P(X=4) = \frac{1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{5}$

▸ 4점

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{2}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$= \frac{33}{5} - \frac{144}{25} = \frac{21}{25}$$

답 구하기 따라서 $p = 25$, $q = 21$이므로

$p + q = 46$ ▸ 2점

22 해결 과정 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 모평균 700과 같으므로

$\overline{m} = 700$ ▸ 3점

표본평균 $\overline{X}$의 분산은 $\frac{\sigma^2}{75}$이므로

$\frac{\sigma^2}{75} = 2$에서 $\sigma^2 = 150$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $\overline{m} + \sigma^2 = 700 + 150 = 850$

▸ 2점

23 해결 과정 표본평균이 $\overline{x}$이면 표본의 크기가 n, 모표준편차 $\sigma = 6$이므로

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}}$

$\beta - \alpha \le 3.92$에서 ▸ 3점

$2 \times 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \le 3.92$이므로 $\frac{6}{\sqrt{n}} \le 1$

답 구하기 즉, $\sqrt{n} \ge 6$이므로 $n \ge 36$

자연수 n의 최솟값은 36이다. ▸ 3점

24 해결 과정 표본의 크기가 n, 모표준편차가 σ일 때, 모평균의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4d$, 즉 $d = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ▸ 3점

답 구하기 표본의 크기가 $4n$일 때, 모평균의 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이는

$2 \times 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

$= 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3d$ ▸ 3점