www.ebsi.co.kr

수능특강 수학영역 **수학 Ⅰ**

정답과 풀이

01 지수와 로그

유제 (본문 5~13쪽)

1 ② 2 8 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
6 ⑤ 7 ③ 8 ③ 9 ① 10 ④

Level 1 기초 연습 (본문 14~15쪽)

1 ⑤ 2 ③ 3 ① 4 ④ 5 126
6 ③ 7 ② 8 ⑤ 9 ⑤ 10 31

Level 2 기본 연습 (본문 16~17쪽)

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 ③ 5 11
6 25 7 ③ 8 ④ 9 ④

Level 3 실력 완성 (본문 18쪽)

1 ③ 2 54 3 ③

02 지수함수와 로그함수

유제 (본문 21~29쪽)

1 38 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ②
6 8 7 ② 8 ③ 9 81 10 ①

Level 1 기초 연습 (본문 30쪽)

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ⑤ 5 18

Level 2 기본 연습 (본문 31~32쪽)

1 ③ 2 ④ 3 ② 4 ② 5 ③
6 ① 7 ④ 8 23

Level 3 실력 완성 (본문 33쪽)

1 ③ 2 ③ 3 6

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 (본문 37~45쪽)

1 48 2 ② 3 235 4 ③ 5 ②
6 ② 7 ② 8 ③ 9 16

Level 1 기초 연습 (본문 46~48쪽)

1 ⑤ 2 ② 3 72 4 ① 5 ⑤
6 ④ 7 ③ 8 ④ 9 ① 10 ④
11 ④ 12 ⑤ 13 ① 14 ④

Level 2 기본 연습 (본문 49~50쪽)

1 ① 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ③
6 ① 7 ① 8 ③

Level 3 실력 완성 (본문 51쪽)

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 19

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 (본문 55~61쪽)

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ③
6 ③

Level 1 기초 연습 (본문 62~63쪽)

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 71
6 ③ 7 481 8 ③

Level 2 기본 연습 (본문 64~66쪽)

1 47 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ④
6 ④ 7 ② 8 ② 9 ④ 10 ③
11 81 12 ④

Level 3 실력 완성 (본문 67쪽)

1 ③ 2 ① 3 97

05 등차수열과 등비수열

유제
본문 71~77쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 ①	8 ②		

Level 1 기초 연습
본문 78~79쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②
6 5	7 ②	8 ①	9 ⑤	10 ③

Level 2 기본 연습
본문 80~82쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 10	5 ②
6 ④	7 ③	8 ④	9 20	10 ②
11 86	12 ③	13 ①	14 ⑤	

Level 3 실력 완성
본문 83쪽

1 ③	2 35	3 ③

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제
본문 87~97쪽

1 ②	2 15	3 ③	4 ①	5 ④
6 2	7 ⑤	8 ②	9 12	10 5
11 ②				

Level 1 기초 연습
본문 98~99쪽

1 ①	2 ③	3 31	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 10	8 ②	9 ③	10 ①

Level 2 기본 연습
본문 100~101쪽

1 ②	2 ①	3 ①	4 ②	5 350
6 ④	7 9	8 ⑤		

Level 3 실력 완성
본문 102쪽

1 19	2 9	3 ③	4 ①

01 지수와 로그

유제 본문 5~13쪽

1 ②	2 8	3 ④	4 ⑤	5 ③
6 ⑤	7 ③	8 ③	9 ①	10 ④

1 $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\times\sqrt[3]{(-2)^6}=\sqrt[3]{-\frac{1}{2^3}}\times\sqrt[3]{2^6}$

$=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}\times\sqrt[3]{(2^2)^3}$

$=-\frac{1}{2}\times2^2$

$=-2$

답 ②

2 20, 12, 15의 최소공배수는 60이므로 60제곱근으로 통일하여 나타낼 수 있다. 즉,

$\sqrt[20]{2}\times\frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[15]{2}}=\sqrt[60]{2^3}\times\frac{\sqrt[60]{2^5}}{\sqrt[60]{2^4}}$

$=\sqrt[60]{\frac{2^3\times2^5}{2^4}}$

$=\sqrt[60]{2^4}$

$=\sqrt[15]{2}$

$\sqrt[20]{2}\times\frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[15]{2}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$이므로

$\sqrt[15]{2}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$

$\sqrt[15]{2}=\sqrt[mn]{2}$

즉, $mn=15$

따라서 이를 만족시키는 2 이상의 두 자연수 m, n은

$m=3$, $n=5$ 또는 $m=5$, $n=3$이므로

$m+n=8$

답 8

3 $(2\sqrt{2}\times2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=(2\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$=(2^{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$=(2^{\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{5}{4}}$

따라서 $k=\frac{5}{4}$

답 ④

4 $(3\times3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1}=(3^{1+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1}$

$=3^{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=3^{2-1}$

$=3$

답 ⑤

5 $3^x=12$에서 $x=\log_3 12$이므로

$x+2y=\log_3 12+2\log_3\frac{3}{2}$

$=\log_3 12+\log_3\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\log_3\left(12\times\frac{9}{4}\right)$

$=\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3\log_3 3$

$=3$

답 ③

다른 풀이

$y=\log_3\frac{3}{2}$에서 $3^y=\frac{3}{2}$이므로

$3^{2y}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

이때 $3^x=12$이므로

$3^x\times3^{2y}=12\times\frac{9}{4}$

$3^{x+2y}=27$

따라서 $x+2y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

6 $\frac{\log_5\sqrt[4]{125}}{\log_2\sqrt{12}-\log_2\sqrt{3}}=\frac{\log_5\sqrt[4]{5^3}}{\log_2\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\log_5\sqrt[4]{5^3}}{\log_2\sqrt{2^2}}$

$=\frac{\log_5 5^{\frac{3}{4}}}{\log_2 2}$

$$=\frac{\frac{3}{4}\log_5 5}{\log_2 2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

7 $\log_9 54+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}=\log_{3^2} 54+\log_{3^{-1}} 2^{\frac{1}{2}}$
$$=\frac{1}{2}\log_3 54-\frac{1}{2}\log_3 2$$
$$=\frac{1}{2}(\log_3 54-\log_3 2)$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 \frac{54}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 27$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 3^3$$
$$=\frac{3}{2}\log_3 3$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

8 $\frac{1}{\log_{24} 2}-\frac{1}{\log_9 4}=\log_2 24-\log_4 9$
$$=\log_2 24-\log_{2^2} 3^2$$
$$=\log_2 24-\log_2 3$$
$$=\log_2 \frac{24}{3}$$
$$=\log_2 8$$
$$=\log_2 2^3$$
$$=3\log_2 2$$
$$=3$$

답 ③

9 $\log 0.006=\log\frac{6}{1000}$
$$=\log 6-\log 1000$$
$$=\log(2\times3)-\log 10^3$$
$$=\log 2+\log 3-3\log 10$$
$$=0.3010+0.4771-3$$
$$=-2.2219$$

답 ①

10 $\log_5 9=\frac{\log 9}{\log 5}$
$$=\frac{\log 3^2}{\log\frac{10}{2}}$$
$$=\frac{2\log 3}{\log 10-\log 2}$$
$$=\frac{2b}{1-a}$$

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 14~15쪽

1 ⑤	2 ③	3 ①	4 ④	5 126
6 ③	7 ②	8 ⑤	9 ⑤	10 31

1 $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[12]{2^4}$
$$=\sqrt[12]{\frac{1}{2}\times2^4}$$
$$=\sqrt[12]{2^3}$$
$$=\sqrt[4]{2}$$

답 ⑤

2 $9^{\frac{1}{3}}\times81^{-\frac{1}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}\times(3^4)^{-\frac{1}{6}}$
$$=3^{\frac{2}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}}$$
$$=3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}$$
$$=3^0=1$$

답 ③

3 $a^{-\frac{1}{4}}=3$에서 $a=3^{-4}$

$b^{-\frac{1}{2}}=4$에서 $b=4^{-2}=2^{-4}$

$c^{-\frac{1}{3}}=18$에서 $c=18^{-3}=(2\times3^2)^{-3}=2^{-3}\times3^{-6}$

따라서

$$\frac{c}{ab}=\frac{2^{-3}\times3^{-6}}{3^{-4}\times2^{-4}}$$
$$=\frac{3^4\times2^4}{2^3\times3^6}$$
$$=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

답 ①

4 $2^x=25$에서 $2=25^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}$

$5^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$3^y=25$에서 $3=25^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{2}{y}}$

$5^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

따라서 $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=5^{\frac{1}{x}}\times5^{\frac{1}{y}}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

답 ④

5 $\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^5\times3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{2^5\times3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{2^5\times3}{n}$이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로 n은 3을 약수로 갖고, 2 또는 2^3 또는 2^5을 약수로 갖는 수이어야 한다.

따라서 $\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n은

$3\times2=6$, $3\times2^3=24$, $3\times2^5=96$

이므로 구하는 모든 n의 값의 합은

$6+24+96=126$

답 126

다른 풀이

$\left(\frac{2^5\times3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=4\times\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되려면

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 $\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}$ 또는 자연수가 되어야 한다.

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{6}{n}=\frac{1}{16}$이므로 $n=96$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{6}{n}=\frac{1}{4}$이므로 $n=24$

$\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수이려면 $\frac{6}{n}$이 자연수의 제곱인 수이어야 하므로

$n=6$

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$6+24+96=126$

6
$$\begin{aligned}2\log_2\sqrt[4]{6}+\frac{1}{2}\log_2\frac{8}{3}&=\log_2(\sqrt[4]{6})^2+\log_2\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\log_2\sqrt{6}+\log_2\sqrt{\frac{8}{3}}\\&=\log_2\left(\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\\&=\log_2\sqrt{16}\\&=\log_2 2^2\\&=2\log_2 2=2\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$\begin{aligned}2\log_2\sqrt[4]{6}+\frac{1}{2}\log_2\frac{8}{3}&=2\log_2 6^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\log_2\frac{8}{3}\\&=\frac{1}{2}\log_2 6+\frac{1}{2}\log_2\frac{8}{3}\\&=\frac{1}{2}\left(\log_2 6+\log_2\frac{8}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\log_2\left(6\times\frac{8}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\log_2 2^4\\&=2\log_2 2=2\end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned}&(\log_2 9-\log_4 9)(\log_9 4-\log_{27} 2)\\&=(\log_2 3^2-\log_{2^2} 3^2)(\log_{3^2} 2^2-\log_{3^3} 2)\\&=(2\log_2 3-\log_2 3)\left(\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 2\right)\\&=\log_2 3\times\frac{2}{3}\log_3 2\\&=\log_2 3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\log_2 3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ②

8
$$\begin{aligned}\log_3 45-\frac{1}{\log_{25} 9}&=\log_3 45-\log_9 25\\&=\log_3 45-\log_{3^2} 5^2\\&=\log_3 45-\log_3 5\\&=\log_3\frac{45}{5}\\&=\log_3 9\\&=\log_3 3^2\\&=2\log_3 3=2\end{aligned}$$

답 ⑤

9
$$\begin{aligned}a&=\log 0.2\\&=\log\frac{2}{10}\\&=\log 2-\log 10\\&=\log 2-1\end{aligned}$$

이므로 $\log 2=a+1$

따라서

$\log 80=\log(2^3\times 10)$

$=\log 2^3+\log 10$

$=3\log 2+1$

$=3(a+1)+1$

$=3a+4$

답 ⑤

10 $a^2=b^3$에서 $b=a^{\frac{2}{3}}$

$b^3=c^4$에서 $c=b^{\frac{3}{4}}$

$a^2=c^4$에서 $a=c^2$

$\log_a\sqrt{b}+\log_b\frac{1}{c}+\log_c a$

$=\frac{1}{2}\log_a b-\log_b c+\log_c a$

$=\frac{1}{2}\log_a a^{\frac{2}{3}}-\log_b b^{\frac{3}{4}}+\log_c c^2$

$=\frac{1}{3}\log_a a-\frac{3}{4}\log_b b+2\log_c c$

$=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+2$

$=\frac{19}{12}$

따라서 $p=12$, $q=19$이므로

$p+q=12+19=31$

답 31

다른 풀이

$a^2=b^3=c^4=k$라 하면

$a=k^{\frac{1}{2}}$, $b=k^{\frac{1}{3}}$, $c=k^{\frac{1}{4}}$이므로

$\log_a\sqrt{b}+\log_b\frac{1}{c}+\log_c a$

$=\frac{1}{2}\log_a b-\log_b c+\log_c a$

$=\frac{1}{2}\log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}}-\log_{k^{\frac{1}{3}}} k^{\frac{1}{4}}+\log_{k^{\frac{1}{4}}} k^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{2}$

$=\frac{19}{12}$

따라서 $p=12$, $q=19$이므로

$p+q=12+19=31$

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

1 ③	2 ②	3 ④	4 ③	5 11
6 25	7 ③	8 ④	9 ④	

1 $f_n(x)$의 값은 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때, 1

(ii) n이 짝수일 때,

$x>0$이면 2, $x=0$이면 1, $x<0$이면 0

2의 제곱근 중 음수인 것이 a이므로 $a<0$

-3의 세제곱근 중 실수인 것이 b이므로 $b<0$

따라서 $a+b<0$, $ab>0$이므로

$f_3(a)+f_4(b)+f_5(a+b)+f_6(ab)=1+0+1+2=4$

답 ③

2 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$에서

$a^{\frac{3}{2}}=(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})^3=\sqrt{2}-1$

$a^3=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

따라서

$\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{a^{-\frac{1}{2}}\times(a^2-a^{\frac{1}{2}})+a^{\frac{1}{2}}\times(a+a^{-\frac{1}{2}})}{(a+a^{-\frac{1}{2}})(a^2-a^{\frac{1}{2}})}$

$=\frac{(a^{\frac{3}{2}}-1)+(a^{\frac{3}{2}}+1)}{a^3-a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}-1}$

$=\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{a^3-1}$

$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(3-2\sqrt{2})-1}$

$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{-2(\sqrt{2}-1)}$

$=-1$

답 ②

다른 풀이

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$에서

$a^{\frac{3}{2}}=(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})^3=\sqrt{2}-1$

따라서

$\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}$

$=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}$

$=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)+1}+\dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)-1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{-2(\sqrt{2}-1)}$

$=-1$

3 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$에서

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}})^2+(x^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=4^2+2$

$=18$

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=k$라 하면 x가 양수이므로 k도 양수이다.

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{3}})^3+(x^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

$=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

에서

$18=k^3-3k$

$k^3-3k-18=0$

$(k-3)(k^2+3k+6)=0$

이때 양수 k에 대하여

$k^2+3k+6=\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$이므로

$k=3$

따라서 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$

답 ④

참고

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$에서 $x+x^{-1}=18$이므로

$x+x^{-1}-18=0$

$x^2-18x+1=0$

이차방정식 $x^2-18x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-9)^2-1>0$이므로

이차방정식 $x^2-18x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한 이차방정식 $x^2-18x+1=0$의 두 근의 합이 $18>0$, 두 근의 곱이 $1>0$이므로 두 근은 모두 양수이다.

따라서 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$를 만족시키는 양의 실수 x가 존재한다.

4 $15^b=3$에서

$15^{-b}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

$15^{1-b}=15\times15^{-b}$

$=15\times\dfrac{1}{3}$

$=5$

$15=5^{\frac{1}{1-b}}$ …… ㉠

㉠을 $15^a=2$에 대입하면

$(5^{\frac{1}{1-b}})^a=2$, $5^{\frac{a}{1-b}}=2$

따라서

$25^{\frac{a}{1-b}}=(5^2)^{\frac{a}{1-b}}$

$=(5^{\frac{a}{1-b}})^2$

$=2^2=4$

답 ③

5 $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^3}}=a^{\frac{3}{n^2}}$이므로

(ⅰ) n이 3의 배수일 때,

$n=3k$ (k는 자연수)라 하면 $a^{\frac{3}{n^2}}=a^{\frac{1}{3k^2}}$이므로

$a^{\frac{3}{n^2}}$의 값이 자연수이려면 $a^{\frac{1}{3k^2}}$의 값이 자연수이어야 한다.

$a^{\frac{1}{3k^2}}$의 값이 자연수이기 위한 k, a 중 $k+a$가 최소인 것은 $k=1$, $a=8$이고, 이때 $n=3$, $a=8$이므로 $n+a$의 최솟값은 $3+8=11$이다.

(ⅱ) n이 3의 배수가 아닐 때,

$a^{\frac{3}{n^2}}$의 값이 자연수이려면 $a^{\frac{1}{n^2}}$의 값이 자연수이어야 한다.

$a^{\frac{1}{n^2}}$의 값이 자연수이기 위한 n, a 중 $n+a$가 최소인 것은 $n=2$, $a=16$이므로 $n+a$의 최솟값은 $2+16=18$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 최솟값은 11이다.

답 11

6 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt[3]{a}$에서

$\dfrac{b}{a}=\sqrt[3]{a^2}$이므로

$b=a\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{3}}$ …… ㉠

$\log_b ac=\log_a b$에서

$\log_b a+\log_b c=\log_a b$

$\log_b c=\log_a b-\log_b a$

$\log_b c=\log_a b-\dfrac{1}{\log_a b}$ …… ㉡

㉠에서 $\log_a b=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$이므로

㉡에서 $\log_b c=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{15}$

$c=b^{\frac{16}{15}}=(a^{\frac{5}{3}})^{\frac{16}{15}}=a^{\frac{16}{9}}$

$\log_a c=\log_a a^{\frac{16}{9}}=\frac{16}{9}$

따라서 $p=9$, $q=16$이므로

$p+q=9+16=25$

답 25

다른 풀이

$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{a}$에서 $b=a^{\frac{5}{3}}$이므로

$\log_a b=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

$\log_b ac=\log_a b$에서

$\frac{\log_a ac}{\log_a b}=\log_a b$

$\frac{1+\log_a c}{\log_a b}=\log_a b$

$\log_a c=(\log_a b)^2-1=\left(\frac{5}{3}\right)^2-1=\frac{16}{9}$

따라서 $p=9$, $q=16$이므로

$p+q=9+16=25$

7 $\log x^a=\log\frac{y}{x}$에서

$a\log x=\log y-\log x$

$\log y=(a+1)\log x$ …… ㉠

$b\log y=\log\frac{y}{x}$에서

$b\log y=\log y-\log x$

$(b-1)\log y=-\log x$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(b-1)(a+1)\log x=-\log x$

$(ab-a+b)\log x=0$

$\log x\neq0$이므로

$ab-a+b=0$, 즉 $a-b=ab$

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=\frac{(ab)^2+2ab}{ab}=ab+2=5$$

이므로 $ab=3$

답 ③

참고 1

$a\log x=b\log y=\log\frac{y}{x}$에서 두 양수 x, y는 1이 아닌 서로 다른 수이므로 $\log x\neq0$, $\log y\neq0$, $\log\frac{y}{x}\neq0$이다.

따라서 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $ab\neq0$, $a-b\neq0$이다.

참고 2

문제의 조건을 만족시키는 a, b, x, y가 존재함을 알아보자.

먼저 $a-b=ab$이고 $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$를 만족시키는 a, b의 값을 구해 보자.

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=\frac{(ab)^2+2ab}{ab}=ab+2=5$$

에서 $ab=3$

$a-b=3$, $ab=3$에서

$a(a-3)=3$, $a^2-3a-3=0$

$a=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$이므로

$\begin{cases} a=\frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ b=\frac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=\frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ b=\frac{-3-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

따라서 $a-b=ab$이고 $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$, 즉 $a-b=3$이고 $ab=3$인 두 상수 a, b가 존재한다.

이때 $a\log x=b\log y$이고 $b\log y=\log\frac{y}{x}$를 만족시키는 1이 아닌 두 양수 x, y가 존재하는지 알아보자.

$\log y=\frac{a}{b}\times\log x$를 $b\log y=\log\frac{y}{x}$에 대입하여 정리하면

$a\log x=\frac{a}{b}\times\log x-\log x$, 즉 $(ab-a+b)\log x=0$

$a-b=3$, $ab=3$, 즉 $ab-a+b=0$이므로

$(ab-a+b)\log x=0$을 만족시키는 1이 아닌 양수 x는 무수히 많다.

이때 $a=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $b=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$이라 하고, 적당한 양수 k에 대하여 $\log x=k$라 하면 문제의 조건을 만족시키는 1이 아닌 양수 x가 존재하고,

$\log y=\frac{a}{b}\times\log x=\frac{3+\sqrt{21}}{-3+\sqrt{21}}k>0$

이므로 1이 아닌 양수 y도 존재한다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 a, b, x, y가 존재함을 알 수 있다.

8 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$

$1\in B$이어야 하므로

$1=2\log_2 a-\log_2 b$

$1=\log_2 a^2-\log_2 b$

$1=\log_2 \dfrac{a^2}{b}$

$\dfrac{a^2}{b}=2$에서 $a^2=2b$ …… ㉠

$\log_a b\in B$이어야 하므로

$\log_a b=2$ 또는 $\log_a b=3$이어야 한다.

$\log_a b=2$이면

$b=a^2$이므로 ㉠에 대입하면

$a^2=2a^2$에서 $a=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\log_a b=3$이면

$b=a^3$이므로 ㉠에 대입하면

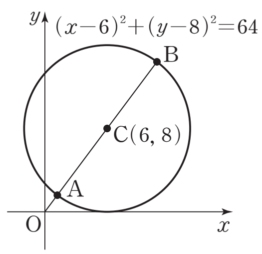
$a^2=2a^3$에서 $a\neq 0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\dfrac{1}{8}$

따라서 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=4$

답 ④

9 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=64$의 중심을 C라 하면 C$(6, 8)$이고 반지름의 길이는 8이다.
그림과 같이 원점 O와 중심 C를 잇는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.



$\overline{\text{OC}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\overline{\text{OA}}=10-8=2$, $\overline{\text{OB}}=10+8=18$이므로

원 위의 점 P에 대하여

$2\le D_{\text{P}}\le 18$

$\log_2 D_{\text{P}}$의 값이 자연수이려면 $D_{\text{P}}=2^n$ (n은 자연수)이어야 한다.

$D_{\text{P}}=2$가 되는 점 P의 개수는 1이고,

D_{P}의 값이 2^2, 2^3, 2^4이 되는 점 P의 개수는 각각 2이므로

$\log_2 D_{\text{P}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 7이다.

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

1 ③ **2** 54 **3** ③

1 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}}=(mn)^{\frac{n}{3m}}$

$(mn)^{\frac{n}{3m}}$의 값이 자연수가 되려면 $\dfrac{n}{3m}$이 자연수이거나, $\dfrac{n}{3m}$이 자연수가 아닐 때는 우선 mn이 어떤 자연수의 세제곱인 수이어야 한다.

(i) $\dfrac{n}{3m}$이 자연수인 경우

$\dfrac{n}{m}$이 3의 배수인 경우, 즉 n이 $3m$의 배수인 경우이므로 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 6)$, $(3, 9)$이다.

(ii) $\dfrac{n}{3m}$이 자연수가 아닌 경우

$\dfrac{n}{m}$이 3의 배수가 아닌 경우이므로 우선 mn이 어떤 자연수의 세제곱인 수이어야 하는데, 이런 경우의 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 8)$, $(9, 3)$이다.

각각의 경우 $(mn)^{\frac{n}{3m}}$의 값은

$(2\times 4)^{\frac{4}{3\times 2}}=4$

$(4\times 2)^{\frac{2}{3\times 4}}=2^{\frac{1}{2}}$

$(8\times 8)^{\frac{8}{3\times 8}}=4$

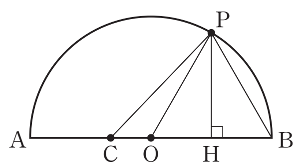
$(9\times 3)^{\frac{3}{3\times 9}}=3^{\frac{1}{3}}$

이므로 $(mn)^{\frac{n}{3m}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 4)$, $(8, 8)$이다.

(i), (ii)에서 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 6)$, $(3, 9)$, $(2, 4)$, $(8, 8)$이고, 그 개수는 4이다.

답 ③

2 선분 AB의 중점을 O, 점 P에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\text{AC}}=\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$이므로

$\overline{\text{AC}}:\overline{\text{CB}}=1:2$에서 $\overline{\text{CB}}=2\overline{\text{AC}}=4\sqrt[4]{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt[4]{2}+4\sqrt[4]{2}=6\sqrt[4]{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OB}}=3\sqrt[4]{2}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}:\overset{\frown}{\mathrm{PB}}=2:1$에서 $\angle\mathrm{POB}=60^\circ$이므로 삼각형 POB는 정삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{OP}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt[4]{2}\\&=\frac{3}{2}\times\sqrt[4]{3^2}\times\sqrt[4]{2}\\&=\frac{3\sqrt[4]{18}}{2}\end{aligned}$$

이므로 삼각형 PCB의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{PH}}\\&=\frac{1}{2}\times4\sqrt[4]{2}\times\frac{3\sqrt[4]{18}}{2}\\&=3\sqrt[4]{36}\\&=3\sqrt[4]{6^2}\\&=3\sqrt{6}\end{aligned}$$

따라서 $S^2=(3\sqrt{6})^2=54$

답 54

3 ㄱ. 집합 A_2는 $2=a\log_2 b$인 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 하는 집합이다.

$2=a\log_2 b$에서

$\log_2 b^a=2$, 즉 $b^a=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$이므로

$A_2=\{(1, 4), (2, 2)\}$ (참)

ㄴ. [반례] $p=q=2$일 때, $pq=4$

ㄱ에서 $A_2=\{(1, 4), (2, 2)\}$이므로

$n(A_2)=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$4=a\log_2 b$에서

$\log_2 b^a=4$, 즉 $b^a=16$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 16)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$이므로

$A_4=\{(1, 16), (2, 4), (4, 2)\}$

$n(A_4)=3$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서

$n(A_2)\times n(A_2)\neq n(A_4)$ (거짓)

ㄷ. $m=a\log_2 b$에서 $b=2^{\frac{m}{a}}$

$m\neq0$이므로 b가 자연수이려면 $\frac{m}{a}$이 자연수이어야 한다.

자연수 k에 대하여 $\frac{m}{a}=k$라 하면 $m=ka$이므로

순서쌍 (k, a)의 개수는 m의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 집합 A_m의 원소인 순서쌍 (a, b)의 개수는 m의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 $n(A_m)=4$를 만족시키는 m은 양의 약수의 개수가 4인 수이므로 서로 다른 두 소수가 곱해진 수이거나 어떤 소수의 세제곱인 수이다.

30 이하의 자연수 m 중에서

서로 다른 두 소수가 곱해진 수는

2×3, 2×5, 2×7, 2×11, 2×13, 3×5, 3×7

이고, 어떤 소수의 세제곱인 수는

2^3, 3^3

이므로 $n(A_m)=4$를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 m의 개수는 9이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

서로 다른 두 소수 a, b와 음이 아닌 두 정수 p, q에 대하여

$A=a^p\times b^q$

이면 자연수 A의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)$이다.

$(p+1)(q+1)$의 값이 4인 경우는

$p=1$, $q=1$일 때 $4=(1+1)(1+1)$

또는 $p=3$, $q=0$일 때 $4=(3+1)(0+1)$이므로

양의 약수의 개수가 4인 자연수는 서로 다른 두 소수 a, b의 곱인 $a\times b$ 꼴이거나 어떤 소수 a의 세제곱인 a^3 꼴인 수이다.

02 지수함수와 로그함수

유제 본문 21~29쪽

1 38	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 8	7 ②	8 ③	9 81	10 ①

1 $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

지수함수의 그래프의 성질에 의하여

$0<\frac{a}{4}<1-2a<\frac{1}{5}$

$0<\frac{a}{4}<1-2a$에서

$0<\frac{a}{4}$이고 $\frac{9}{4}a<1$이므로

$0<a<\frac{4}{9}$ …… ㉠

$1-2a<\frac{1}{5}$에서 $2a>\frac{4}{5}$이므로

$a>\frac{2}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

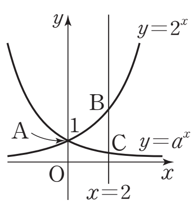
$\frac{2}{5}<a<\frac{4}{9}$

따라서 $p=\frac{2}{5}$, $q=\frac{4}{9}$이므로

$45(p+q)=45\times\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{9}\right)=38$

답 38

2 $0<a<1$이므로 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프는 그림과 같다.



A$(0, 1)$, B$(2, 4)$, C$(2, a^2)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=4-a^2$

$\triangle\mathrm{AOC}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\times(4-a^2)=4-a^2$

삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 AOC의 넓이의 $\frac{7}{2}$배이므로

$4-a^2=\frac{7}{2}$, $a^2=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ④

3 함수 $y=2^{ax}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=2^{-ax}+2$, 즉 $y=\frac{1}{(2^a)^x}+2$ …… ㉠

함수 $y=\frac{16}{4^x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\frac{16}{4^{x-b}}+1+c$, 즉 $y=\frac{1}{4^{x-b-2}}+1+c$ …… ㉡

㉠, ㉡의 두 함수의 그래프가 서로 일치하므로

$2^a=4$, $-b-2=0$, $2=1+c$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+(-2)+1=1$

답 ①

4 $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 함수 $f(x)=a^x+b$의 값은 감소하므로

$M=f(1)=a+b$, $m=f(2)=a^2+b$

$M+m=\frac{15}{4}$이므로

$(a+b)+(a^2+b)=\frac{15}{4}$에서

$a^2+a+2b=\frac{15}{4}$ …… ㉠

$M-m=\frac{1}{4}$이므로

$(a+b)-(a^2+b)=\frac{1}{4}$에서

$a-a^2=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉡에서 $4a^2-4a+1=0$, $(2a-1)^2=0$

이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2b=\frac{15}{4}$에서 $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a-b=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$

답 ⑤

5 ㄱ. 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 점 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$\log_a \sqrt{2}=\frac{1}{2}$에서 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $a=(\sqrt{2})^2=2>1$ (참)

ㄴ. 함수 $y=b^x$의 그래프가 점 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$b^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}>0$이므로 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ (참)

ㄷ. $ab=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}$

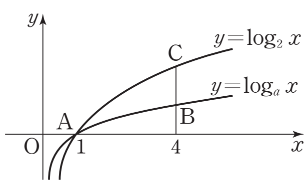
$\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0$이므로

$ab=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

6 $a>2$이므로 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_2 x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y=\log_a x\ (a>2)$, $y=\log_2 x$의 그래프는 x축 위의 점 $(1,\ 0)$에서 만나므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$

직선 $x=4$가 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로

$\mathrm{B}(4,\ \log_a 4)$, $\mathrm{C}(4,\ \log_2 4)$

삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times(4-1)\times\overline{\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(4-1)\times(\log_2 4-\log_a 4)=1$$

$\frac{3}{2}\times(2-\log_a 4)=1$, $\log_a 4=\frac{4}{3}$

따라서 $a^{\frac{4}{3}}=4$, 즉 $a=4^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$이므로

$a^2=(2^{\frac{3}{2}})^2=2^3=8$

답 8

7 함수 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸어 쓰면

$x=2^{y-1}+a$, $2^{y-1}=x-a$

$y=\log_2(x-a)+1$

즉, $g(x)=\log_2(x-a)+1$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$2=\log_2(3-a)+1$, $1=\log_2(3-a)$

$2=3-a$에서 $a=1$

함수 $y=\log_2(x-1)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $x=1$이다.

따라서 $b=1$이므로 $a+b=1+1=2$

답 ②

다른 풀이

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$g(3)=2$

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로

$f(2)=3$에서 $2^{2-1}+a=3$, $a=1$

함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=1$이고

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=1$이므로 $b=1$이다.

그러므로 $a+b=1+1=2$

8 x의 값이 증가하면 함수 $f(x)=\log_2(3x-1)+1$의 값도 증가하므로 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 3\}$인 함수

$f(x)=\log_2(3x-1)+1$의

최댓값은 $f(3)=\log_2 8+1=3+1=4$

최솟값은 $f(1)=\log_2 2+1=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $4+2=6$

답 ③

9 $3^{x^2}<\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+1}$에서

$3^{x^2}<(3^{-2})^{2x+1}$

$3^{x^2}<3^{-4x-2}$

$x^2<-4x-2$

$x^2+4x+2<0$

부등식 $x^2+4x+2<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

답 81

10 로그의 진수 조건에 의하여

$f(x)>0$, $g(x)>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>2\log_{\frac{1}{4}} g(x)$에서

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>\log_{\frac{1}{4}} \{g(x)\}^2$

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \{g(x)\}^2$

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>\log_{\frac{1}{2}} g(x)$

$f(x)<g(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$6<x<9$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 7, 8이고, 그 개수는 2이다.

답 ①

Level 1 기초 연습 (본문 30쪽)

1 ④	2 ②	3 ④	4 ⑤	5 18

1 $a^2+4a+\frac{9}{2}=1$이면 $f(x)=1$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

이때 $a^2+4a+\frac{9}{2}=(a+2)^2+\frac{1}{2}>0$이므로 함수 $f(x)$는 지수함수이다.

함수 $f(x)=\left(a^2+4a+\frac{9}{2}\right)^x$에서 $f(0)=1$이므로 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)>1$을 만족시키려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하여야 한다.

즉, $0<a^2+4a+\frac{9}{2}<1$이어야 한다.

$a^2+4a+\frac{9}{2}<1$, 즉 $a^2+4a+\frac{7}{2}<0$에서

$-2-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 a는 정수이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=\left\{(-2)^2+4\times(-2)+\frac{9}{2}\right\}^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로

$f(a)=f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

답 ④

2 함수 $y=a^{x+k}-1$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로

$0=a^{-2+k}-1$, 즉 $a^{-2+k}=1$에서

$-2+k=0$, $k=2$

함수 $y=a^{x+k}-1$, 즉 $y=a^{x+2}-1$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 2)$이므로

$2=a^2-1$, $a^2=3$

a가 양수이므로 $a=\sqrt{3}$

따라서 $a^2+k^2=(\sqrt{3})^2+2^2=7$

답 ②

3 함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이므로 함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 점근선은 직선 $y=3$

직선 $y=3$이 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 좌표는

$3=\log_2 x+1$에서 $x=4$이므로 $(4, 3)$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=4+3=7$

답 ④

4 $f(x)=3^x$, $g(x)=2^{-x}$에서

$h(x)=3^x\times 2^{-x}=3^x\times\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^x$이므로

x의 값이 증가하면 함수 $h(x)$의 값도 증가한다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 함수 $h(x)$의

최댓값 M은 $M=h(2)=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,

최솟값 m은 $m=h(-1)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$이므로

$Mm=\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

답 ⑤

5 로그의 진수 조건에 의하여

$x^2-3x>0$이고 $8-x>0$

$x(x-3)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$8-x>0$에서 $x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x<0$ 또는 $3<x<8$ …… ㉢

$\log_2(x^2-3x)>\log_2(8-x)$에서

$x^2-3x>8-x$

$x^2-2x-8>0$

$(x+2)(x-4)>0$

$x<-2$ 또는 $x>4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-2$ 또는 $4<x<8$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$5+6+7=18$

답 18

Level 2 기본 연습 본문 31~32쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 ②	5 ③
6 ①	7 ④	8 23		

1 곡선 $y=\log_2(x-2)$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 A의 좌표를 $(a, \log_2 a)$라 하면

$B(a+2, \log_2 a)$, $C(a+2, \log_2(a+2))$,

$D(a+4, \log_2(a+2))$, $E(a+4, \log_2(a+4))$

삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times\{\log_2(a+2)-\log_2 a\}=\log_2\frac{a+2}{a}=1$

$\frac{a+2}{a}=2$, $a=2$

따라서 삼각형 CDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\{\log_2(a+4)-\log_2(a+2)\}$

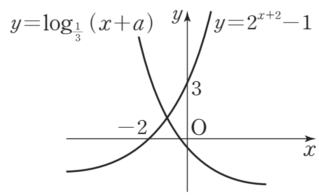
$=\log_2\frac{2+4}{2+2}=\log_2\frac{3}{2}$

답 ③

2 함수 $y=2^{x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프로

$x=0$일 때, $2^{0+2}-1=3$이므로 점 $(0, 3)$을 지나고

$y=0$일 때, $2^{x+2}-1=0$에서 $x=-2$이므로 점 $(-2, 0)$을 지난다.



두 함수 $y=2^{x+2}-1$, $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 그래프가 제2사분면에서 만나도록 하는 a의 값은

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나도록 하는 a의 값보다는 커야 하고, 점 $(-2, 0)$을 지나도록 하는 a의 값보다는 작아야 한다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나도록 하는 a의 값은

$3=\log_{\frac{1}{3}}(0+a)$에서 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$이므로

$a>\frac{1}{27}$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나도록 하는 a의 값은

$0=\log_{\frac{1}{3}}(-2+a)$에서 $a-2=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$, 즉 $a=3$이므로

$a<3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

$\frac{1}{27}<a<3$

답 ④

3 $A(t, 2^t+1)$, $B(t, \log_2(t-1))$에서

$\overline{AB}=2^t+1-\log_2(t-1)=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=2^x+1$과 함수 $y=\log_2(x-1)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 B와 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$C(\log_2(t-1), t)$

$\overline{BC}=\{t-\log_2(t-1)\}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$에서

$t-\log_2(t-1)=2$

$\log_2(t-1)=t-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서

$t-1=2^{t-2}=\frac{2^t}{4}$

$2^t=4(t-1)$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$4(t-1)+1-(t-2)=8$

$3t=9$, $t=3$

따라서 B(3, 1), C(1, 3)이므로 직선 BC의 방정식은
$y-1=-(x-3)$에서 $x+y-4=0$
원점 O에서 직선 $x+y-4=0$까지의 거리는
$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$
이므로 삼각형 OBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

답 ②

4 $f(x)=3x^2-12x+16=3(x-2)^2+4$
이므로 $1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=4$,
최댓값은 $f(4)=16$이다.
즉, $4\le f(x)\le16$
(i) $a>1$이면
함수 $g(x)=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로 함수 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$는
$f(x)=4$일 때 최소이다.
함수 $g(f(x))$의 최솟값이 -2이므로
$g(4)=-2$, 즉 $\log_a 4=-2$에서
$a^{-2}=4$, $a^2=\frac{1}{4}$
이때 $a>1$을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.
(ii) $0<a<1$이면
함수 $g(x)=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 함수 $g(f(x))$는 $f(x)=16$일 때 최소이다.
함수 $g(f(x))$의 최솟값이 -2이므로
$g(16)=-2$, 즉 $\log_a 16=-2$에서
$a^{-2}=16$, $a^2=\frac{1}{16}$
이때 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{4}$
(i), (ii)에서 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$이고, 합성함수 $g(f(x))$는
$f(x)=4$일 때 최대이므로 최댓값 M은
$M=g(4)=\log_{\frac{1}{4}} 4=\log_{4^{-1}} 4=-1$

답 ②

5 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면
$\log_2 \alpha=\log_2(-\alpha+k)$에서
$\alpha=-\alpha+k$, $\alpha=\frac{k}{2}$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{2}} \beta=\log_2(-\beta+k)$에서
$-\log_2 \beta=\log_2(-\beta+k)$
$\log_2 \beta+\log_2(-\beta+k)=0$
$\log_2\{\beta(-\beta+k)\}=0$
$\beta(-\beta+k)=1$ …… ㉡
두 점 P, Q의 x좌표의 차가 $\sqrt{3}$이므로
$\alpha-\beta=\sqrt{3}$
위 식에 ㉠을 대입하면
$\frac{k}{2}-\beta=\sqrt{3}$
$\beta=\frac{k}{2}-\sqrt{3}$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$\left(\frac{k}{2}-\sqrt{3}\right)\left(-\frac{k}{2}+\sqrt{3}+k\right)=1$
$\left(\frac{k}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{k}{2}+\sqrt{3}\right)=1$
$\frac{k^2}{4}-3=1$, $k^2=16$
$k>2$이므로 $k=4$

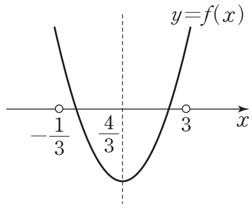
답 ③

6 방정식 $2^{\frac{x}{4}}=kx$의 두 실근을 α, 2α $(\alpha\ne0)$이라 하면
$2^{\frac{\alpha}{4}}=k\alpha$ …… ㉠
$2^{\frac{2\alpha}{4}}=2k\alpha$, 즉 $2^{\frac{\alpha}{2}}=2k\alpha$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면
$2^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}}=2$
$2^{\frac{\alpha}{4}}=2$
즉, $\frac{\alpha}{4}=1$이므로
$\alpha=4$
$\alpha=4$를 ㉠에 대입하면
$2=4k$, $k=\frac{1}{2}$
따라서
$\log_k \alpha=\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2$
$=-2\log_2 2=-2$

답 ①

7 로그의 진수 조건에 의하여
$3x+1>0$이고 $3-x>0$이므로
$-\frac{1}{3}<x<3$ …… ㉠

$\log_2(3x+1)+\log_2(3-x)=\log_2 a$에서
$\log_2\{(3x+1)(3-x)\}=\log_2 a$
$(3x+1)(3-x)=a$
$3x^2-8x+a-3=0$ ⋯⋯ ㉡
방정식 $\log_2(3x+1)+\log_2(3-x)=\log_2 a$를 만족시키는 실수 x가 존재하려면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.
$f(x)=3x^2-8x+a-3$이라 하면
$f(x)=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+a-\frac{25}{3}$
이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 실수 x가 존재하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $-\frac{1}{3}<x<3$인 범위에서 x축과 적어도 한 점에서 만나야 한다.



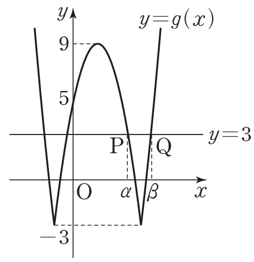
이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{4}{3},\ a-\frac{25}{3}\right)$이므로
$a-\frac{25}{3}\le 0,\ f\left(-\frac{1}{3}\right)=f(3)=a>0$
이어야 한다.
즉, $0<a\le\frac{25}{3}$
따라서 구하는 모든 자연수 a는 1, 2, ⋯, 8이고, 그 개수는 8이다.

답 ④

8 로그의 진수 조건에 의하여
$g(x)+2>0$이므로
$g(x)>-2$ ⋯⋯ ㉠
$\log_2\{g(x)+2\}\le\log_2 11$에서
$g(x)+2\le 11$이므로
$g(x)\le 9$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $-2<g(x)\le 9$이므로 $g(x)=k$를 만족시키는 정수 k는 -1 이상 9 이하인 모든 정수이다.
이때 방정식 $g(x)=k$ $(k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$를 만족시키는 양수 x의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점의 개수와 같다.
따라서 $n(A_k)=2$, 즉 방정식 $g(x)=k$ $(k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$를 만족시키는 양수 x의 개수가 2이도록 하는 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9이므로 구하는 모든 k의 값의 합은
$-1+0+1+2+3+4+5+9=23$

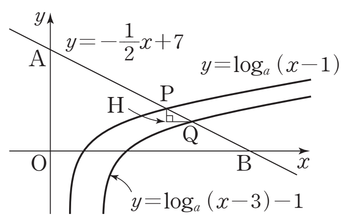
답 23

참고
예를 들어 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 네 점 중 x좌표가 양수인 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $g(x)=3$을 만족시키는 양수 x는 α, β이므로 $n(A_3)=2$이다.



Level 3 실력 완성	본문 33쪽
1 ③ 2 ③ 3 6	

1 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 H라 하면 직선 PQ의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{PH}:\overline{HQ}=1:2$이다.
즉, 점 Q는 점 P를 x축의 방향으로 $2k$ $(k>0)$만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 점이다.



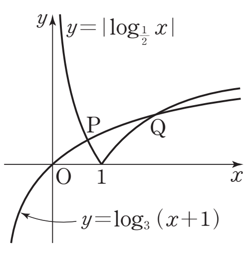
그런데 함수 $y=\log_a(x-3)-1$의 그래프는 함수 $y=\log_a(x-1)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 두 점 P, Q는 각각 두 그래프 위의 점이므로 $\overline{PH}=1$, $\overline{HQ}=2$이다.
$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
A$(0,\ 7)$, B$(14,\ 0)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{7^2+14^2}=7\sqrt{5}$

$\overline{AP}=2\overline{QB}$이므로 $\overline{QB}=b$, $\overline{AP}=2b$라 하면
$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$에서
$7\sqrt{5}=2b+\sqrt{5}+b$
$3b=6\sqrt{5}$
$b=2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AP}:\overline{PB}=4\sqrt{5}:3\sqrt{5}=4:3$이므로
점 P의 좌표는
$\left(\frac{4\times14+3\times0}{4+3}, \frac{4\times0+3\times7}{4+3}\right)$, 즉 $(8, 3)$
점 P(8, 3)이 함수 $y=\log_a(x-1)$의 그래프 위의 점이므로
$3=\log_a(8-1)$
$a^3=7$
$a=\sqrt[3]{7}$

답 ③

참고
곡선 $y=\log_a(x-1)$ 위의 임의의 점 C를 x축, y축의 방향으로 각각 2, -1만큼씩 평행이동한 점을 D라 하면 점 D는 곡선 $y=\log_a(x-3)-1$ 위의 점이고, 직선 CD는 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이다.
즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 임의의 직선 l이
곡선 $y=\log_a(x-3)-1$과 만나는 점은 직선 l이
곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이다.
따라서 문제에서 주어진 직선 $y=-\frac{1}{2}x+7$ 위의 점 Q는 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이다.
즉, $\overline{PH}=1$, $\overline{HQ}=2$이다.

2



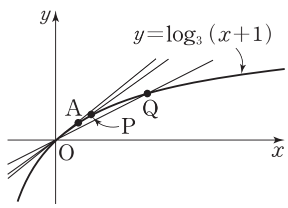
ㄱ. $\left|\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\right|=1$이고

$\log_3\left(\frac{1}{2}+1\right)=\log_3\frac{3}{2}=\log_3 3-\log_3 2$
$=1-\log_3 2<1$

이므로 점 P는 직선 $x=\frac{1}{2}$의 오른쪽에 있다.
따라서 $x_1>\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\log_3(x+1)=1$에서 $x+1=3$, 즉 $x=2$이므로
함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 점 (2, 1)을 지난다.
$|\log_{\frac{1}{2}}x|=1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x=\pm1$, 즉 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
이므로 함수 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$의 그래프도 점 (2, 1)을 지난다.
따라서 점 Q의 좌표는 (2, 1)이므로
$y_2=1$ (거짓)

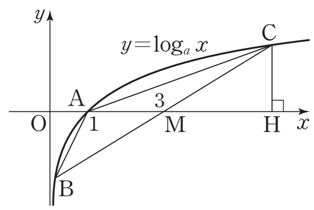
ㄷ. 함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \log_3\frac{3}{2}\right)$을 A라 하고, 세 직선 OA, OP, OQ의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3이라 하자.



함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프와 세 직선 OA, OP, OQ는 그림과 같으므로
$m_1>m_2>m_3$ …… ㉠
$m_1=\frac{\log_3\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=2(\log_3 3-\log_3 2)=2-\log_3 4<1$,
$m_2=\frac{y_1}{x_1}$, $m_3=\frac{y_2}{x_2}=\frac{1}{2}$이므로 ㉠에서
$1>m_1>\frac{y_1}{x_1}>\frac{1}{2}$
따라서 $y_1<x_1<2y_1$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

3 두 점 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$가 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로
$y_1=\log_a x_1$, $y_2=\log_a x_2$
세 수 x_1, 1, x_2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$x_1x_2=1$
이때 $x_2=\frac{1}{x_1}$을 $y_2=\log_a x_2$에 대입하면
$y_2=\log_a\frac{1}{x_1}=-\log_a x_1$
이므로 $y_1+y_2=\log_a x_1+(-\log_a x_1)=0$



따라서 점 $(3,\ 0)$을 M이라 하면 점 M은 선분 BC의 중점이므로 두 삼각형 AMC, ABM의 넓이는 같고, 주어진 조건에서 삼각형 ABC의 넓이가 4이므로 삼각형 AMC의 넓이는 2이다.

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\log_a x_2$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{CH}}=2$에서

$\dfrac{1}{2}\times(3-1)\times\log_a x_2=2$

즉, $\log_a x_2=2$에서 $x_2=a^2$

$x_1x_2=1$에서 $x_1=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{a^2}$

따라서 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a^2},\ -2\right)$, $\mathrm{C}(a^2,\ 2)$이고, 점 $\mathrm{M}(3,\ 0)$이 선분 BC의 중점이므로

$$\frac{\frac{1}{a^2}+a^2}{2}=3$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=6$$

답 6

참고

두 점 $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{C}(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

그런데 $y_1+y_2=0$이므로 선분 BC의 중점은 x축 위에 있다.
따라서 선분 BC와 x축이 만나는 점 $(3,\ 0)$은 선분 BC의 중점이다.

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 37~45쪽

1 48	**2** ②	**3** 235	**4** ③	**5** ②
6 ②	**7** ②	**8** ③	**9** 16	

1 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 호 AB의 길이는 9θ, 호 CD의 길이는 3θ, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}=6$이므로 두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는

$9\theta+3\theta+6+6=12\theta+12$

$12\theta+12=28$에서 $\theta=\dfrac{4}{3}$

따라서 두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times9^2\times\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{4}{3}=48$$

답 48

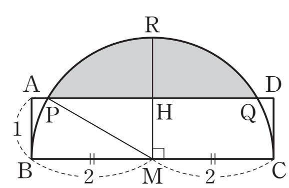
참고

두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 도형의 넓이를 다음과 같이 구해도 된다.

$\theta=\dfrac{4}{3}$이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times9\times9\theta-\frac{1}{2}\times3\times3\theta&=\frac{1}{2}\times72\theta\\&=\frac{1}{2}\times72\times\frac{4}{3}\\&=48\end{aligned}$$

2



그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 선분 AD와 만나는 점을 H, 호 PQ와 만나는 점을 R라 하자.

직각삼각형 PMH에서 $\overline{\mathrm{PM}}=2$, $\overline{\mathrm{MH}}=1$이므로

$\angle\mathrm{PMH}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3}$이다.

즉, 부채꼴 MRP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

이고 삼각형 PMH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{MH}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 호 PQ와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

답 ②

3 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$

θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

즉, $\cos\theta=\frac{12}{13}$이고

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$

이므로

$\cos\theta+\tan\theta=\frac{12}{13}+\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{79}{156}$

따라서 $p=156$, $q=79$이므로

$p+q=156+79=235$

답 235

4 $4\sin\theta+\cos\theta=-4$의 양변을 제곱하면

$16\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=16$

$16(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+8\sin\theta\cos\theta-15\cos^2\theta=16$

$8\sin\theta\cos\theta-15\cos^2\theta=0$

$\cos\theta(8\sin\theta-15\cos\theta)=0$

$\cos\theta\neq0$이므로 $8\sin\theta=15\cos\theta$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{15}{8}$이므로

$\sin\theta=15k$, $\cos\theta=8k$ (k는 실수)라 하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=225k^2+64k^2=289k^2=1$

에서 $k^2=\frac{1}{289}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로

$k<0$에서 $k=-\frac{1}{17}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{15}{17}+\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{23}{17}$

답 ③

다른 풀이

$4\sin\theta+\cos\theta+4=0$에서

$4(\sin\theta+1)=-\cos\theta$

양변을 제곱하면

$16(\sin^2\theta+2\sin\theta+1)=\cos^2\theta$

$16\sin^2\theta+32\sin\theta+16=1-\sin^2\theta$

$17\sin^2\theta+32\sin\theta+15=0$

$(17\sin\theta+15)(\sin\theta+1)=0$

θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{15}{17}$

이때 $\cos\theta=-4(\sin\theta+1)=-\frac{8}{17}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{15}{17}+\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{23}{17}$

5 $y=2\cos(ax)+b$ $(a>0)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이므로

$\frac{2\pi}{a}=6\pi$에서 $a=\frac{1}{3}$

한편, 함수 $y=2\cos(ax)+b$의 최댓값은 $\cos(ax)=1$일 때 $2+b$이므로

$2+b=5$에서 $b=3$

따라서 $a+b=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

답 ②

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta$

$=-\sin\theta$

$=-\frac{3}{5}$

답 ②

참고

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)&=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=-\cos\theta\end{aligned}$$

7 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(\pi+\theta)=\cos\theta+\tan\theta$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{5}}{15}$$

답 ②

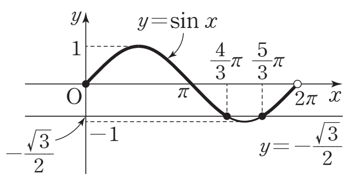
8 $2\sin^2 x-(2-\sqrt{3})\sin x-\sqrt{3}\le 0$에서

$(\sin x-1)(2\sin x+\sqrt{3})\le 0$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le \sin x\le 1$

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽(경계 포함)에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x\le \frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$



따라서 $\alpha=\frac{4}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=3\pi$

답 ③

9 x에 대한 이차방정식 $6x^2+(4\sin\theta)x+\cos\theta=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6\cos\theta=0$

$2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\le\theta<3\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{3}\pi$

그러므로 조건을 만족시키는 모든 실수 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+\frac{7}{3}\pi=\frac{13}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=13$이므로

$p+q=3+13=16$

답 16

Level 1 기초 연습

본문 46~48쪽

1 ⑤	2 ②	3 72	4 ①	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 ④	9 ①	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ④	

1 $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\sin\frac{2}{3}\pi\times\tan\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

답 ⑤

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하자.

부채꼴의 호의 길이가 6이고 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times r\times 6=15$

에서 $r=5$

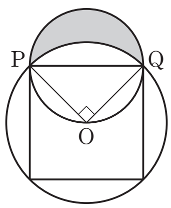
이때 이 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이가 6이므로

$5\theta=6$

따라서 $\theta=\frac{6}{5}$

답 ②

3 그림과 같이 큰 원의 중심을 O, 한 작은 원과 큰 원의 두 교점을 각각 P, Q라 하자.



정사각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{2}$이므로 작은 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이고, 한 작은 원의 내부와 정사각형의 외부의 공통부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times(3\sqrt{2})^2=9\pi$

또 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$이므로 부채꼴 OQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{2}=9\pi$

이고 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$

따라서 구하는 넓이는

$4\{9\pi-(9\pi-18)\}=72$

답 72

4 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{4}$에서

$\sin\theta=3k$, $\cos\theta=4k$ (k는 0이 아닌 실수)

로 놓을 수 있다.

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(3k)^2+(4k)^2=1$

$k^2=\dfrac{1}{25}$

$\sin\theta<0$이므로 $k=-\dfrac{1}{5}$

따라서 $\cos\theta=4k=-\dfrac{4}{5}$

답 ①

다른 풀이

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos\theta\neq0$이므로 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

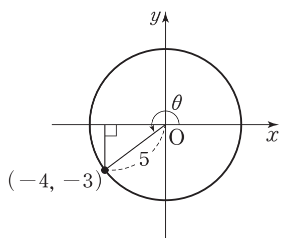
즉, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{1}{\dfrac{9}{16}+1}=\dfrac{16}{25}$

이때 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

참고

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다. 그러므로 다음 그림을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.



5 $3\sin^2\theta-4\sin\theta-4=0$에서

$(3\sin\theta+2)(\sin\theta-2)=0$

$-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\cos^4\theta&=(1-\sin^2\theta)+(1-\sin^2\theta)^2\\&=\left(1-\frac{4}{9}\right)+\left(1-\frac{4}{9}\right)^2\\&=\frac{5}{9}+\frac{25}{81}=\frac{70}{81}\end{aligned}$$

답 ⑤

6 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-\dfrac{-40}{25}=\dfrac{8}{5}$

$2\sin\theta=\dfrac{8}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{k}{25}&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)\\&=\sin^2\theta-\cos^2\theta\\&=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)\\&=2\sin^2\theta-1\end{aligned}$$

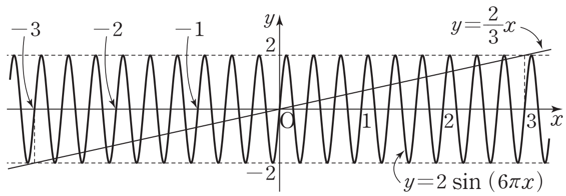
이므로

$k=50\sin^2\theta-25=50\times\dfrac{16}{25}-25=7$

답 ④

7 함수 $y=2\sin(6\pi x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{6\pi}=\dfrac{1}{3}$이므로

함수 $y=2\sin(6\pi x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=2\sin(6\pi x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{3}x$가 만나는 모든 점의 개수는

$2\times2\times9-1=35$

답 ③

8 $a>0$이므로 함수 $f(x)=a\sin3x+2$는 $\sin3x=1$일 때 최댓값 $a+2$를 갖는다.

즉, $a+2=6$에서 $a=4$이므로

$f(x)=4\sin3x+2$

따라서

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{18}\right)&=4\sin\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)+2\\&=4\sin\frac{\pi}{6}+2\\&=4\times\frac{1}{2}+2=4\end{aligned}$$

답 ④

9 $\cos x=t$ $(-1\le t\le1)$이라 하면

$\sin^2x=1-\cos^2x=1-t^2$이므로

$y=3(1-t^2)-t-1$
$\quad=-3t^2-t+2$
$\quad=-3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{25}{12}\ (-1\le t\le 1)$

따라서 이 함수는 $t=-\frac{1}{6}$일 때 최댓값 $\frac{25}{12}$를 갖고,
$t=1$일 때 최솟값 -2를 가지므로

$M+m=\frac{25}{12}+(-2)=\frac{1}{12}$

답 ①

10 $\sin 1200^\circ=\sin(360^\circ\times3+120^\circ)$
$\qquad=\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)$
$\qquad=\sin 60^\circ$
$\qquad=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 420^\circ=\tan(180^\circ\times2+60^\circ)$
$\qquad=\tan 60^\circ$
$\qquad=\sqrt{3}$

$\sin 675^\circ=\sin(360^\circ\times2-45^\circ)$
$\qquad=\sin(-45^\circ)$
$\qquad=-\sin 45^\circ$
$\qquad=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315^\circ=\cos(360^\circ-45^\circ)$
$\qquad=\cos(-45^\circ)$
$\qquad=\cos 45^\circ$
$\qquad=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서

$\sin 1200^\circ\times\tan 420^\circ-\sin 675^\circ\times\cos 315^\circ$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

답 ④

11 점 $\mathrm{P}(3,\ -4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로

$\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(-\theta)=\cos\theta-\tan\theta$
$\qquad=\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)$
$\qquad=\frac{29}{15}$

답 ④

12 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$\qquad=-\sqrt{1-\frac{11}{36}}$
$\qquad=-\frac{5}{6}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\qquad=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}$
$\qquad=-\frac{5\sqrt{11}}{11}$

따라서

$\tan(5\pi-\theta)=\tan(-\theta)$
$\qquad=-\tan\theta$
$\qquad=\frac{5\sqrt{11}}{11}$

답 ⑤

13 $3\sin^2 x-2\cos x-3=0$에서
$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로
$3(1-\cos^2 x)-2\cos x-3=0$
$3\cos^2 x+2\cos x=0$
$\cos x(3\cos x+2)=0$

한편, $\tan x>0$일 때 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$\cos x\ne0$이다.

즉, $\cos x=-\frac{2}{3}$

이때 $\sin x=\tan x\cos x<0$이므로

$\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}$
$\qquad=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$
$\qquad=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 ①

14 $|\sin x|<\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$

과 직선 $y=\frac{1}{2}$의 사이에 있는 x의 값의 범위이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$ ⋯⋯ ㉠

한편, $\sin x \cos x > 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는

$0 < x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\pi < x < \frac{7}{6}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=1$, $c=\frac{7}{6}$이므로

$a+b+c=\frac{1}{6}+1+\frac{7}{6}=\frac{7}{3}$

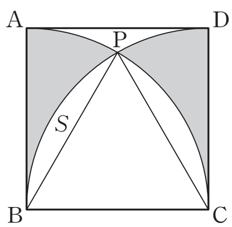
답 ④

Level 2 기본 연습

본문 49~50쪽

1 ①	2 ④	3 ①	4 ①	5 ③
6 ①	7 ①	8 ③		

1



그림과 같이 호 CA와 호 DB의 교점을 P라 하면 삼각형 PBC가 정삼각형이므로

$\angle PBC = \angle PCB = \frac{\pi}{3}$

즉, $\angle ABP = \frac{\pi}{6}$이므로 부채꼴 BPA의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$

한편, 그림과 같이 부채꼴 BPA에서 색칠한 부분을 제외한 부분의 넓이를 S라 하면 S는 부채꼴 CPB의 넓이에서 정삼각형 PBC의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2$

$= 6\pi - 9\sqrt{3}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$2\{3\pi - (6\pi - 9\sqrt{3})\} = 18\sqrt{3} - 6\pi$

답 ①

2 직선 OP의 방정식을 $y=mx$ $(m<0)$, 즉 $mx-y=0$이라 하면 점 $(1, 3)$에서의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$|m-3| = \sqrt{5} \times \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-6m+9=5m^2+5$

$2m^2+3m-2=0$

$(2m-1)(m+2)=0$

$m<0$이므로 $m=-2$

즉, $\tan\theta = -2$이므로

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2$

$\sin\theta = -2\cos\theta$

이것을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$4\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

θ가 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = -2\cos\theta = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $\sin\theta \times \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

답 ④

3 $x^2-5x+1=0$에서

$x+\frac{1}{x}=5$이므로

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = 5$

이때

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

이므로

$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = 5$

$\frac{2}{\cos\theta} = 5$

$\cos\theta = \frac{2}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta\times\tan\theta&=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{1-\frac{4}{25}}{\frac{2}{5}}=\frac{21}{10}\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 한 근이 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$이므로

$\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2-5\times\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+1=0$

$\cos^2\theta-5\cos\theta(1+\sin\theta)+(1+\sin\theta)^2=0$

$5\sin\theta\cos\theta+5\cos\theta-2\sin\theta-2=0$

$5\cos\theta(\sin\theta+1)-2(\sin\theta+1)=0$

$(5\cos\theta-2)(\sin\theta+1)=0$

$\sin\theta+1\neq0$이므로

$\cos\theta=\frac{2}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta\times\tan\theta&=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{1-\frac{4}{25}}{\frac{2}{5}}\\&=\frac{21}{10}\end{aligned}$$

4 함수 $y=a\cos(bx)+2$의 그래프는 함수 $y=a\cos(bx)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$a>0$이므로 함수 $y=a\cos(bx)+2$는 $\cos(bx)=1$일 때 최댓값 $a+2$를 갖는다.

주어진 그림에서 $a+2=5$이므로 $a=3$

한편, 함수 $f(x)=a\cos(bx)+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이고 주어진 그림에서

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$

이므로 $b=4$

따라서 $f(x)=3\cos 4x+2$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{11}{6}\pi\right)&=3\cos\frac{22}{3}\pi+2\\&=3\cos\left(6\pi+\frac{4}{3}\pi\right)+2\\&=3\cos\frac{4}{3}\pi+2\\&=3\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2\\&=3\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+2\\&=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

5 함수 $y=\log(3x-\pi)+2=\log 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$의 그래프는 함수 $y=\log 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\log(3x-\pi)+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{\pi}{3}$

$\tan(ax+3\pi)=\tan(ax)$이고, 함수 $y=\tan(ax)$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$이므로 함수 $y=\tan(ax)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{n}{a}\pi+\frac{\pi}{2a}=\frac{2n+1}{2a}\pi$ (단, n은 정수)

$\frac{2n+1}{2a}\pi=\frac{\pi}{3}$에서 $a=\frac{3}{2}(2n+1)$

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 $n=0$일 때 $\frac{3}{2}$이다.

답 ③

6 $\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)\right\}=\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)$

이므로

$\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=t\ (-1\le t\le 1)$

이라 하면

$$\begin{aligned}y&=\sin^2\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+2\\&=1-\cos^2\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+2\\&=1-t^2+t+2\\&=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}\ (-1\le t\le 1)\end{aligned}$$

이 함수는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$을 가지므로 $M=\frac{13}{4}$이고

$t=\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$일 때

$x+\frac{7}{6}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x+\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\pi$

즉, $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{6}$

또 이 함수는 $t=-1$일 때 최솟값 1을 가지므로 $m=1$이고

$t=\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=-1$일 때 $x+\frac{7}{6}\pi=3\pi$

즉, $x=\frac{11}{6}\pi$이므로

$c=\frac{11}{6}$

따라서

$a+b+c+M+m=\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+\frac{13}{4}+1=\frac{31}{4}$

답 ①

7 직선 l 위의 임의의 점을 (x, y)라 하면 점 (x, y)에서 두 직선 $3x-4y=0$, $4x+3y=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|3x-4y|=|4x+3y|$

$3x-4y=4x+3y$ 또는 $3x-4y=-4x-3y$

$y=-\frac{1}{7}x$ 또는 $y=7x$

이때 원점과 제3사분면을 지나는 직선의 기울기는 양수이므로 직선 l의 방정식은 $y=7x$이다.

즉, $\tan\theta=7$이고 점 P가 제3사분면에 있으므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=7$에서 $\sin\theta=7\cos\theta$이고,

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$49\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{50}$

$\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\sin\theta=7\cos\theta=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)&=\sin\theta-\cos\theta\\&=-\frac{7\sqrt{2}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\\&=-\frac{3\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

답 ①

8 $2\cos 3x+3\tan 3x=0$에서 $\cos 3x\neq 0$이므로

$2\cos 3x+\frac{3\sin 3x}{\cos 3x}=0$

$2\cos^2 3x+3\sin 3x=0$

$2(1-\sin^2 3x)+3\sin 3x=0$

$2\sin^2 3x-3\sin 3x-2=0$

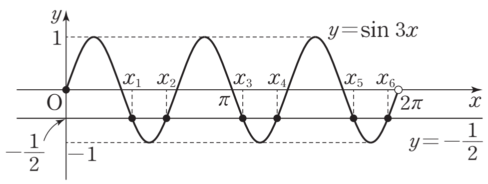
$(2\sin 3x+1)(\sin 3x-2)=0$

이때 $-1\le\sin 3x\le 1$이므로 $\sin 3x=-\frac{1}{2}$

함수 $y=\sin 3x$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 다음 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin 3x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 서로 다른 6개의 점에서 만난다.

즉, $n=6$

이 6개의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, $\cdots$, x_6이라 하자.



$0\le 3x<2\pi$에서 $\sin 3x=-\frac{1}{2}$이면

$3x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $3x=\frac{11}{6}\pi$

즉, $x=\frac{7}{18}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{18}\pi$이므로

$x_1=\frac{7}{18}\pi$, $x_2=\frac{11}{18}\pi$

이때

$x_3=\frac{2}{3}\pi+x_1$, $x_4=\frac{2}{3}\pi+x_2$,

$x_5=\frac{4}{3}\pi+x_1$, $x_6=\frac{4}{3}\pi+x_2$

이므로

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_6&=4\pi+3(x_1+x_2)\\&=4\pi+3\times\left(\frac{7}{18}\pi+\frac{11}{18}\pi\right)\\&=7\pi\end{aligned}$$

따라서 $n=6$, $k=7$이므로 $n+k=6+7=13$

답 ③

참고

위의 풀이에서 x_1, x_2의 값을 직접 구하지 않아도 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x_1+x_2=\pi$

임을 알 수 있다.

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 ④	2 ①	3 ③	4 19

1 $\cos x=X$, $\sin y=Y$라 하면 $X+Y=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin^2 x=1-X^2$, $\cos^2 y=1-Y^2$이고

$\sin x\times\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}$에서

$\sin^2 x\times\cos^2 y=\frac{1}{8}$이므로

$(1-X^2)(1-Y^2)=\frac{1}{8}$

$(XY)^2-(X^2+Y^2)+1=\frac{1}{8}$ ······ ㉠

이때

$X^2+Y^2=(X+Y)^2-2XY=\frac{1}{8}-2XY$

이므로 ㉠에서

$(XY)^2-\frac{1}{8}+2XY+1=\frac{1}{8}$

$4(XY)^2+8XY+3=0$

$(2XY+1)(2XY+3)=0$

$-1\le X\le 1$, $-1\le Y\le 1$에서

$-1\le XY\le 1$이므로

$XY=-\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}(\cos x-\sin y)^2&=(X-Y)^2=(X+Y)^2-4XY\\&=\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}\end{aligned}$$

답 ④

2 $\cos t=s$ $(-1\le s\le 1)$이라 하면

$\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-s^2$이므로

$$\begin{aligned}f(t)&=2\sin^2 t+x\cos t+3\\&=2(1-s^2)+xs+3\\&=-2s^2+xs+5\\&=-2\left(s-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{8}+5\ (-1\le s\le 1)\end{aligned}$$

이때 $h(s)=-2\left(s-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{8}+5$ $(-1\le s\le 1)$이라 하자.

(i) $-1\le\frac{x}{4}\le 1$, 즉 $-4\le x\le 4$일 때

함수 $h(s)$는 $s=\frac{x}{4}$일 때 최댓값 $\frac{x^2}{8}+5$를 가지므로

$g(x)=\frac{x^2}{8}+5$

(ii) $\frac{x}{4}>1$, 즉 $x>4$일 때

함수 $h(s)$는 $s=1$일 때 최댓값 $x+3$을 가지므로

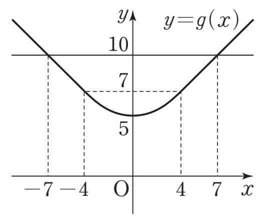
$g(x)=x+3$

(iii) $\frac{x}{4}<-1$, 즉 $x<-4$일 때

함수 $h(s)$는 $s=-1$일 때 최댓값 $-x+3$을 가지므로

$g(x)=-x+3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $g(0)=5$, $g(1)=5+\frac{1}{8}$, $g(2)=5+\frac{1}{2}$, $g(3)=6+\frac{1}{8}$, $g(4)=7$, $g(5)=8$, $g(6)=9$, $g(7)=10$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=10$으로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$x=0$, 1, 2일 때 각각 4개,

$x=3$일 때 3개,

$x=4$일 때 2개,

$x=5$일 때 1개

이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 점의 개수는

$4+2\times(4+4+3+2+1)=32$

답 ①

3 $g(x)=4\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+3\sin(\pi+x)$라 하면

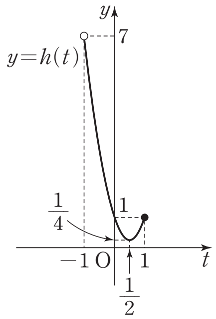
주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$$\begin{aligned}g(x)&=4\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+3\sin(\pi+x)\\&=4\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin x\\&=4\sin^2 x+1-\sin^2 x-3\sin x\\&=3\sin^2 x-3\sin x+1\end{aligned}$$

에서 $\sin x=t$라 하면 $0\le x<\frac{3}{2}\pi$이므로 $-1<t\le 1$이고

$g(x)=3t^2-3t+1=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ $(-1<t\le 1)$

$h(t)=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ $(-1<t\le1)$이라 하면 함수 $y=h(t)$의 그래프는 다음과 같다.



(ⅰ) $k<\frac{1}{4}$일 때

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않으므로

$f(k)=0$

(ⅱ) $k=\frac{1}{4}$일 때

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$는 한 점에서만 만나고 이때 $t=\frac{1}{2}$이다.

이 경우 $0\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$인 x의 값은 2개이므로

$f(k)=2$

(ⅲ) $\frac{1}{4}<k<1$일 때

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나고 이때 $0<t<1$, $t\neq\frac{1}{2}$이다.

이 경우 $0\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin x=t$인 x의 값은 서로 다른 2개의 t의 값에 대하여 각각 2개이므로

$f(k)=2\times2=4$

(ⅳ) $k=1$일 때

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나고 이때 $t=0$ 또는 $t=1$이다.

이 경우 $0\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin x=0$인 x의 값은 2개, $\sin x=1$인 x의 값은 1개이므로

$f(k)=3$

(ⅴ) $1<k<7$일 때

함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$는 한 점에서만 만나고 이때 $-1<t<0$이다.

이 경우 $0\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin x=t$인 x의 값은 1개이므로

$f(k)=1$

(ⅵ) $k\ge7$일 때

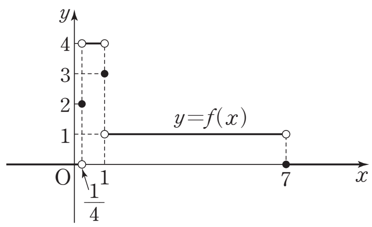
함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않으므로

$f(k)=0$

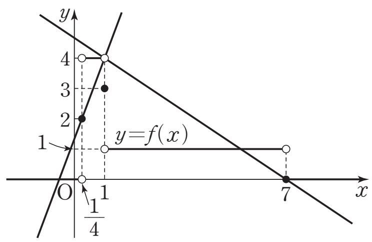
(ⅰ)~(ⅵ)에서

$$f(k)=\begin{cases}0 & \left(k<\frac{1}{4} \text{ 또는 } k\ge7\right)\\ 2 & \left(k=\frac{1}{4}\right)\\ 4 & \left(\frac{1}{4}<k<1\right)\\ 3 & (k=1)\\ 1 & (1<k<7)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 직선 $y=ax-a+4=a(x-1)+4$는 항상 점 $(1, 4)$를 지나는 직선이므로 이 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면서 기울기가 최대인 경우는 다음 그림과 같이 점 $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$를 지날 때이고, 기울기가 최소인 경우는 점 $(7, 0)$을 지날 때이다.



따라서

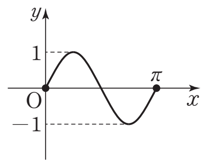
$$M=\frac{4-2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3},\ m=\frac{4-0}{1-7}=-\frac{2}{3}$$

이므로

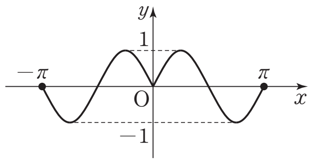
$$M+m=\frac{8}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=2$$

답 ③

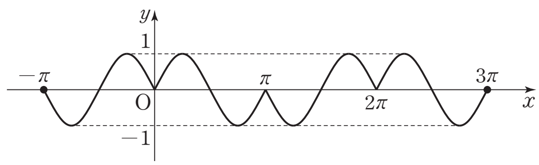
4 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



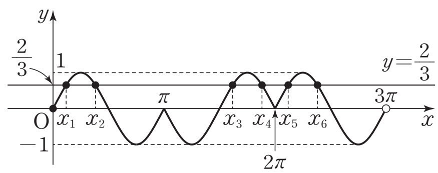
또 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로
$-\pi \le x \le \pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2\pi)=f(x)$이므로
$-\pi \le x \le 3\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 \le x < 3\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$는 다음 그림과 같이 6개의 점에서 만나는데, 이들의 x좌표를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6이라 하자.



이때

$x_2=\frac{\pi}{2}-x_1$,

$x_3=\frac{3}{2}\pi+x_1$,

$x_4=2\pi-x_1$,

$x_5=2\pi+x_1$,

$x_6=\frac{5}{2}\pi-x_1$

이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

$=x_1+\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)+\left(\frac{3}{2}\pi+x_1\right)+(2\pi-x_1)+(2\pi+x_1)$
$+\left(\frac{5}{2}\pi-x_1\right)$

$=\frac{17}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=17$이므로 $p+q=2+17=19$

답 19

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 55~61쪽

1 ⑤　　2 ④　　3 ③　　4 ③　　5 ③
6 ③

1 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로
$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$
이것을 $9\sin A\sin(B+C)=4$에 대입하면
$9\sin^2 A=4$
$\sin^2 A=\frac{4}{9}$
$0<A<\pi$에서 $\sin A>0$이므로
$\sin A=\frac{2}{3}$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$
이므로
$\frac{5}{\frac{2}{3}}=2R$
따라서 $R=\frac{15}{4}$

답 ⑤

2 $\angle ABC=\theta$라 하면 사각형 ODBE에서
$\angle BDO=\angle BEO=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\pi-\angle DOE$
이때
$\cos\theta=\cos(\pi-\angle DOE)=-\cos(\angle DOE)$
$=-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$
이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$
한편, 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$

이므로

$\dfrac{4}{\frac{2}{3}}=2R$

$R=6\times\dfrac{1}{2}=3$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times 3^2=9\pi$

답 ④

3 $\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

$5\overline{BC}=3\overline{CA}$에서 $\overline{BC}:\overline{CA}=3:5$

즉, $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=6:3:5$이므로

$\overline{AB}=6k$, $\overline{BC}=3k$, $\overline{CA}=5k$ $(k>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

이므로

$(6k)^2=(3k)^2+(5k)^2-2\times 3k\times 5k\times\cos C$

따라서

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\times 3k\times 5k}=\frac{-2k^2}{30k^2}=-\frac{1}{15}$$

답 ③

4 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

그러므로 $a\cos B+b\cos A=14-c$에서

$a\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=14-c$

$c=14-c$

$2c=14$

따라서 $c=7$

답 ③

5 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$ …… ㉠

이고, 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ …… ㉡

또 $A+B+C=\pi$에서

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

이므로

$\sin A+\sin B-\sin(A+B)=2\sin A\cos C$

에서

$\sin A+\sin B-\sin C=2\sin A\cos C$

위 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}-\dfrac{c}{2R}=2\times\dfrac{a}{2R}\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$b(a+b-c)=a^2+b^2-c^2$

$ab+b^2-bc=a^2+b^2-c^2$

$a^2-c^2-ab+bc=0$

$(a+c)(a-c)-b(a-c)=0$

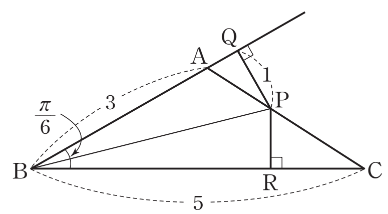
$(a-c)(a+c-b)=0$

$a+c-b\neq0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ③

6



삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{4}$

한편, 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$

이고, 삼각형 PBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{PR}=\dfrac{5}{2}\overline{PR}$

이므로

$\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}\overline{PR}=\dfrac{15}{4}$

따라서

$\overline{PR}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{15}{4}-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{10}$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 ③	5 71
6 ③	7 481	8 ③		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=2R$

이므로

$R=\dfrac{\overline{\text{BC}}}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\times\dfrac{2}{3}}=3$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times3^2=9\pi$

답 ④

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2\pi R=8\pi$

이므로 $R=4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=2R$

따라서

$\overline{\text{BC}}=2R\sin A$

$=2\times4\times\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=2\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\sqrt{3}$

답 ④

3 $\dfrac{\sin A}{3}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$에서

$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:4$

이므로 $a:b:c=3:5:4$

이때 $\overline{\text{AB}}=c=8$이므로 $a=6$, $b=10$

즉, $a^2+c^2=b^2$이므로 삼각형 ABC는 $B=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times a\times c=\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$

답 ②

4 실수 t $(t>0)$에 대하여 $\overline{\text{AB}}=kt$, $\overline{\text{BC}}=3t$, $\overline{\text{CA}}=2t$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$9t^2=k^2t^2+4t^2-2\times kt\times2t\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$k^2-2k-5=0$

$k>0$이므로 $k=1+\sqrt{6}$

답 ③

5 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{BC}}^2}{2\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CA}}}$

$=\dfrac{16+25-36}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$

이므로

$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=\dfrac{6}{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}=2R$

즉, $R=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$이므로 외접원의 넓이는 $\dfrac{64}{7}\pi$이다.

따라서 $p=7$, $q=64$이므로

$p+q=7+64=71$

답 71

6 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이고, 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이므로

$\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}=2\cos B-1$

에서

$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{ca}-1$

$a^2-ab=c^2+a^2-b^2-ca$

$b^2-c^2-ab+ca=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$

$(b-c)(b+c-a)=0$

이때 $b+c-a\neq 0$이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ③

7 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이의 합과 같고 $\angle\text{BAD}=\angle\text{DAC}=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\frac{1}{2}\times 4\times 3\times \sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\times 4\times \overline{\text{AD}}\times \sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times \overline{\text{AD}}\times 3\times \sin\frac{\pi}{6}$$
$$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\overline{\text{AD}}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\overline{\text{AD}}\times\frac{1}{2}$$
$$\overline{\text{AD}}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$$
$$\overline{\text{AD}}^2=\frac{432}{49}$$

따라서 $p=49$, $q=432$이므로

$p+q=49+432=481$

답 481

8 $\overline{\text{AB}}=5t$, $\overline{\text{AC}}=3s$ $(t>0,\ s>0)$이라 하면

삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times 5t\times 3s\times \sin A=\frac{15}{2}ts\sin A$$

이때 $\overline{\text{AP}}=3t$, $\overline{\text{AQ}}=2s$이므로 삼각형 APQ의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times 3t\times 2s\times \sin A=3ts\sin A$$

따라서 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3ts\sin A}{\frac{15}{2}ts\sin A}=\frac{2}{5}$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

1 47	2 ②	3 ③	4 ④	5 ④
6 ④	7 ②	8 ②	9 ④	10 ③
11 81	12 ④			

1 사각형 ABCD에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin(\angle\text{ABC})}=2R$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$$

$R=3$

한편, 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{BD}}}{\sin(\angle\text{BCD})}=2R$$

이므로

$$\sin(\angle\text{BCD})=\frac{\overline{\text{BD}}}{2R}=\frac{5}{2\times 3}=\frac{5}{6}$$
$$\cos^2(\angle\text{BCD})=1-\sin^2(\angle\text{BCD})$$
$$=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$$

따라서 $p=36$, $q=11$이므로

$p+q=36+11=47$

답 47

2 $2\sin A=4\sin B=3\sin C$의 각 변을 12로 나누면

$$\frac{\sin A}{6}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{4}$$

즉, $\sin A:\sin B:\sin C=6:3:4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$이므로

$a:b:c=6:3:4$

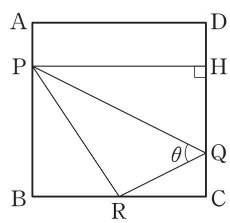
$a=6k$, $b=3k$, $c=4k$ $(k>0)$이라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9k^2+16k^2-36k^2}{2\times 3k\times 4k}=-\frac{11}{24}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{16k^2+36k^2-9k^2}{2\times 4k\times 6k}=\frac{43}{48}$$

따라서 $\cos A+\cos B=-\frac{11}{24}+\frac{43}{48}=\frac{7}{16}$

답 ②

3



그림과 같이 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $4k$ $(k>0)$이라 하면

직각삼각형 PQH에서 $\overline{QH}=2k$, $\overline{PH}=4k$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{4k^2+16k^2}=2\sqrt{5}k$

직각삼각형 QRC에서 $\overline{CQ}=k$, $\overline{RC}=2k$이므로

$\overline{QR}=\sqrt{k^2+4k^2}=\sqrt{5}k$

직각삼각형 PBR에서 $\overline{BR}=2k$, $\overline{PB}=3k$이므로

$\overline{RP}=\sqrt{4k^2+9k^2}=\sqrt{13}k$

따라서 삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2-\overline{RP}^2}{2\times\overline{PQ}\times\overline{QR}}\\&=\frac{20k^2+5k^2-13k^2}{2\times2\sqrt{5}k\times\sqrt{5}k}\\&=\frac{12k^2}{20k^2}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ③

4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이고, 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

따라서

$$\begin{aligned}&\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A\\&=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2-2\times\frac{b}{2R}\times\frac{c}{2R}\times\cos A\\&=\frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{4R^2}\\&=\frac{a^2}{4R^2}\\&=\left(\frac{a}{2R}\right)^2\\&=\sin^2 A\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 ④

5 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\theta\\&=25+16-2\times5\times4\times\cos\theta\\&=41-40\cos\theta \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

한편, $\angle BCD=\pi-\theta$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos(\pi-\theta)\\&=9+4+2\times3\times2\times\cos\theta\\&=13+12\cos\theta \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$41-40\cos\theta=13+12\cos\theta$

$52\cos\theta=28$

따라서 $\cos\theta=\frac{28}{52}=\frac{7}{13}$

답 ④

6 $\angle POA=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 POA에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2&=\overline{OP}^2+\overline{OA}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OA}\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=t^2+5^2-2\times t\times5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=t^2-5\sqrt{2}t+25\end{aligned}$$

이때 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있으려면 $\overline{PA}^2<16$이어야 하므로

$t^2-5\sqrt{2}t+25<16$

$t^2-5\sqrt{2}t+9<0$

$\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{50-36}}{2}<t<\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{50-36}}{2}$

$\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<t<\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

따라서 $\beta-\alpha=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}-\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

답 ④

참고

$t^2-5\sqrt{2}t+9<0$의 해가 $\alpha<t<\beta$이므로 $\beta-\alpha$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

이차방정식 $t^2-5\sqrt{2}t+9=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5\sqrt{2}$, $\alpha\beta=9$

따라서 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(5\sqrt{2})^2-4\times9=14$

이고 $\beta-\alpha>0$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{14}$

7 $\frac{\tan A}{a}=\frac{\tan B}{b}$에서

$b\tan A=a\tan B$

$b\times\frac{\sin A}{\cos A}=a\times\frac{\sin B}{\cos B}$

$b\sin A\cos B=a\sin B\cos A$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$b\times\frac{a}{2R}\times\cos B=a\times\frac{b}{2R}\times\cos A$

이므로 $\cos B=\cos A$

이때 $0<A<\pi$, $0<B<\pi$이므로 $A=B$

따라서 삼각형 ABC는 $A=B$, 즉 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ②

다른 풀이

$\frac{\tan A}{a}=\frac{\tan B}{b}$에서

$b\tan A=a\tan B$

$b\times\frac{\sin A}{\cos A}=a\times\frac{\sin B}{\cos B}$

$b\sin A\cos B=a\sin B\cos A$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$b\times\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a\times\frac{b}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b(c^2+a^2-b^2)=a(b^2+c^2-a^2)$

$bc^2+a^2b-b^3=ab^2+c^2a-a^3$

$(a^3-b^3)+(a^2b-ab^2)-(c^2a-bc^2)=0$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)-c^2(a-b)=0$

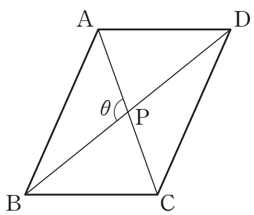
$(a-b)\{(a+b)^2-c^2\}=0$

$(a-b)(a+b+c)(a+b-c)=0$

이때 $a+b+c\neq0$, $a+b-c\neq0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

8



그림과 같이 두 대각선 AC, BD의 교점을 P라 하고, $\angle\mathrm{APB}=\theta$라 하자.

이때 평행사변형 ABCD의 넓이는 두 대각선 AC, BD에 의하여 사등분되므로 삼각형 ABP의 넓이는 $2\sqrt{2}$이다.

즉, $\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\theta=2\sqrt{2}$이므로

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이때

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=4+9+4=17$

답 ②

9 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$

에서

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=2\times\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$a^2+b^2=2c^2$

$c^2=\frac{a^2+b^2}{2}$ ...... ㉠

이때 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 ㉠을 대입하면

$\cos C=\frac{a^2+b^2}{4ab}=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{1}{4}\times2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=\frac{1}{2}$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 }a=b\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

10 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 조건 (가)에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)=1$

$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

즉, $a^2+b^2=c^2$이므로 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

이때 $\tan A=\frac{a}{b}$, $\tan B=\frac{b}{a}$에서

$\tan(\pi-A)=-\tan A=-\frac{a}{b}$

$\tan(\pi+B)=\tan B=\frac{b}{a}$

이고 $C=\frac{\pi}{2}$에서

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-C\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

이므로 조건 (나)에서

$2\times\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{b}{a}-(-1)=2$

$-\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}=1$

$2a^2+ab-b^2=0$

$(2a-b)(a+b)=0$

$a+b\neq0$이므로 $b=2a$

이때 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}\times a\times 2a=a^2=5$

이므로

$c^2=a^2+b^2=a^2+4a^2=5a^2=5\times5=25$

즉, $c=5$

따라서 직각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 빗변의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times c=\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{2}$

답 ③

11 $\overline{AB}=5\sqrt{2}t$, $\overline{BC}=2\sqrt{5}t$, $\overline{CA}=3\sqrt{2}t$ $(t>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{18t^2+50t^2-20t^2}{2\times3\sqrt{2}t\times5\sqrt{2}t}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$

이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times5\sqrt{5}$

$\overline{BC}=10\sqrt{5}\sin A$

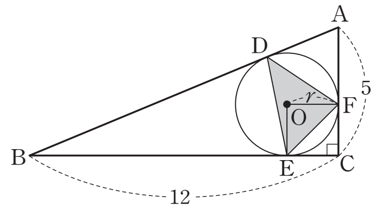
즉, $2\sqrt{5}t=10\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=6\sqrt{5}$이므로 $t=3$

따라서 $\overline{AB}=15\sqrt{2}$, $\overline{CA}=9\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times15\sqrt{2}\times9\sqrt{2}\times\frac{3}{5}=81$

답 81

12



그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r라 하면 사각형 OECF는 한 변의 길이가 r인 정사각형이므로

$\overline{CE}=\overline{CF}=r$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=13$이고

$\overline{AD}=\overline{AF}=5-r$, $\overline{BD}=\overline{BE}=12-r$이므로

$13=(5-r)+(12-r)$

에서 $r=2$

한편, $\sin A=\frac{12}{13}$, $\sin B=\frac{5}{13}$이고

$\overline{AD}=\overline{AF}=3$, $\overline{BD}=\overline{BE}=10$이므로

$\triangle ADF=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin A=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{12}{13}=\frac{54}{13}$

$\triangle BED=\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times10\times10\times\frac{5}{13}=\frac{250}{13}$

또

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times12\times5=30$, $\triangle ECF=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이므로 삼각형 DEF의 넓이는

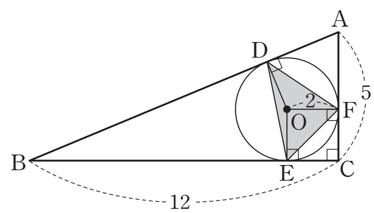
$\triangle ABC-(\triangle ADF+\triangle BED+\triangle ECF)$

$=30-\left(\frac{54}{13}+\frac{250}{13}+2\right)=\frac{60}{13}$

답 ④

다른 풀이

삼각형 DEF의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.



$\triangle DOF=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\angle DOF)$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\pi-A)$

$=2\sin A$

$=2\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$

$\triangle\mathrm{DOE}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\angle\mathrm{DOE})$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\pi-B)$

$=2\sin B$

$=2\times\frac{5}{13}=\frac{10}{13}$

$\triangle\mathrm{EOF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

따라서

$\triangle\mathrm{DEF}=\triangle\mathrm{DOF}+\triangle\mathrm{DOE}+\triangle\mathrm{EOF}$

$=\frac{24}{13}+\frac{10}{13}+2=\frac{60}{13}$

Level 3 실력 완성

본문 67쪽

1 ③ 2 ① 3 97

1 $\overline{\mathrm{PA}}=x$, $\overline{\mathrm{PB}}=y$, $\overline{\mathrm{PC}}=z$라 하자.

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$=x^2+y^2-2xy\times\frac{1}{2}$

$=x^2+y^2-xy$

또 $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=x^2+z^2-2xz\cos\frac{\pi}{3}$

$=x^2+z^2-2xz\times\frac{1}{2}$

$=x^2+z^2-xz$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$x^2+y^2-xy=x^2+z^2-xz$

$y^2-z^2-xy+xz=0$

$(y-z)(y+z)-x(y-z)=0$

$(y-z)(y+z-x)=0$

$y\neq z$이므로 $x=y+z$

한편, 삼각형 BPC에서 $\angle\mathrm{BPC}=\frac{2}{3}\pi$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=y^2+z^2-2yz\cos\frac{2}{3}\pi$

$=y^2+z^2-2yz\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=y^2+z^2+yz$

즉,

$x^2+y^2+z^2=(y+z)^2+y^2+z^2$

$=(y^2+2yz+z^2)+y^2+z^2$

$=2(y^2+z^2+yz)$

$=2\times\overline{\mathrm{BC}}^2$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times\sqrt{3}$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

따라서 $x^2+y^2+z^2=2\times\overline{\mathrm{BC}}^2=2\times3^2=18$

답 ③

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 조건 (가)에서

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=2\times\frac{c}{2R}$

즉, $a+b=2c$ …… ㉠

또 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 조건 (나)에서

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=2\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)=2c(a^2+b^2-c^2)$

$ab^2+c^2a-a^3+bc^2+a^2b-b^3-2ca^2-2b^2c+2c^3=0$

$a^2(-a+b-2c)+b^2(a-b-2c)+c^2(a+b+2c)=0$

여기에 ㉠을 대입하면

$-2a^3-2b^3+\frac{(a+b)^2}{4}\times2(a+b)=0$

$4a^3+4b^3-(a+b)^3=0$

$4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a^2+2ab+b^2)=0$

$(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)=0$

$3(a+b)(a-b)^2=0$
$a+b\neq 0$이므로 $a=b$
㉠에서 $2c=a+b=2a$이므로 $c=a$
따라서 $a=b=c$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

답 ①

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$
$$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$=16$$
이므로
$\overline{BC}=4$
한편,
$$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle BAC)}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$
이므로 삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2R$$
$$\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R$$
즉, $R=\frac{8}{\sqrt{15}}$이므로 외접원 O의 넓이를 S라 하면
$$S=\frac{64}{15}\pi$$
또 삼각형 ABC의 넓이가
$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$
이므로 삼각형 ABC의 내접원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면
$$\frac{r}{2}(2+4+3)=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$
즉, $r=\frac{\sqrt{15}}{6}$이므로 내접원 O'의 넓이를 S'이라 하면
$$S'=\frac{5}{12}\pi$$
그러므로
$$S-S'=\frac{64}{15}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{77}{20}\pi$$
따라서 $p=20$, $q=77$이므로
$p+q=20+77=97$

답 97

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 71~77쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ② 5 ⑤
6 ① 7 ① 8 ②

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d$이므로
$2a_1+5d=7$ …… ㉠
$a_9+a_{10}=a_5+a_6+24$에서
$(a_1+8d)+(a_1+9d)=(a_1+4d)+(a_1+5d)+24$
$2a_1+17d=2a_1+9d+24$
$8d=24$, $d=3$
$d=3$을 ㉠에 대입하면
$2a_1+5\times3=7$
$a_1=-4$
따라서 $a_7=-4+6\times3=14$

답 ③

다른 풀이
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d$이므로
$2a_1+5d=7$ …… ㉠
한편, $a_9+a_{10}=(a_5+4d)+(a_6+4d)$이므로
$a_9+a_{10}=a_5+a_6+24$에서
$(a_5+4d)+(a_6+4d)=a_5+a_6+24$
$8d=24$, $d=3$
$d=3$을 ㉠에 대입하면
$2a_1+5\times3=7$
$a_1=-4$
따라서 $a_7=-4+6\times3=14$

2 네 수 2, a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a는 2와 b의 등차중항이고, b는 a와 14의 등차중항이다. 즉,
$2+b=2a$ …… ㉠
$a+14=2b$ …… ㉡
㉠에서 $b=2a-2$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$a+14=2(2a-2)$

$3a=18$, $a=6$

$a=6$을 ㉢에 대입하면

$b=2\times6-2=10$

따라서 $a^2+b^2=6^2+10^2=136$

답 ④

다른 풀이

네 수 2, a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$2+3d=14$

$d=4$

이때 $a=2+4=6$, $b=2+2\times4=10$

따라서 $a^2+b^2=6^2+10^2=136$

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_6=\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}=33$에서

$2a_1+5d=11$ ⋯⋯ ㉠

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=143$에서

$a_1+5d=13$ ⋯⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$a_1=-2$

$a_1=-2$를 ㉡에 대입하면

$-2+5d=13$

$d=3$

따라서

$a_2=-2+3=1$

답 ③

다른 풀이

$S_{11}=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}=143$에서

$a_1+a_{11}=26$

한편, 세 수 a_1, a_6, a_{11}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_6=\dfrac{a_1+a_{11}}{2}=\dfrac{26}{2}=13$

$S_6=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=\dfrac{6(a_1+13)}{2}=33$에서

$a_1=-2$

$a_6-a_1=5d$이므로

$5d=13-(-2)=15$

$d=3$

따라서

$a_2=-2+3=1$

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\dfrac{7(2a_1+6d)}{2}=7(a_1+3d)$

$$\begin{aligned}a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}&=\dfrac{7(2a_5+6d)}{2}=7(a_5+3d)\\&=7\{(a_1+4d)+3d\}\\&=7(a_1+7d)\end{aligned}$$

따라서

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)+(a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11})$

$=7(a_1+3d)+7(a_1+7d)$

$=14(a_1+5d)$

$=14a_6$

$=14\times5$

$=70$

답 ②

다른 풀이

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}=\dfrac{7(a_5+a_{11})}{2}$ ⋯⋯ ㉡

세 수 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_4=\dfrac{a_1+a_7}{2}$ ⋯⋯ ㉢

세 수 a_5, a_8, a_{11}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_8=\dfrac{a_5+a_{11}}{2}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 각각 ㉠, ㉡에 대입하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=7a_4$,

$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}=7a_8$

또 세 수 a_4, a_6, a_8은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_6=\dfrac{a_4+a_8}{2}$

즉, $a_4+a_8=2a_6$

따라서

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)+(a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11})$

$=7a_4+7a_8$

$=7\times2a_6$

$=7\times2\times5=70$

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로 $r>0$이다.

$\dfrac{a_3+a_2}{a_5+a_4}=\dfrac{a_1r^2+a_1r}{a_1r^4+a_1r^3}=\dfrac{a_1r^2+a_1r}{r^2(a_1r^2+a_1r)}=\dfrac{1}{r^2}$

이므로 $\dfrac{1}{r^2}=16$

$r=-\frac{1}{4}$ 또는 $r=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{4}$

따라서 $a_2=a_1r=20\times\frac{1}{4}=5$

답 ⑤

6 세 수 a, $a+b$, $a+4b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+b)^2=a(a+4b)$

$a^2+2ab+b^2=a^2+4ab$

$b^2-2ab=0$, $b(b-2a)=0$

$b=0$ 또는 $b=2a$

$b>0$이므로 $b=2a$

따라서 $\frac{b}{a}=2$

답 ①

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1a_3=4a_2a_4$에서

$a_1\times a_1r^2=4\times a_1r\times a_1r^3$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

이때 $a_5=a_1r^4=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=8$

따라서

$$\begin{aligned}a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}&=a_5(1+r+r^2+\cdots+r^5)\\&=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\\&=8\times\frac{2^6-1}{2^5}\\&=\frac{63}{4}\end{aligned}$$

답 ①

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하자.

$S_4-S_2=3a_3$에서

$S_4-S_2=a_4+a_3$이므로

$a_4+a_3=3a_3$

$a_4=2a_3$

즉, $\frac{a_4}{a_3}=2$이므로

$r=2$

따라서 $S_{10}=\frac{a_1(2^{10}-1)}{2-1}=\frac{1}{3}\times1023=341$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②
6 5	7 ②	8 ①	9 ⑤	10 ③

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_4=a_1+3d=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$2d=5$, $d=\frac{5}{2}$

$d=\frac{5}{2}$를 ㉠에 대입하면

$a_1+\frac{5}{2}=-1$, $a_1=-\frac{7}{2}$

따라서 $a_{10}=a_1+9d=-\frac{7}{2}+9\times\frac{5}{2}=19$

답 ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d$

즉, $4-(-1)=2d$이므로

$d=\frac{5}{2}$

따라서 $a_{10}=a_4+6d=4+6\times\frac{5}{2}=19$

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_6=4$에서

$(a_1+3d)-(a_1+5d)=-2d=4$

$d=-2$

$a_2=5$이므로

$a_2=a_1+d=a_1+(-2)=5$, $a_1=7$

이때

$a_m=a_1+(m-1)d=7+(m-1)\times(-2)=-2m+9$

$a_m=-21$이므로 $-2m+9=-21$

따라서 $m=15$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1=2$이므로 $a_2+a_3=10$에서

$(2+d)+(2+2d)=10$

$3d=6$, $d=2$

따라서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\times2+(10-1)\times2\}}{2}=110$$

답 ③

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1=3$이므로

$$\begin{aligned}a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}&=\frac{11(a_5+a_{15})}{2}\\&=\frac{11\{(3+4d)+(3+14d)\}}{2}\\&=\frac{11(6+18d)}{2}\\&=11(3+9d)\end{aligned}$$

이때 $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=132$이므로

$11(3+9d)=132$

$3+9d=12$

$d=1$

따라서 $a_3=a_1+2d=3+2\times1=5$

답 ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

세 수 a_5, a_{10}, a_{15}는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{a_5+a_{15}}{2}=a_{10}$, 즉 $a_5+a_{15}=2a_{10}$

$$\begin{aligned}a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}&=\frac{11(a_5+a_{15})}{2}\\&=\frac{11\times2a_{10}}{2}\\&=11a_{10}\end{aligned}$$

$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=132$이므로

$11a_{10}=132$, $a_{10}=12$

이때 $a_{10}=a_1+9d=3+9d$이므로

$3+9d=12$, $d=1$

따라서 $a_3=a_1+2d=3+2\times1=5$

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1=9$이므로

$$\begin{aligned}S_3&=a_1+a_2+a_3\\&=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)\\&=3a_1+3d\\&=3\times9+3d\end{aligned}$$

즉, $27+3d=21$, $d=-2$

$$\begin{aligned}S_k&=\frac{k\{2\times9+(k-1)\times(-2)\}}{2}\\&=-k^2+10k\end{aligned}$$

$S_k<0$에서 $-k^2+10k<0$, $k(k-10)>0$

$k<0$ 또는 $k>10$

k는 자연수이므로 k의 최솟값은 11이다.

답 ②

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$S_{10}-2S_7=3-S_4$에서

$$\frac{10(2a_1+9d)}{2}-2\times\frac{7(2a_1+6d)}{2}=3-\frac{4(2a_1+3d)}{2}$$

$(10a_1+45d)-(14a_1+42d)=3-(4a_1+6d)$

$9d=3$, $d=\frac{1}{3}$

따라서 $a_{16}-a_1=(a_1+15d)-a_1=15d=15\times\frac{1}{3}=5$

답 5

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$S_{10}-2S_7=3-S_4$에서 $S_{10}-S_7=3+S_7-S_4$

$a_{10}+a_9+a_8=3+a_7+a_6+a_5$

$(a_{10}-a_7)+(a_9-a_6)+(a_8-a_5)=3$

$3d+3d+3d=3$, $9d=3$

이므로 $d=\frac{1}{3}$

따라서 $a_{16}-a_1=15d=15\times\frac{1}{3}=5$

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$2a_2=3a_4$에서

$2a_1r=3a_1r^3$

$r^2=\frac{2}{3}$

따라서 $a_5=a_1r^4=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=12$

답 ②

8 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 세 수 a_1, a_2, a_6이 서로 다르므로 $d\neq0$이고, 세 수 a_1, a_2, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2{}^2=a_1a_6$

즉, $(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$

$a_1=1$이므로

$(1+d)^2=1\times(1+5d)$

$1+2d+d^2=1+5d$

$d^2-3d=0$

$d\neq0$이므로 $d=3$

따라서 $a_3=a_1+2d=1+2\times3=7$

답 ①

9 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 r라 하면 $r>0$이다.

$a_1-a_2=2a_3$에서

$a_1-a_1r=2a_1r^2$

$a_1>0$이므로

$1-r=2r^2$, $2r^2+r-1=0$

$(2r-1)(r+1)=0$

$r=-1$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

$a_1=64$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=64\times\frac{2^7-1}{2^6}=2^7-1=127$$

답 ⑤

10 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$S_4=5S_2$에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=5(a_1+a_2)$

$a_1(1+r+r^2+r^3)=5a_1(1+r)$

$a_1(1+r)(1+r^2)=5a_1(1+r)$

$a_1(1+r)(r^2-4)=0$

$a_1=0$이면 모든 항이 0으로 같아지므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

즉, $r=-1$ 또는 $r^2=4$

$r=-1$이면 $a_1=a_3=a_5=\cdots$, $a_2=a_4=a_6=\cdots$이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

$r^2=4$, 즉 $r=-2$ 또는 $r=2$이면 모든 항은 서로 다르다.

따라서 $r\neq1$이므로

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{\frac{a_1(r^8-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}}=\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1}$$

$=r^4+1=(r^2)^2+1$

$=4^2+1=17$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 80~82쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 10	5 ②
6 ④	7 ③	8 ④	9 20	10 ②
11 86	12 ③	13 ①	14 ⑤	

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하자.

$a_1=12$이므로 $a_2=a_3+|a_5|$에서

$12+d=12+2d+|12+4d|$

$|12+4d|=-d$

(i) $12+4d\geq0$이면

$12+4d=-d$에서 $d=-\frac{12}{5}$

(ii) $12+4d<0$이면

$12+4d=d$에서 $d=-4$

d는 정수이므로 $d=-4$

따라서 $a_6=a_1+5d=12+5\times(-4)=-8$

답 ③

2 첫째항이 정수이고 공차가 3이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

$a_5=a_4+3$, $a_4a_5<0$이므로

$a_4(a_4+3)<0$

$-3<a_4<0$

따라서 $a_4=-2$ 또는 $a_4=-1$

(i) $a_4=-2$, $a_5=1$인 경우

$a_4=a_1+3\times3=-2$, $a_1=-11$

이때 $\frac{a_1}{a_4}=\frac{-11}{-2}=\frac{11}{2}$이므로 $\frac{a_1}{a_4}$의 값은 자연수가 아니다.

(ii) $a_4=-1$, $a_5=2$인 경우

$a_4=a_1+3\times3=-1$, $a_1=-10$

이므로 $\frac{a_1}{a_4}=\frac{-10}{-1}=10$

이때 $a_{10}=-10+9\times3=17$

(i), (ii)로부터 $a_{10}=17$

답 ⑤

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공차가 d이므로
$a_n=1+(n-1)d$
세 수 a_2, a_2a_3, a_k가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a_2a_3=a_2+a_k$
$2(1+d)(1+2d)=(1+d)+\{1+(k-1)d\}$
$4d^2+6d+2=kd+2$
$4d^2+(6-k)d=0$
$d(4d+6-k)=0$
$d\neq0$이므로 $4d+6-k=0$
즉, $k=4d+6$
k는 100보다 작은 자연수이므로
$4d+6<100$, $d<\dfrac{47}{2}$
d는 자연수이므로 d의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 23이다.
따라서 순서쌍 (d, k)는 (1, 10), (2, 14), (3, 18), $\cdots$, (23, 98)이고, 그 개수는 23이다.

답 ④

4 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, e라 하면
$a_n=a_1+(n-1)d$, $b_n=b_1+(n-1)e$
이때
$$a_n+b_n=\{a_1+(n-1)d\}+\{b_1+(n-1)e\}$$
$$=(d+e)n+(a_1+b_1-d-e)$$
이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1이고 공차가 $d+e$인 등차수열이다.
또한 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=3n-2$이므로 등차수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3이다.
즉, $a_1+b_1=1$, $d+e=3$ ⋯⋯ ㉠
한편, $a_4-b_4=a_3-b_3$에서
$a_4-a_3=b_4-b_3$이므로 $d=e$
$e=d$를 ㉠의 $d+e=3$에 대입하면
$d+d=3$, $d=\dfrac{3}{2}$
따라서
$$a_3+b_5=(a_1+2d)+(b_1+4e)$$
$$=(a_1+b_1)+(2d+4e)$$
$$=(a_1+b_1)+6d$$
$$=1+6\times\frac{3}{2}=10$$

답 10

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 양수이므로 공차를 d라 하면 $a_1>0$, $d>0$이다.
$$S_5-S_2=a_3+a_4+a_5$$
$$=(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)$$
$$=3a_1+9d$$
$$\frac{S_7+6a_1}{S_5-S_2}=\frac{\dfrac{7(2a_1+6d)}{2}+6a_1}{3a_1+9d}$$
$$=\frac{13a_1+21d}{3a_1+9d}$$
$\dfrac{S_7+6a_1}{S_5-S_2}=4$이므로
$\dfrac{13a_1+21d}{3a_1+9d}=4$
$13a_1+21d=12a_1+36d$
$a_1=15d$
따라서
$\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{15d+3d}{15d}=\dfrac{18}{15}=\dfrac{6}{5}$

답 ②

6 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+|S_n-20|=20$에서
$|S_n-20|=-(S_n-20)$ ⋯⋯ ㉠
㉠은 $S_n-20\le0$일 때 성립하므로
모든 자연수 n에 대하여 $S_n\le20$ ⋯⋯ ㉡
$a_1=10$이므로 $d\ge0$이면 ㉡을 만족시키지 못한다.
따라서 $d<0$
다음은 음의 정수인 공차 d에 대한 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항을 나타낸 표이다.

d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
-1	10	9	8	7	6	$\cdots$
-2	10	8	6	4	2	$\cdots$
-3	10	7	4	1	-2	$\cdots$
-4	10	6	2	-2	-6	$\cdots$
-5	10	5	0	-5	-10	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$-3\le d\le-1$일 때, $S_4\ge22$이므로 ㉡을 만족시키지 못한다.
$d\le-4$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\le18$
이므로 ㉡을 만족시키는 정수 d의 최댓값은 -4이다.

답 ④

7 $S_{2n}-S_{2n-1}=4n+3$에서
$a_{2n}=4n+3$ ⋯⋯ ㉠
㉠에 $n=1$과 $n=2$를 각각 대입하면
$a_2=4\times1+3=7$, $a_4=4\times2+3=11$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d$이므로

$11-7=2d$, $d=2$

$a_2=a_1+d=a_1+2=7$

이므로 $a_1=5$

이때 $a_n=5+(n-1)\times 2=2n+3$이므로

$a_7=2\times 7+3=17$

$a_{10}=2\times 10+3=23$

$a_{18}=2\times 18+3=39$

따라서

$(a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18})-(a_1+a_3+a_5+a_7)$

$=\dfrac{5(a_{10}+a_{18})}{2}-\dfrac{4(a_1+a_7)}{2}$

$=\dfrac{5(23+39)}{2}-\dfrac{4(5+17)}{2}$

$=111$

답 ③

다른 풀이

$S_{2n}-S_{2n-1}=4n+3$에서

$a_{2n}=4n+3$ …… ㉠

a_{14}는 a_{10}과 a_{18}의 등차중항이므로

$a_{10}+a_{18}=2a_{14}$

마찬가지로 $a_{12}+a_{16}=2a_{14}$

또 a_4는 a_1과 a_7의 등차중항이므로

$a_1+a_7=2a_4$

마찬가지로 $a_3+a_5=2a_4$

따라서

$(a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18})-(a_1+a_3+a_5+a_7)$

$=\{(a_{10}+a_{18})+(a_{12}+a_{16})+a_{14}\}$

$-\{(a_1+a_7)+(a_3+a_5)\}$

$=(2a_{14}+2a_{14}+a_{14})-(2a_4+2a_4)$

$=5a_{14}-4a_4$

㉠에 $n=2$와 $n=7$을 각각 대입하면

$a_4=4\times 2+3=11$, $a_{14}=4\times 7+3=31$

이므로

$5a_{14}-4a_4=5\times 31-4\times 11=111$

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_3+a_4=r(a_2+a_3)=5r$,

$a_4+a_5=r^2(a_2+a_3)=5r^2$

이므로 $a_4+a_5=2(a_3+a_4)+40$에서

$5r^2=2\times 5r+40$

$r^2-2r-8=0$

$(r+2)(r-4)=0$

$r=-2$ 또는 $r=4$

$r>0$이므로 $r=4$

$a_2+a_3=5$이므로

$a_2+a_3=r(a_1+a_2)=4(a_1+a_2)$에서

$4(a_1+a_2)=5$

따라서 $a_1+a_2=\dfrac{5}{4}$

답 ④

9 조건 (가)에서 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_1>0$, $b_1>0$이다.

또 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 b_1, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 a_1이므로

$a_1=b_3$에서 $a_1=b_1\times a_1^2$ …… ㉠

$a_5=b_4$에서 $a_1+4b_1=b_1\times a_1^3$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$4b_1=a_1^2b_1(a_1-1)$

$b_1>0$이므로

$4=a_1^2(a_1-1)$

$a_1^3-a_1^2-4=0$

$(a_1-2)(a_1^2+a_1+2)=0$

$a_1>0$, $a_1^2+a_1+2\neq 0$이므로 $a_1=2$

$a_1=2$를 ㉠에 대입하면

$2=4b_1$, $b_1=\dfrac{1}{2}$

따라서

$a_2b_5=(a_1+b_1)(b_1\times a_1^4)$

$=\left(2+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\times 2^4\right)$

$=\dfrac{5}{2}\times 8=20$

답 20

10 세 수 a, b, 2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a\times 2=b^2$ …… ㉠

세 수 $\dfrac{a}{64}$, $\dfrac{5}{16}$, $\dfrac{b}{8}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\dfrac{a}{64}+\dfrac{b}{8}=2\times\dfrac{5}{16}$

$a+8b=40$

$a=40-8b$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2(40-8b)=b^2$

$b^2+16b-80=0$

$(b+20)(b-4)=0$

$b=-20$ 또는 $b=4$

$b>0$이므로 $b=4$

따라서 $a=40-8\times4=8$이므로

$a+b=8+4=12$

답 ②

11 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$ 이고, 공비가 각각 r, r^3 $(r\neq1)$이므로

$S_{30}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$

$T_{10}=\dfrac{a\{(r^3)^{10}-1\}}{r^3-1}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r^3-1}$

$S_{30}=21T_{10}$에서

$\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\dfrac{21a(r^{30}-1)}{r^3-1}$

$r^3-1=21(r-1)$

$(r-1)(r^2+r+1)=21(r-1)$

$r\neq1$이므로 $r^2+r+1=21$

$r^2+r-20=0$

$(r+5)(r-4)=0$

$r=-5$ 또는 $r=4$

$r>0$이므로 $r=4$

$\dfrac{T_2}{S_3}=\dfrac{b_1+b_2}{a_1+a_2+a_3}$

$=\dfrac{a(1+4^3)}{a(1+4+4^2)}$

$=\dfrac{65}{21}$

따라서 $p=21$, $q=65$이므로

$p+q=21+65=86$

답 86

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1=2$이므로 $a_3=4$에서

$a_3=2r^2=4$

$r^2=2$

한편, 자연수 k에 대하여 a_{k+1}은 a_k와 a_{k+2}의 등비중항이므로

$a_{k+1}{}^2=a_ka_{k+2}=a_1r^{k-1}\times a_1r^{k+1}=a_1{}^2r^{2k}$

이때 수열 $\{a_{n+1}{}^2\}$은 첫째항이 $a_2{}^2$, 공비가 r^2인 등비수열이고,

$a_2{}^2=a_1{}^2r^2=2^2\times2=8$이므로

$a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+a_4a_6+a_5a_7$

$=a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2$

$=\dfrac{a_2{}^2\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}$

$=\dfrac{8(2^5-1)}{2-1}$

$=248$

답 ③

13 $|a_2|+|a_3|+2a_2+a_3=|a_3-4|$ ...... ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq-1)$이라 하자.

$r=0$이면 $a_2=a_3=0$이므로 ㉠에서 $0=4$가 되어 모순이다.

따라서 $r\neq0$이다.

(i) $r<0$ $(r\neq-1)$이면 $a_2>0$, $a_3<0$이므로 등식 ㉠은

$a_2-a_3+2a_2+a_3=-(a_3-4)$

$3a_2=-a_3+4$

$a_1=-2$이므로

$3\times(-2)\times r=-(-2)\times r^2+4$

$r^2+3r+2=0$

$(r+1)(r+2)=0$

$r=-2$ 또는 $r=-1$

$r\neq-1$이므로 $r=-2$

(ii) $r>0$이면 $a_2<0$, $a_3<0$이므로 등식 ㉠은

$-a_2-a_3+2a_2+a_3=-(a_3-4)$

$a_2=-a_3+4$

$a_1=-2$이므로

$-2r=-(-2)\times r^2+4$

$r^2+r+2=0$ ...... ㉡

$r>0$이므로 ㉡을 만족시키는 실수 r의 값은 없다.

(i), (ii)로부터 $r=-2$이다.

이때 $a_n=(-2)\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$

이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\dfrac{-2\{(-2)^7-1\}}{(-2)-1}$

$=\dfrac{(-2)^8+2}{-3}$

$=\dfrac{256+2}{-3}$

$=-86$

답 ①

14 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_1>0$이고, 공비를 r라 하면 $r>0$이다.

$r=1$이면 $S_3=3a_1$, $S_6=6a_1$이므로 $S_6=4S_3$을 만족시키지 못한다.

즉, $r\neq1$이므로

$S_3=\dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1}$ …… ㉠

$S_6=\dfrac{a_1(r^6-1)}{r-1}$ …… ㉡

$S_6=4S_3$에서 $\dfrac{S_6}{S_3}=4$이므로

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{r^6-1}{r^3-1}$

$=\dfrac{(r^3-1)(r^3+1)}{r^3-1}$

$=r^3+1=4$

$r^3=3$

$r>0$이므로 $r=3^{\frac{1}{3}}$

$\dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{\dfrac{a_1(r^{2m}-1)}{r-1}}{\dfrac{a_1(r^m-1)}{r-1}}$

$=\dfrac{r^{2m}-1}{r^m-1}$

$=\dfrac{(r^m-1)(r^m+1)}{r^m-1}$

$=r^m+1$

$=3^{\frac{m}{3}}+1$

$\dfrac{S_{2m}}{S_m}$의 값이 정수가 되기 위해서는 자연수 m이 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 구하는 30 이하의 모든 자연수 m은 3, 6, 9, …, 30이고, 그 합은

$3+6+9+\cdots+30=\dfrac{10(3+30)}{2}=165$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 83쪽

1 ③ **2** 35 **3** ③

1 첫째항이 -12이고 공차 d가 자연수이므로

$a_1<a_2<a_3<\cdots$

$|a_l|=|a_m|$을 만족시키는 l, m $(l<m)$이 존재하기 위해서는

$a_l<0<a_m$이고 $a_l=-a_m$

이어야 한다.

$a_l=-a_m$에서

$-12+(l-1)\times d=-\{-12+(m-1)\times d\}$

$d(l+m-2)=24$ …… ㉠

d, $l+m-2$는 모두 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 d, $l+m-2$는 24의 양의 약수이다.

$24=1\times24=2\times12=3\times8=4\times6$

이므로 순서쌍 $(d,\ l+m-2)$는 (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)이다.

$d=1$, $l+m-2=24$인 경우

$l+m=26$ $(l<m)$이므로 순서쌍 $(l,\ m)$은

(1, 25), (2, 24), (3, 23), …, (12, 14)이고, 그 개수는 12이다.

$d=2$, $l+m-2=12$인 경우

$l+m=14$ $(l<m)$이므로 순서쌍 $(l,\ m)$은

(1, 13), (2, 12), (3, 11), …, (6, 8)이고, 그 개수는 6이다.

마찬가지로 나머지 경우도 생각하면 다음 표와 같다.

d	$l+m$	순서쌍 (l, m)의 개수
1	26	12
2	14	6
3	10	4
4	8	3
6	6	2
8	5	2
12	4	1
24	3	1

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(d,\ l,\ m)$의 개수는

$12+6+4+3+2+2+1+1=31$

답 ③

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d $(3<d<30)$이고 첫째항이

-30이므로

$a_1 < a_k < 0 \le a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots$

을 만족시키는 자연수 k $(k \ge 2)$가 존재하고, S_n의 최솟값은 S_k이다. 이때

$S_k \le S_{k+1} < 0$

이고, $S_{k+1} < 0 \le S_p < S_{p+1} < \cdots$

을 만족시키는 자연수 p가 존재하므로

$|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$을 만족시키는 서로 다른 세 자연수 l, $l+7$, m $(m > l+7)$이 존재하기 위해서는

$l < k < l+7 < p < m$

즉, $S_l < 0$, $S_{l+7} < 0$, $S_m > 0$

이어야 하므로

$S_l = S_{l+7} = -S_m$

$S_l = S_{l+7}$에서

$\dfrac{l\{-60+(l-1)d\}}{2} = \dfrac{(l+7)\{-60+(l+6)d\}}{2}$

$dl^2 - dl - 60l = dl^2 + 13dl - 60l + 42d - 420$

$14dl + 42d = 420$

$d(l+3) = 30$

이므로 d와 $l+3$은 30의 양의 약수이다.

d는 3보다 크고 30보다 작은 자연수이고, $l+3$은 3보다 크므로

$d=5$, $l+3=6$ 또는 $d=6$, $l+3=5$

(i) $d=5$, $l+3=6$일 때

$l=3$이므로

$S_3 = \dfrac{3(-60+2\times5)}{2} = -75$

이때 $S_m = 75$이어야 하므로

$S_m = \dfrac{m\{-60+(m-1)\times5\}}{2}$

$= \dfrac{5m^2-65m}{2} = 75$

$5m^2 - 65m - 150 = 0$

$m^2 - 13m - 30 = 0$

$(m+2)(m-15) = 0$

$m = -2$ 또는 $m = 15$

m은 자연수이므로 $m = 15$

(ii) $d=6$, $l+3=5$일 때

$l=2$이므로

$S_2 = \dfrac{2(-60+1\times6)}{2} = -54$

이때 $S_m = 54$이어야 하므로

$S_m = \dfrac{m\{-60+(m-1)\times6\}}{2}$

$= \dfrac{6m^2-66m}{2} = 54$

$6m^2 - 66m - 108 = 0$

$m^2 - 11m - 18 = 0$ …… ㉠

방정식 ㉠을 만족시키는 자연수 m은 없다.

(i), (ii)에서 $d=5$, $l=3$, $l+7=10$, $m=15$이므로

$a_l = a_3 = -30 + (3-1)\times5 = -20$

$a_{l+7} = a_{10} = -30 + (10-1)\times5 = 15$

$a_m = a_{15} = -30 + (15-1)\times5 = 40$

따라서

$a_l + a_{l+7} + a_m = -20 + 15 + 40 = 35$

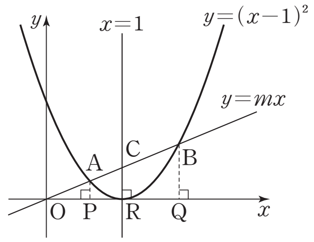
답 35

3 ㄱ. 세 수 $c-a$, a, $b-c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a는 $c-a$와 $b-c$의 등차중항이다.

즉, $2a = (c-a) + (b-c)$이므로

$b = 3a$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 $(1, 0)$을 R라 하자.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식

$(x-1)^2 = mx$, 즉 $x^2 - (m+2)x + 1 = 0$

의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = m+2$, $\alpha\beta = 1$ …… ㉠

세 직각삼각형 OPA, ORC, OQB는 서로 닮음이므로 양의 실수 t에 대하여

$a = \overline{OA} = \overline{OP}t$, $c = \overline{OC} = \overline{OR}t$, $b = \overline{OB} = \overline{OQ}t$

로 놓으면 $\overline{OP} = \alpha$, $\overline{OR} = 1$, $\overline{OQ} = \beta$이므로

$a = \alpha t$, $c = t$, $b = \beta t$

이때 $c^2 = t^2$이고, ㉠에서 $\alpha\beta = 1$이므로

$ab = \alpha t \times \beta t = \alpha\beta t^2 = t^2$

즉, $c^2 = ab$

따라서 세 수 a, c, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $b=3a$이고, ㄴ에서 $a=\alpha t$, $b=\beta t$이므로

$\beta t=3\times\alpha t$, $\beta=3\alpha$

$\beta=3\alpha$를 ㉠의 $\alpha\beta=1$에 대입하면

$\alpha\times3\alpha=1$, $\alpha^2=\dfrac{1}{3}$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $\beta=3\alpha=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

㉠에서 $\alpha+\beta=m+2$이므로

$m+2=\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 $(m+2)^2=\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{16}{3}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 87~97쪽

1 ②	2 15	3 ③	4 ①	5 ④
6 2	7 ⑤	8 ②	9 12	10 5
11 ②				

1 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)=20$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}2=\sum_{k=1}^{5}a_k+2\times5=20$

이므로 $\sum_{k=1}^{5}a_k=10$

$\sum_{k=1}^{5}(b_k-1)=3$에서

$\sum_{k=1}^{5}b_k-\sum_{k=1}^{5}1=\sum_{k=1}^{5}b_k-1\times5=3$

이므로 $\sum_{k=1}^{5}b_k=8$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_k+2b_k)&=\sum_{k=1}^{5}a_k+2\sum_{k=1}^{5}b_k\\&=10+2\times8\\&=26\end{aligned}$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k&=a_8+a_9+a_{10}\\&=(a_1+14)+(a_1+16)+(a_1+18)\\&=3a_1+48\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=51$이므로

$3a_1+48=51$

$a_1=1$

따라서 $a_8=a_1+7\times2=1+14=15$

답 15

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k&=a_8+a_9+a_{10}\\&=a_8+(a_8+2)+(a_8+4)\\&=3a_8+6\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 51$이므로

$3a_8 + 6 = 51$, $3a_8 = 45$

$a_8 = 15$

3 $\sum_{k=1}^{10} \frac{k^3-k}{k+1} + \sum_{k=1}^{10} \frac{3k^2+7k+2}{k+2}$

$= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k-1)(k+1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{10} \frac{(3k+1)(k+2)}{k+2}$

$= \sum_{k=1}^{10} (k^2-k) + \sum_{k=1}^{10} (3k+1)$

$= \sum_{k=1}^{10} (k^2+2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$

$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10$

$= 385 + 110 + 10$

$= 505$

답 ③

4 $f(x) = x^2 - nx + 2n = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} + 2n$

이때 이차함수 $f(x)$는 $x = \frac{n}{2}$에서 최솟값 $-\frac{n^2}{4} + 2n$을 가지므로

$a_n = -\frac{n^2}{4} + 2n$

따라서

$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{7} \left(-\frac{k^2}{4} + 2k\right)$

$= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{7} k^2 + 2\sum_{k=1}^{7} k$

$= -\frac{1}{4} \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 2 \times \frac{7 \times 8}{2}$

$= -35 + 56$

$= 21$

답 ①

5 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$이므로

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \sum_{k=1}^{10} \left\{\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)\right\}$

$= \frac{a}{2}\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{23}\right)\right\}$

$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{23}\right)$

$= \frac{10a}{69}$

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{10}{3}$이므로

$\frac{10a}{69} = \frac{10}{3}$

따라서 $a = 23$

답 ④

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_5 = 5d = 10$

이므로 $d = 2$

이때 $a_{k+1} - a_k = d = 2$이므로

$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})}$

$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$

$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$

$= \sum_{k=1}^{16} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{2}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + \cdots + (\sqrt{a_{17}} - \sqrt{a_{16}})\}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a_{17}} - \sqrt{a_1})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a_1 + 16d} - \sqrt{a_1})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{4 + 16 \times 2} - \sqrt{4})$

$= \frac{1}{2} \times (6 - 2)$

$= 2$

답 2

7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2 = -2$에서

$a_1 + d = -2$ …… ㉠

$a_3+a_5=12$에서

$(a_1+2d)+(a_1+4d)=12$

$a_1+3d=6$ ...... ㉡

㉡－㉠을 하면

$2d=8,\ d=4$

$d=4$를 ㉠에 대입하면

$a_1+4=-2,\ a_1=-6$

따라서 $a_9=a_1+8d=-6+8\times4=26$

답 ⑤

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$2a_4=a_3+a_5=12$에서 $a_4=6$

$a_2=-2$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d=8,\ d=4$

따라서 $a_9=a_2+7d=-2+7\times4=26$

8 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이고

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$

즉, $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

또 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_2=4$에서 $a_1r=4$ ...... ㉠

$a_3a_5=1$에서 $a_1r^2\times a_1r^4=1$

$(a_1r^3)^2=1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(4r^2)^2=1,\ r^4=\dfrac{1}{16}$

$r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$a_1\times\dfrac{1}{2}=4,\ a_1=8$

따라서 $a_5=a_1r^4=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{2}$

답 ②

9 $(n^2+n)a_{n+1}=(n+2)a_n$에서

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n^2+n}a_n$이므로

$a_2=\dfrac{1+2}{1^2+1}a_1=\dfrac{3}{2}a_1$

$a_3=\dfrac{2+2}{2^2+2}a_2=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{2}a_1=a_1$

$a_4=\dfrac{3+2}{3^2+3}a_3=\dfrac{5}{12}\times a_1=\dfrac{5}{12}a_1$

$a_5=\dfrac{4+2}{4^2+4}a_4=\dfrac{6}{20}\times\dfrac{5}{12}a_1=\dfrac{1}{8}a_1$

따라서 $\dfrac{a_2}{a_5}=\dfrac{\frac{3}{2}a_1}{\frac{1}{8}a_1}=12$

답 12

다른 풀이

$(n^2+n)a_{n+1}=(n+2)a_n$에서

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{n^2+n}{n+2}=\dfrac{n(n+1)}{n+2}$이므로

$\dfrac{a_2}{a_5}=\dfrac{a_2}{a_3}\times\dfrac{a_3}{a_4}\times\dfrac{a_4}{a_5}=\dfrac{2\times3}{4}\times\dfrac{3\times4}{5}\times\dfrac{4\times5}{6}=12$

10 $2a_{n+1}=a_n{}^2-3a_n$에서

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n{}^2-3a_n)$이고, $a_1=1$이므로

$a_2=\dfrac{1}{2}(a_1{}^2-3a_1)=\dfrac{1}{2}(1^2-3\times1)=-1$

$a_3=\dfrac{1}{2}(a_2{}^2-3a_2)=\dfrac{1}{2}\{(-1)^2-3\times(-1)\}=2$

$a_4=\dfrac{1}{2}(a_3{}^2-3a_3)=\dfrac{1}{2}(2^2-3\times2)=-1$

$a_5=\dfrac{1}{2}(a_4{}^2-3a_4)=\dfrac{1}{2}\{(-1)^2-3\times(-1)\}=2$

$a_6=\dfrac{1}{2}(a_5{}^2-3a_5)=\dfrac{1}{2}(2^2-3\times2)=-1$

$a_7=\dfrac{1}{2}(a_6{}^2-3a_6)=\dfrac{1}{2}\{(-1)^2-3\times(-1)\}=2$

$a_8=\dfrac{1}{2}(a_7{}^2-3a_7)=\dfrac{1}{2}(2^2-3\times2)=-1$

⋮

이므로

$\sum_{k=1}^{2}a_k=a_1+a_2=1+(-1)=0$

$\sum_{k=1}^{3}a_k=\sum_{k=1}^{2}a_k+a_3=0+2=2$

$\sum_{k=1}^{4}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k+a_4=2+(-1)=1$

$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{4}a_k+a_5=1+2=3$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k+a_6=3+(-1)=2$

$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{6}a_k+a_7=2+2=4$

$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{7} a_k + a_8 = 4 + (-1) = 3$

$\vdots$

따라서 구하는 m의 최솟값은 5이다.

답 5

11 (ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}=\boxed{\frac{9}{16}}$, (우변)$=1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$이므로

$(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m\ (m\ge 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{k^2}} < 1-\frac{1}{2^{m^2}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^{k^2}} &< 1-\frac{1}{2^{m^2}}+\frac{1}{2^{(m+1)^2}}\\ &=1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\left\{\frac{1}{2^{(m+1)^2}}-\frac{1}{2^{m^2}}+\frac{1}{2^{(m+1)^2}}\right\}\\ &=1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\left\{\frac{2}{2^{(m+1)^2}}-\frac{1}{2^{m^2}}\right\}\\ &=1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\left\{\boxed{\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}-\frac{1}{2^{m^2}}}\right\} \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

2 이상인 모든 자연수 m에 대하여

$(m+1)^2-1=m^2+2m>m^2$이므로

$$\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}<\frac{1}{2^{m^2}}$$

즉, $\boxed{\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}-\frac{1}{2^{m^2}}}<0$이므로

$$1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\left\{\boxed{\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}-\frac{1}{2^{m^2}}}\right\}<1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^{k^2}} &< 1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\left\{\boxed{\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}-\frac{1}{2^{m^2}}}\right\}\\ &<1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $a=\frac{9}{16}$, $f(m)=\frac{1}{2^{(m+1)^2-1}}-\frac{1}{2^{m^2}}$이므로

$$\frac{af(2)}{f(3)}=\frac{\frac{9}{16}\times\left(\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^4}\right)}{\frac{1}{2^{15}}-\frac{1}{2^9}}=\frac{9}{16}\times\frac{2^{15}}{2^8}\times\frac{1-2^4}{1-2^6}=\frac{120}{7}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ①	2 ③	3 31	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 10	8 ②	9 ③	10 ①

1 $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}+2)=\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{10}2$

$=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+2\times 10$

$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}+2)=40$이므로

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+20=40$

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}=20 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=15 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠－㉡을 하면

$a_{11}-a_1=20-15=5$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_5-a_3=4$에서 $2d=4$, $d=2$

$a_1=-3$, $d=2$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-3+(n-1)\times 2=2n-5$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(2k-5)\\ &=2\times\frac{10\times 11}{2}-5\times 10\\ &=60\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_5-a_3=4$에서 $2d=4$, $d=2$

$a_1=-3$, $d=2$이고 $\sum_{k=1}^{10}a_k$는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\{2\times(-3)+(10-1)\times 2\}}{2}=60$$

3 $\sum_{k=1}^{7}a_k=8$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}a_k(a_k-3)&=\sum_{k=1}^{7}{a_k}^2-3\sum_{k=1}^{7}a_k\\ &=\sum_{k=1}^{7}{a_k}^2-3\times 8\\ &=\sum_{k=1}^{7}{a_k}^2-24\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{7} a_k(a_k-3)=7$이므로

$\sum_{k=1}^{7} a_k^2-24=7$

따라서 $\sum_{k=1}^{7} a_k^2=31$

답 31

4 $\sum_{k=1}^{5} a_k=7$이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+3b_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k+3\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=2\times7+3\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=14+3\sum_{k=1}^{5}b_k$

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+3b_k)=26$이므로

$14+3\sum_{k=1}^{5}b_k=26$, $3\sum_{k=1}^{5}b_k=12$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k=4$

답 ②

5 a_{2k+1}은 a_{2k}와 a_{2k+2}의 등차중항이므로

$a_{2k}+a_{2k+2}=2a_{2k+1}$

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k}+a_{2k+2})=\sum_{k=1}^{5}2a_{2k+1}$

$=2\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k}+a_{2k+2})=104$이므로

$2\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=104$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=52$

답 ⑤

6 $\sum_{k=1}^{7}(ak^2+2k)=a\sum_{k=1}^{7}k^2+2\sum_{k=1}^{7}k$

$=a\times\frac{7\times8\times15}{6}+2\times\frac{7\times8}{2}$

$=140a+56$

$\sum_{k=1}^{7}(ak^2+2k)=96$이므로

$140a+56=96$, $140a=40$

따라서 $a=\frac{2}{7}$

답 ①

7 $\sum_{k=1}^{6}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_7-a_6)$

$=a_7-a_1$

$\sum_{k=1}^{6}(a_{k+1}-a_k)=12$이므로

$a_7-a_1=12$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{2}(a_{k+1}-a_k)=4$이므로

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)=4$

$a_3-a_1=4$

$a_3=2$이므로

$2-a_1=4$, $a_1=-2$

$a_1=-2$를 ㉠에 대입하면

$a_7-(-2)=12$

따라서 $a_7=10$

답 10

8 $\frac{1}{\sqrt{5k+4}+\sqrt{5k-1}}$

$=\frac{\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1}}{(\sqrt{5k+4}+\sqrt{5k-1})(\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1})}$

$=\frac{\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1}}{(5k+4)-(5k-1)}$

$=\frac{\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1}}{5}$

이므로

$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{5k+4}+\sqrt{5k-1}}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1}}{5}$

$=\frac{1}{5}\{(\sqrt{9}-\sqrt{4})+(\sqrt{14}-\sqrt{9})+(\sqrt{19}-\sqrt{14})$

$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{44})\}$

$=\frac{1}{5}(7-2)$

$=1$

답 ②

9 $a_{n+1}+2a_n=n^2$에서

$a_{n+1}=n^2-2a_n$이므로

$a_2=1-2a_1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_3=2^2-2a_2=4-2(1-2a_1)=2+4a_1$

$a_4=3^2-2a_3=9-2(2+4a_1)=5-8a_1$

$a_5=4^2-2a_4=16-2(5-8a_1)=6+16a_1$

$a_5=4a_1$이므로

$4a_1=6+16a_1$

$12a_1=-6$

$a_1=-\frac{1}{2}$

$a_1=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$a_2=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

답 ③

10 $a_1=k$라 하자.

$a_2=-a_1+5=-k+5$

$a_3=3a_2=3\times(-k+5)=-3k+15$

$a_4=-a_3+5=-(-3k+15)+5=3k-10$

$a_5=3a_4=3\times(3k-10)=9k-30$

$a_6=-a_5+5=-(9k-30)+5=-9k+35$

$a_6=8$이므로

$-9k+35=8$, $9k=27$

따라서 $a_1=k=3$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 100~101쪽

1 ②	2 ①	3 ①	4 ②	5 350
6 ④	7 9	8 ⑤		

1 x에 대한 이차방정식 $x^2-2nx+2n-3=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n$, $\alpha_n\beta_n=2n-3$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{7}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)&=\sum_{n=1}^{7}\{(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n\}\\&=\sum_{n=1}^{7}\{(2n)^2-2(2n-3)\}\\&=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-4n+6)\\&=4\sum_{n=1}^{7}n^2-4\sum_{n=1}^{7}n+\sum_{n=1}^{7}6\\&=4\times\frac{7\times8\times15}{6}-4\times\frac{7\times8}{2}+6\times7\\&=560-112+42=490\end{aligned}$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1=2$이므로 $a_2+a_3=10$에서

$(2+d)+(2+2d)=10$

$3d=6$, $d=2$

이때 $S_n=\frac{n\{4+(n-1)\times2\}}{2}=n(n+1)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{S_k}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{k(k+1)}\\&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\\&=\frac{2m}{m+1}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{S_k}=\frac{7}{4}$이므로

$\frac{2m}{m+1}=\frac{7}{4}$

$8m=7(m+1)$

$m=7$

따라서 $a_7=2+6\times2=14$

답 ①

3 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=3^n-2$ ...... ㉠

이므로 $n\ge2$인 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=3^{n-1}-2$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=(3^n-2)-(3^{n-1}-2)=2\times3^{n-1}$

즉, $a_n=2\times3^{n-1}$ $(n\ge2)$

이때 $a_{2n}=2\times3^{2n-1}$ $(n\ge1)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}a_{2k}&=\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{2k-1})\\&=\frac{6\{(3^2)^5-1\}}{3^2-1}\\&=\frac{3^{11}-3}{4}\end{aligned}$$

답 ①

4 $a_1=\frac{1}{3}$이므로

$\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{2k-1}{a_k}-\frac{2k+1}{a_{k+1}}\right)$
$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{3}{a_2}\right)+\left(\frac{3}{a_2}-\frac{5}{a_3}\right)+\left(\frac{5}{a_3}-\frac{7}{a_4}\right)+\left(\frac{7}{a_4}-\frac{9}{a_5}\right)$
$=\frac{1}{a_1}-\frac{9}{a_5}$
$=3-\frac{9}{a_5}$

한편,

$\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{2k-1}{a_k}-\frac{2k+1}{a_{k+1}}\right)=-2\times4^2-3\times4+2=-42$

이므로

$3-\frac{9}{a_5}=-42$, $\frac{9}{a_5}=45$

따라서 $a_5=\frac{1}{5}$

답 ②

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$a_{2k}-a_{2k-1}=3$

이때

$a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2=(a_{2k}-a_{2k-1})(a_{2k}+a_{2k-1})$
$=3(a_{2k}+a_{2k-1})$ ...... ㉠

또 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+10}=a_n+10\times3$

이므로

$\sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_k+30)=\sum_{k=1}^{10}a_k+30\times10$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=11}^{20}a_k-300$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2)$
$=3\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k-1})$
$=3\{(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+(a_6+a_5)+\cdots+(a_{20}+a_{19})\}$
$=3\left(\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{20}a_k\right)$
$=3\left\{\left(\sum_{k=11}^{20}a_k-300\right)+\sum_{k=11}^{20}a_k\right\}$
$=6\sum_{k=11}^{20}a_k-900$

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2)=1200$이므로

$6\sum_{k=11}^{20}a_k-900=1200$, $6\sum_{k=11}^{20}a_k=2100$

따라서 $\sum_{k=11}^{20}a_k=350$

답 350

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$a_{2k}-a_{2k-1}=3$

이때

$a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2=(a_{2k}-a_{2k-1})(a_{2k}+a_{2k-1})$
$=3(a_{2k}+a_{2k-1})$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2)$
$=3\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k-1})$
$=3\sum_{k=1}^{20}a_k$
$=3\times\frac{20\times(2a_1+19\times3)}{2}$
$=60a_1+1710$

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2)=1200$이므로

$60a_1+1710=1200$

$a_1=-\frac{17}{2}$

따라서

$a_{11}=-\frac{17}{2}+10\times3=\frac{43}{2}$, $a_{20}=-\frac{17}{2}+19\times3=\frac{97}{2}$

이므로 $\sum_{k=11}^{20}a_k=\frac{10(a_{11}+a_{20})}{2}=\frac{10\times\left(\frac{43}{2}+\frac{97}{2}\right)}{2}=350$

6 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$a_2=-(2a_1+3)=-2a_1-3$
$a_3=2a_2+3=2(-2a_1-3)+3=-4a_1-3$
$a_4=a_3-2=(-4a_1-3)-2=-4a_1-5$
$a_5=2a_4+3=2(-4a_1-5)+3=-8a_1-7$
$a_6=-(2a_5+3)=-\{2(-8a_1-7)+3\}=16a_1+11$
$a_7=a_6-2=(16a_1+11)-2=16a_1+9$

$a_3=a_7$이므로

$-4a_1-3=16a_1+9$

$20a_1=-12$

$a_1=-\frac{3}{5}$

답 ④

7 (i) a_1이 3 이상의 홀수일 때

$a_2=a_1-1$이므로 a_2는 짝수이다.

$a_3=a_2+3=(a_1-1)+3=a_1+2$이므로

a_3은 홀수이다.

$a_4=a_3-1=(a_1+2)-1=a_1+1$이므로
a_4는 짝수이다.
$a_5=a_4+3=(a_1+1)+3=a_1+4$이므로
a_5는 홀수이다.
$a_6=a_5-1=(a_1+4)-1=a_1+3$이므로
a_6은 짝수이다.
$\vdots$
$a_{2n+2}=a_{2n}+2$이므로 $a_{10}=a_2+2\times4$이고 a_{10}은 짝수이다.
$a_{10}=12$이므로 $(a_1-1)+8=12$
$a_1=5$

(ii) a_1이 3 이상의 짝수일 때
$a_2=a_1+3$이므로 a_2는 홀수이다.
$a_3=a_2-1=(a_1+3)-1=a_1+2$이므로
a_3은 짝수이다.
$a_4=a_3+3=(a_1+2)+3=a_1+5$이므로
a_4는 홀수이다.
$a_5=a_4-1=(a_1+5)-1=a_1+4$이므로
a_5는 짝수이다.
$\vdots$
a_{2n}은 홀수이므로 $a_{10}=12$라는 조건을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)로부터 $a_1=5$이고, $a_2=a_1-1=5-1=4$이므로
$a_1+a_2=5+4=9$

답 9

8 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=\dfrac{2!}{1!}=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$2\times6\times10\times\cdots\times(4k-2)=\dfrac{(2k)!}{k!}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(4k+2)$를 곱하면

$2\times6\times10\times\cdots\times(4k-2)\times(4k+2)$

$=\dfrac{(2k)!}{k!}\times(4k+2)$

$=\dfrac{\boxed{2(2k+1)!}}{k!}$

$=\dfrac{\boxed{2(2k+1)!}}{2(k+1)!}\times(\boxed{2k+2})$

$=\dfrac{(2k+2)!}{(k+1)!}$

이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.
따라서 $f(k)=2(2k+1)!$, $g(k)=2k+2$이므로

$\dfrac{10!\times g(3)}{f(4)}=\dfrac{10!\times8}{2\times9!}=40$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 102쪽

1 19	2 9	3 ③	4 ①

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_ka_{k+1}}{2k+1}=4n^2+16n$ …… ㉠

㉠에서

$\dfrac{a_7a_8}{15}=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{a_ka_{k+1}}{2k+1}-\sum_{k=1}^{6}\frac{a_ka_{k+1}}{2k+1}$
$=(4\times7^2+16\times7)-(4\times6^2+16\times6)$
$=4\times(7^2-6^2)+16\times(7-6)$
$=68$

$\dfrac{a_8a_9}{17}=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{a_ka_{k+1}}{2k+1}-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_ka_{k+1}}{2k+1}$
$=(4\times8^2+16\times8)-(4\times7^2+16\times7)$
$=4\times(8^2-7^2)+16\times(8-7)$
$=76$

이므로

$a_7a_8=68\times15$ …… ㉡
$a_8a_9=76\times17=68\times19$ …… ㉢

㉢$-$㉡을 하면
$a_8(a_9-a_7)=68\times(19-15)=68\times4$
㉢$+$㉡을 하면
$a_8(a_9+a_7)=68\times(19+15)=68\times34$

$\dfrac{a_8(a_9-a_7)}{a_8(a_9+a_7)}=\dfrac{68\times4}{68\times34}$에서

$\dfrac{a_9-a_7}{a_9+a_7}=\dfrac{2}{17}$

따라서 $p=17$, $q=2$이므로
$p+q=17+2=19$

답 19

2 $a_{n+1}=a_n^{\,2}-2a_n$ …… ㉠

㉠의 양변에 $n=4$를 대입하면
$a_5=a_4^{\,2}-2a_4$

$a_4=a_5$이므로

$a_4=a_4^2-2a_4$, $a_4^2-3a_4=0$

$a_4(a_4-3)=0$

$a_4=0$ 또는 $a_4=3$

그런데 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아닌 정수이므로

$a_4=3$

㉠의 양변에 $n=3$을 대입하면

$a_4=a_3^2-2a_3$이므로

$a_3^2-2a_3=3$, $a_3^2-2a_3-3=0$

$(a_3+1)(a_3-3)=0$

$a_3=-1$ 또는 $a_3=3$

㉠의 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_3=a_2^2-2a_2$ …… ㉡

(i) $a_3=-1$이면 ㉡에서

$a_2^2-2a_2=-1$, $a_2^2-2a_2+1=0$

$(a_2-1)^2=0$

$a_2=1$

㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1^2-2a_1$ …… ㉢

$a_2=1$을 ㉢에 대입하면

$a_1^2-2a_1=1$, $a_1^2-2a_1-1=0$

그런데 이를 만족시키는 정수 a_1은 없다.

(ii) $a_3=3$이면 ㉡에서

$a_2^2-2a_2=3$, $a_2^2-2a_2-3=0$

$(a_2+1)(a_2-3)=0$

$a_2=-1$ 또는 $a_2=3$

$a_2\neq a_3$이므로 $a_2=-1$

㉢에서

$a_1^2-2a_1=-1$, $a_1^2-2a_1+1=0$

$(a_1-1)^2=0$

$a_1=1$

(i), (ii)에서 $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=a_4=a_5=3$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k=1+(-1)+3+3+3=9$

답 9

3 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면 α_n, β_n은 x에 대한 이차방정식 $x^2=x+n$, 즉 $x^2-x-n=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\beta_n=-n$ …… ㉠

세 점 A_n, B_n, C_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로

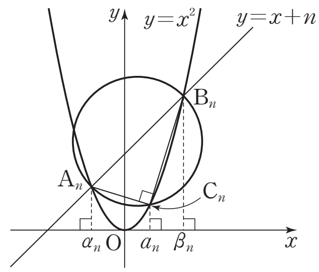
$\mathrm{A}_n(\alpha_n, \alpha_n^2)$, $\mathrm{B}_n(\beta_n, \beta_n^2)$, $\mathrm{C}_n(a_n, a_n^2)$이고

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$의 기울기는

$$\frac{a_n^2-\alpha_n^2}{a_n-\alpha_n}=\frac{(a_n+\alpha_n)(a_n-\alpha_n)}{a_n-\alpha_n}=a_n+\alpha_n$$

직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 기울기는

$$\frac{a_n^2-\beta_n^2}{a_n-\beta_n}=\frac{(a_n+\beta_n)(a_n-\beta_n)}{a_n-\beta_n}=a_n+\beta_n$$



이때 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$은 원의 지름이므로 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$과 직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$은 서로 수직이다.

즉, $(a_n+\alpha_n)(a_n+\beta_n)=-1$

$a_n^2+(\alpha_n+\beta_n)a_n+\alpha_n\beta_n=-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a_n^2+a_n-n=-1$

이므로 $a_n^2+a_n-1=n-2$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(a_n^2+a_n-1)&=\sum_{n=1}^{10}(n-2)\\&=\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}2\\&=\frac{10\times 11}{2}-2\times 10\\&=55-20=35\end{aligned}$$

답 ③

4 $a_1=5$

$a_2=a_1-1=4$

$a_3=2a_1-3=7$

$a_4=a_2-1=3$

$a_5=2a_2-3=5$

$a_6=a_3-1=6$

에서 $3\le n\le 5$일 때, $3\le a_n\le 7$ …… ㉠

$a_{2n}=a_n-1$, $a_{2n+1}=2a_n-3$이므로 ㉠에 의하여

$6\le n\le 11$일 때, $2\le a_n\le 11$

$a_{12}=a_6-1=6-1=5$이므로

$6\le n\le 12$일 때, $2\le a_n\le 11$ …… ㉡

$a_{2n}=a_n-1$, $a_{2n+1}=2a_n-3$이므로 ㉡에 의하여

$12\le n\le 25$일 때, $1\le a_n\le 19$ …… ㉢

$a_{2n}=a_n-1$, $a_{2n+1}=2a_n-3$이므로 ㉢에 의하여

$24 \le n \le 51$일 때, $-1 \le a_n \le 35$

㉠에서 $a_n=7$, 즉 $a_3=7$일 때,

$a_7=2a_3-3=11$, $a_{15}=2a_7-3=19$,

$a_{31}=2a_{15}-3=35$

따라서 집합 A의 원소의 값 중 최댓값은 35이다.

답 ①