Ⅲ_2. 순열

[10공수1-03-02] 순열의 개념을 이해하고,
순열의 수를 구하는 방법을 설명할 수 있다.

A : 순열의 개념을 이해하여 설명할 수 있고,
순열의 수를 다양한 방법으로 구할 수 있으며
그 방법을 논리적으로 설명할 수 있다.

B : 순열의 개념을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있으며
구한 방법을 설명할 수 있다.

C : 순열의 개념을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.

D : 순열의 수를 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타내고 그 값을 구할 수 있다.

E : ${}_n\mathrm{P}_r$의 값을 구할 수 있다.

Ⅲ_3. 조합

[10공수1-03-03] 조합의 개념을 이해하고,
조합의 수를 구하는 방법을 설명할 수 있다.

A : 조합의 개념을 이해하여 설명할 수 있고,
조합의 수를 다양한 방법으로 구할 수 있으며
그 방법을 논리적으로 설명할 수 있다.

B : 조합의 개념을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있으며
구한 방법을 설명할 수 있다.

C : 조합의 개념을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.

D : 조합의 수를 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타내고 그 값을 구할 수 있다.

E : ${}_n\mathrm{C}_r$의 값을 구할 수 있다.

[1] 순열(Permutation)의 수 ❶

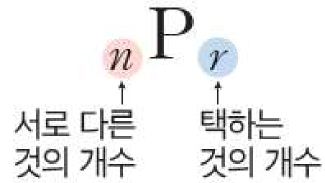
(1) 순열의 뜻 : 서로 다른 n개에서 서로 다른 $r\,(0 < r \leq n)$개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 '순열'이라 하고, 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

(2) 순열의 수의 성질

① $${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}_{r\text{개}}$$

(단, $0 < r \leq n$)

② $${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \leq r \leq n)$$



③ ${}_n\mathrm{P}_n = n!$, $0! = 1$, ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$

④ ${}_n\mathrm{P}_r = {}_{n-1}\mathrm{P}_r + r \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

✡ 계승(factorial)

(1) 서로 다른 n개에서 n개를 모두 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

(2) n의 계승 : 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것

$\Leftrightarrow$ (기호) $n!$

☑ $n!$은 'n의 계승(階乘)' 또는 'n factorial'이라고 읽는다.

(3) ${}_n\mathrm{P}_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

(4) $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$

$6! = 720$, $\cdots$

1 순열(Permutation)의 수 ❷

(3) 조건이 있는 순열

① n개에서 r개를 이웃하게 나열하는 순열의 수는 이웃하는 r개를 한 묶음으로 보고 순열의 수 $(n-r+1)!$을 구한 후 이웃하는 r개의 순열의 수 $r!$을 곱한다.

② n개에서 r개를 이웃하지 않게 나열하는 순열의 수는 이웃하지 않을 r개 외의 $(n-r)$개의 순열의 수 $(n-r)!$을 구한 후 이웃하지 않을 대상의 사이사이와 양 끝에 r개를 넣는다.

✡ 이웃할 때와 이웃하지 않을 때의 순열

(1) 이웃하게 나열하는 순열의 수 :

① 이웃하는 것들 ⇒ 한 묶음으로 생각

② n(묶음을 하나로 보고 나열)

$\times n$(묶음 안에서 자리 바꾸기)

(2) 2명이 이웃하지 않게 나열하는 순열의 수 :

n(전체) $-$ n(2명을 이웃하게 나열)

(3) 3명 이상이 이웃하지 않게 나열하는 순열의 수 :

① 이웃해도 되는 것을 먼저 나열

② 그 양 끝과 사이사이에 나머지를 배열

(4) 같은 수를 교대로 나열하는 순열의 수 :

각각을 일렬로 배열하여 곱한다.

2 조합(Combination)의 수 ❶

(1) 조합의 뜻 : 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 $r(0 < r \leq n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 '조합'이라 하고, 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

☑ (조합) $\times$ (나열) $=$ (순열) $\Leftrightarrow$ ${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$

(2) 조합의 수의 성질

① $${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ (단, } 0 \leq r \leq n\text{)}$$

② ${}_n\mathrm{C}_n = 1$, ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$

2 조합(Combination)의 수 ❷

③ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0 \leq r \leq n$)

④ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(3) 조건이 있는 조합

① 크기가 결정된 순열은 선택만 하면 되므로 조합의 수이다.

예 일의 자리로 갈수록 수가 커지는 네 자리 자연수의 개수

$\Rightarrow$ ${}_{10}\mathrm{C}_4$

☑ 순서를 생각하지 않고 그 일부를 뽑기만 한다.

순서가 없다. $\Leftrightarrow$ 순서가 일정 $\Leftrightarrow$ 크기가 고정

② 조합(Combination)의 수 ❸

② 도형에서의 경우의 수 : 점을 선택하면 완성되는 도형의 경우의 수는 점을 선택하는 조합의 수를 고려하면 된다.

㉠ 직선 : 서로 다른 두 점을 선택(단, 한 직선 위의 점은 어느 두 점을 선택해도 한 직선만을 만든다.)

㉡ 삼각형 : 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 선택

㉢ 다각형의 대각선의 교점 : 다각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 네 점을 선택

✡ 도형과 조합 ❶

(1) 직선의 개수

① 어느 세 점도 같은 직선 위에 있지 않은
서로 다른 n개의 점 중에서
두 개의 점을 이어서 만든 직선의 개수 :

$${}_{n}\mathrm{C}_{2}$$

② 서로 다른 n개의 점 중에서
m개의 점은 같은 직선 위에 있을 때,
두 개의 점을 이어서 생기는 직선의 개수 :

$${}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{m}\mathrm{C}_{2}+1$$

③ 볼록 n각형의 대각선의 전체 개수 : ${}_{n}\mathrm{C}_{2}-n$

✡ 도형과 조합 ❷

(2) 삼각형의 개수

① 어느 세 점도 같은 직선 위에 있지 않은
서로 다른 n개의 점 중에서
세 개의 점을 이어서 만든 삼각형의 개수 :

$${}_{n}\mathrm{C}_{3}$$

② n개의 서로 다른 점 중에서
m개의 점은 같은 직선 위에 있을 때,
세 개의 점을 이어서 생기는 삼각형의 개수 :

$${}_{n}\mathrm{C}_{3}-{}_{m}\mathrm{C}_{3}$$

✡ 도형과 조합 ❸

(3) 원주 위의 n개의 점에 대하여
원의 내부에서 현들이 만나서 생기는 교점의 개수 :

${}_{n}\mathrm{C}_{4}$ (∵ 4개를 선택하여 엇갈리게 연결)

(4) 서로 다른 m개의 평행선과 서로 다른 n개의 평행선이
만날 때 평행사변형의 개수 :

$${}_{m}\mathrm{C}_{2}\times{}_{n}\mathrm{C}_{2}$$

(5) 가로선이 m개, 세로선이 n개에서 정사각형의 개수

① 한 변의 길이가 1 : $(m-1)\times(n-1)$

② 한 변의 길이가 2 : $(m-2)\times(n-2)$

③ 한 변의 길이가 3 : $(m-3)\times(n-3)$

④ 개수가 0이 나오기 전까지 계속하여 더한다.

✡ 도형과 조합 ❹

❻ n개의 직선에 의하여 평면을 분할할 때,

① 평면의 최대 개수 :

$$2+2+3+4+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

② 평면의 최소 개수 :

$$2+1+1+\cdots+1=n+1$$ (∵ 모두 평행선)

3 조 나누기 ❶

(1) 조 나누기 : 서로 다른 n개의 대상을 p개, q개, r개 ($p+q+r=n$)의 세 개의 조로 나누는 방법의 수

① p, q, r이 모두 다른 수일 때

$$\Rightarrow {}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_{n-p-q}\mathrm{C}_r$$

② p, q, r 중에서 두 수가 같을 때

$$\Rightarrow {}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_{n-p-q}\mathrm{C}_r\times\frac{1}{2!}$$

③ p, q, r이 모두 같은 수일 때

$$\Rightarrow {}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_{n-p-q}\mathrm{C}_r\times\frac{1}{3!}$$

$\boxed{3}$ 조 나누기 ❷

(2) 나누어 주기 : 서로 다른 n개의 대상을 p개, q개, r개
($p+q+r=n$)의 세 개의 묶음으로 나누어
서로 다른 세 집단에게 나누어 주는 방법의 수

① p, q, r이 모두 다른 수일 때

$$\Rightarrow {}_{n}\mathrm{C}_{p} \times {}_{n-p}\mathrm{C}_{q} \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_{r} \times 3!$$

② p, q, r 중에서 두 수가 같을 때

$$\Rightarrow {}_{n}\mathrm{C}_{p} \times {}_{n-p}\mathrm{C}_{q} \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_{r} \times \frac{1}{2!} \times 3!$$

③ p, q, r이 모두 같은 수일 때

$$\Rightarrow {}_{n}\mathrm{C}_{p} \times {}_{n-p}\mathrm{C}_{q} \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_{r} \times \frac{1}{3!} \times 3!$$

✡ 함수의 개수

함수 $f : X \rightarrow Y$에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=n$일 때,

(1) 함수의 개수 : n^{r}

(2) 일대일 함수 $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$:

$${}_{n}\mathrm{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(3) 일대일 대응 $\Leftrightarrow$ 일대일 함수 & (공역) = (치역) :

$${}_{n}\mathrm{P}_{n} = n! \ (\because \ n=r)$$

(4) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$: ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ ($\because$ 크기가 고정)

(5) 공역과 치역이 같은 함수 : 서로 다른 r개의 대상을 n개의
묶음으로 나누어 서로 다른 n개의 집단에게 나누어 준다.