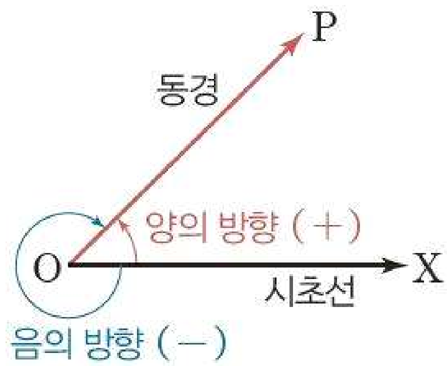
II_1. 삼각함수

[12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

1 일반각



(1) 각과 각의 크기

평면에서 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 회전할 때, 반직선 OX, OP로 이루어진 도형을 기호 ‘∠XOP’로 나타내고, 회전한 양을 ‘∠XOP의 크기’라고 한다. 이때 반직선 OX를 ‘시초선(始初線)’, 반직선 OP를 ‘동경(動徑)’이라고 한다. 또 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향의 반대 방향을 ‘양의 방향’, 시곗바늘이 도는 방향을 ‘음의 방향’이라고 한다. 이때 각의 크기는 양의 방향일 때는 양의 부호 ‘+’, 음의 방향일 때는 음의 부호 ‘−’를 붙여서 나타낸다.

✡ 각의 크기와 동경의 위치

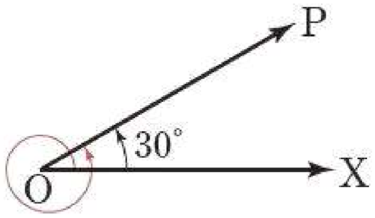
(1) $\angle$XOP의 크기가 결정 $\Rightarrow$ 동경 OP의 위치는 하나로 결정

(∵ 시초선 OX는 고정)

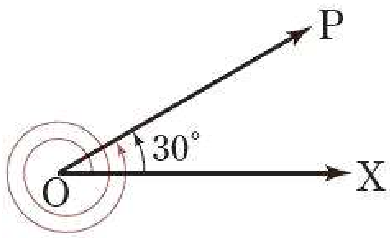
(2) 동경 OP의 위치가 결정 $\not\Rightarrow$ $\angle$XOP의 크기는 하나로 결정

(∵ 동경 OP가 양 또는 음의 방향으로 한 바퀴 이상 회전)

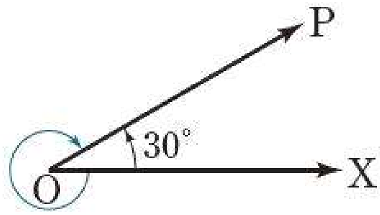
$\boxed{\text{예}}$ 시초선 OX와 30°의 위치에 있는 동경 OP가 나타내는 각의 크기는



$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$



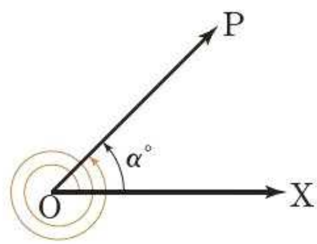
$750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$



$-330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$

(2) 일반각

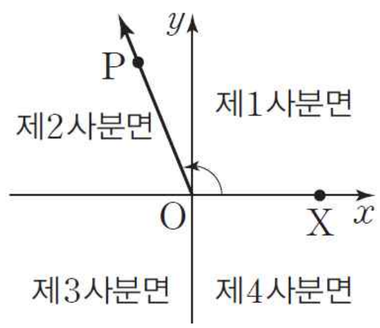
시초선 OX와 동경 OP에 의하여 $\angle$XOP가 주어질 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라 하면 $\angle$XOP의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 '동경 OP가 나타내는 일반각'이라고 한다.



$$360^\circ \times n + \alpha^\circ \ (\text{단, } n\text{은 정수})$$

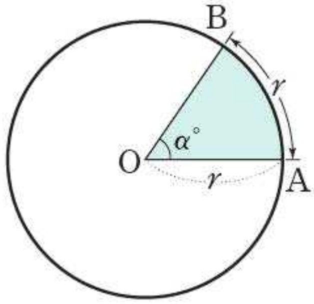
(3) 사분면의 각

좌표평면에서 원점 O에 대하여 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때,



동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 '제1사분면의 각', '제2사분면의 각', '제3사분면의 각', '제4사분면의 각'이라고 한다.

2 호도법 ❶



(1) 호도법

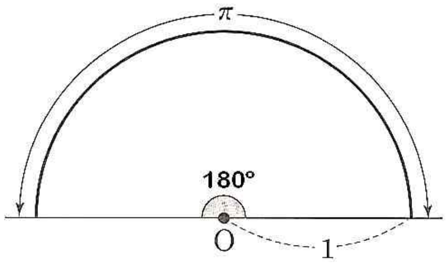
중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기 $\alpha°$를 '1라디안(radian)'이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 '호도법'이라고 한다.

☑ 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 단위인 라디안은 보통 생략한다. 반지름(radius)와 각(angle)의 합성어.

(2) 육십분법(六十分法)과 호도법(弧度法)의 관계

$1\,(\text{라디안}) = \dfrac{180°}{\pi}$, $1° = \dfrac{\pi}{180}\,(\text{라디안})$

$\pi = 180°$



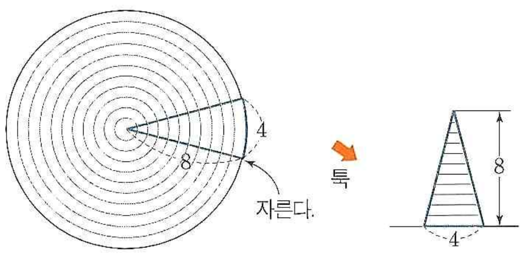
2 호도법 ❷

☑ 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

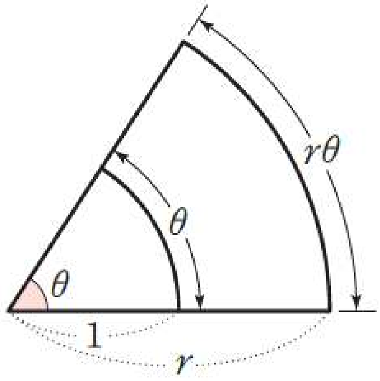
$2\pi r : r = 360° : \alpha°$, $\alpha° = \dfrac{180°}{\pi}$, 즉 $1\,(\text{라디안}) = \dfrac{180°}{\pi}$

✡ 호도법과 육십분법 사이의 관계

육십분법	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
호도법	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π



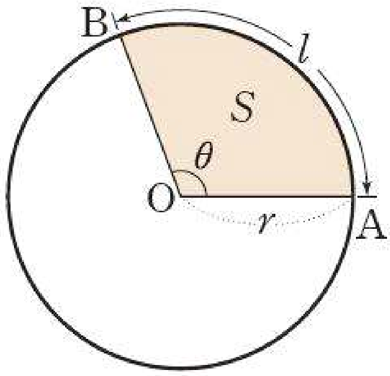
2 호도법 ❸



(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

① $l = r\theta$ ② $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$



☑ 호의 길이 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 θ(라디안)에 비례하므로

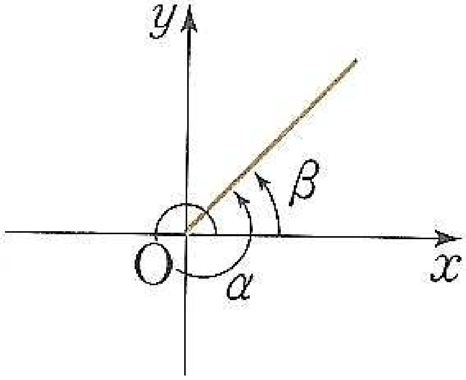
① $l : 2\pi r = \theta : 2\pi$에서 $l = r\theta$

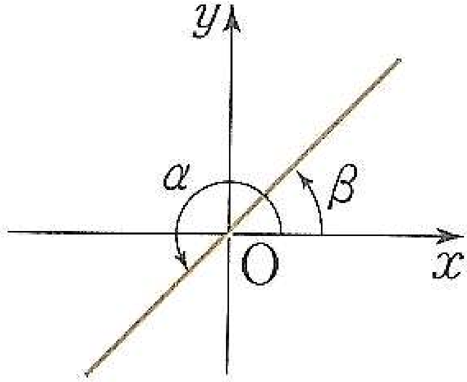
② $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$에서 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

✡ 두 각의 위치 관계 ❶

두 각 α, β에 대하여 (단, n은 정수)

(1) 두 각 α, β가 일치 $\Leftrightarrow$ $\alpha - \beta = 2n\pi$



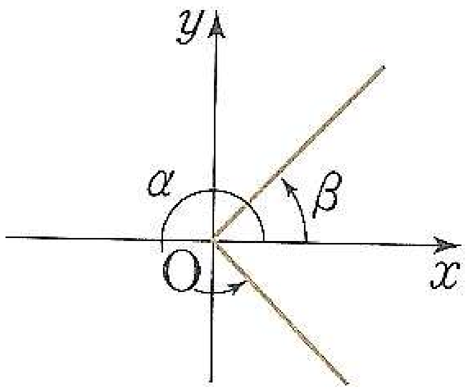


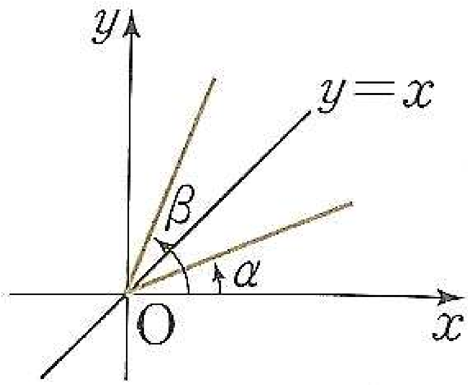
(2) 두 각 α, β가 원점에 대하여 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha - \beta = 2n\pi + \pi$

✡ 두 각의 위치 관계 ❷

두 각 α, β에 대하여 (단, n은 정수)

(3) 두 각 α, β가 x축에 대하여 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=2n\pi$



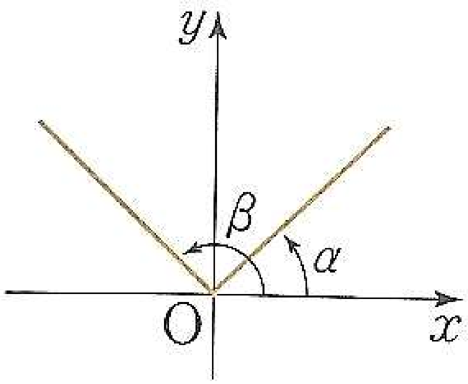


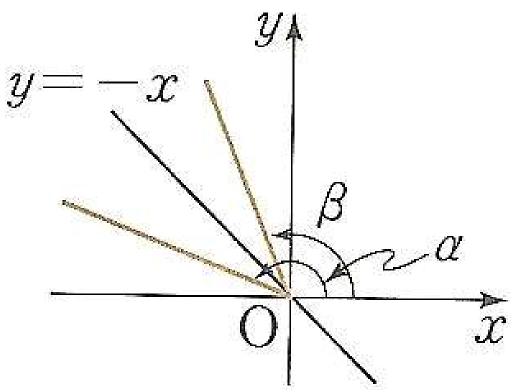
(4) 두 각 α, β가 $y=x$에 대하여 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$

✡ 두 각의 위치 관계 ❸

두 각 α, β에 대하여 (단, n은 정수)

(5) 두 각 α, β가 y축에 대하여 대칭 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=2n\pi+\pi$





(6) 두 각 α, β가 $y=-x$에 대하여 대칭

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$$

✡ 각 θ에 대한 각 $\dfrac{\theta}{k}$의 범위 ❶

(1) θ가 제1사분면의 각 $\Rightarrow 2n\pi < \theta < 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

① $\dfrac{2n\pi}{k} < \dfrac{\theta}{k} < \dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{\pi}{2k}$

② $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ (k개)

(2) θ가 제2사분면의 각 $\Rightarrow 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi$

① $\dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{\pi}{2k} < \dfrac{\theta}{k} < \dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{\pi}{k}$

② $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ (k개)

✡ 각 θ에 대한 각 $\dfrac{\theta}{k}$의 범위 ❷

(3) θ가 제3사분면의 각 $\Rightarrow 2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \dfrac{3}{2}\pi$

① $\dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{\pi}{k} < \dfrac{\theta}{k} < \dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{3}{2k}\pi$

② $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ (k개)

(4) θ가 제4사분면의 각 $\Rightarrow 2n\pi + \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi$

① $\dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{3}{2k}\pi < \dfrac{\theta}{k} < \dfrac{2n\pi}{k} + \dfrac{2\pi}{k}$

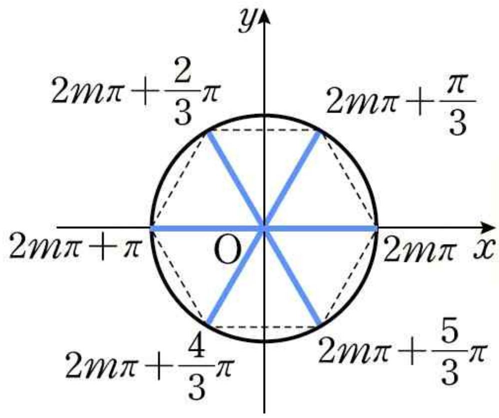
② $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ (k개)

✡ 각 θ에 대한 각 $\dfrac{\theta}{k}$의 범위

각 θ는 일반각이기 때문에 각 $\dfrac{\theta}{k}$ (k는 자연수)는 동경이 $\dfrac{2\pi}{k}$ 간격으로 떨어져 있는 k개의 서로 다른 각을 나타낸다.

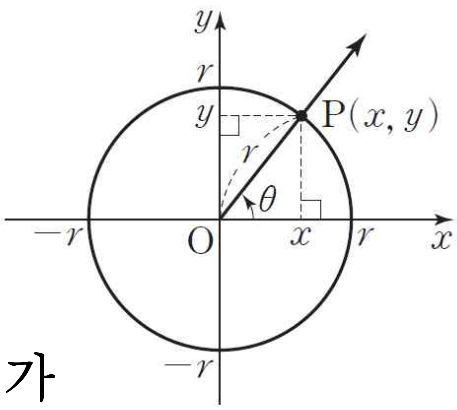
예 $\theta = 2n\pi$ (n은 정수)에 대하여

각 $\dfrac{\theta}{6}$은 n의 값에 따라 동경의 위치가 $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$의 간격으로 떨어져 있는 서로 다른 6개의 각을 나타낸다.



3 삼각함수의 뜻 ❶

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r ($r > 0$)인 원 위의 한 점을 $P(x,\ y)$, x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. 이때 θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ (x \neq 0)$$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 '사인함수', '코사인함수', '탄젠트함수'라 하고, 이 함수들을 'θ에 대한 삼각함수'라고 한다.

3 삼각함수의 뜻 ❷

☑ 동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ에 대하여 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$의 값은 각각 하나로 결정된다. 즉, 다음의 대응 관계는 각각 θ에 대한 함수가 된다.

$$\theta \to \frac{y}{r},\ \theta \to \frac{x}{r},\ \theta \to \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

이때 각 함수를 '사인함수', '코사인함수', '탄젠트함수'라 하고, 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

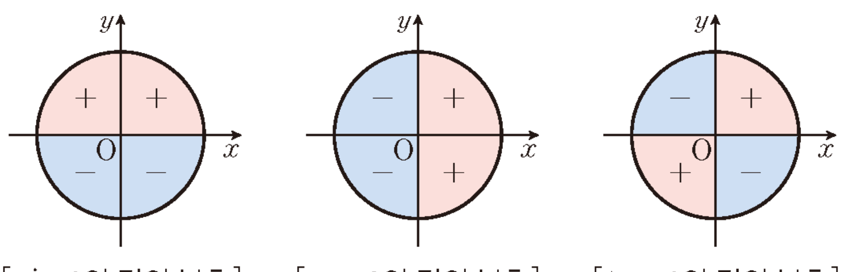
$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

3 삼각함수의 뜻 ❸

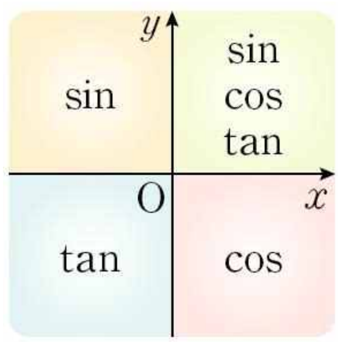
☑ (1) 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 다음 표와 같다.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면 $(x>0,\ y>0)$	제2사분면 $(x<0,\ y>0)$	제3사분면 $(x<0,\ y<0)$	제4사분면 $(x>0,\ y<0)$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

(2) $\tan\theta$는 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 정의되지 않는다.



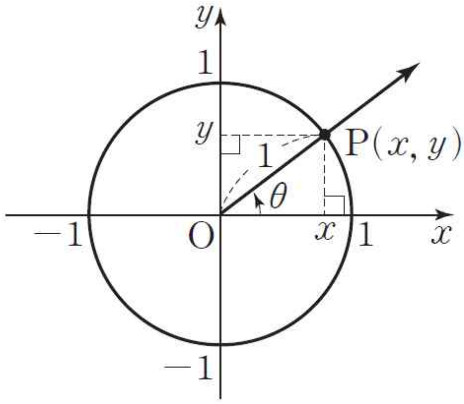
[$\sin\theta$의 값의 부호]　[$\cos\theta$의 값의 부호]　[$\tan\theta$의 값의 부호]



4 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

☑ 각 θ가 나타내는 동경과 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 다음이 성립한다.



(1) $\sin\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$(x \neq 0)$이므로

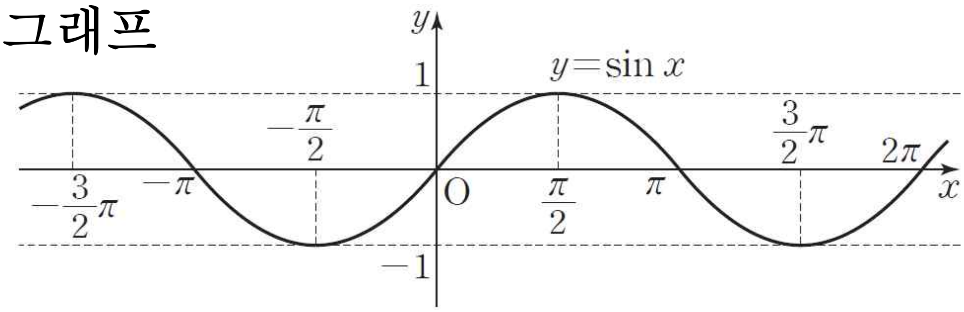
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(2) 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = y^2 + x^2 = 1$$

5 삼각함수의 그래프 ❶

(1) 함수 $y = \sin x$의 그래프



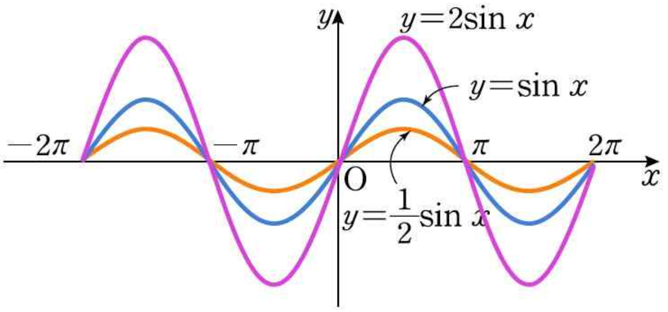
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다.

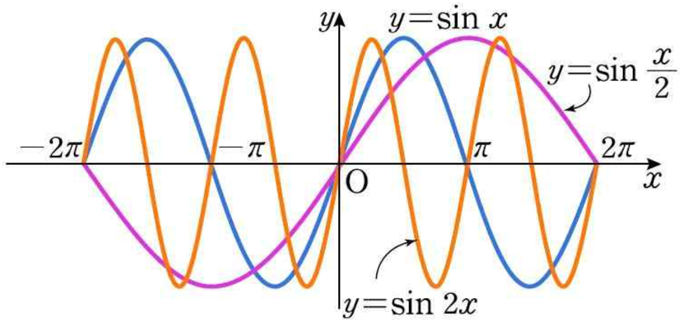
② 함수 $y = \sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

5 삼각함수의 그래프 ❷

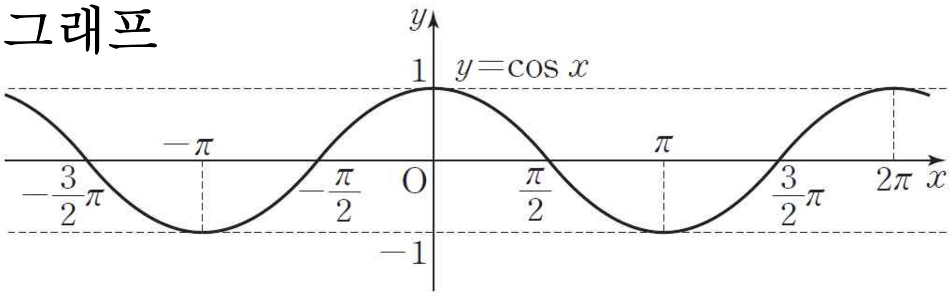
☑ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 '주기함수'라 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 '주기(period)'라고 한다.





5 삼각함수의 그래프 ❸

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프

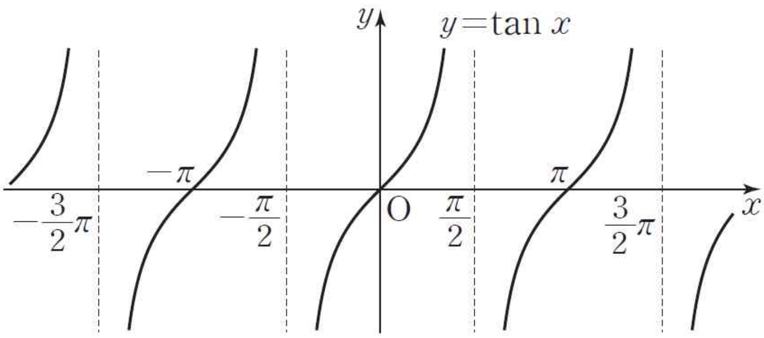


① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다.

② 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프



① 정의역은 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi + x) = \tan x$ (n은 정수)이고, 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

✡ 여러 가지 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$, $y=a\tan x$ $(a \neq 0)$의 그래프

① 두 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$의 최댓값은 $|a|$, 최솟값은 $-|a|$이다.

② 함수 $y=a\tan x$의 최솟값과 최댓값은 없다.

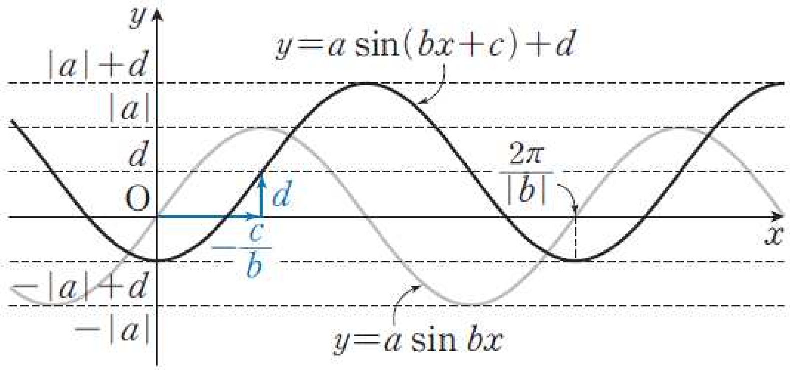
(2) 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ $(a \neq 0)$의 그래프

① 두 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

② 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이다.

✡ **함수 $y = a \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(bx+c)+d$의 치역과 주기**

$y = a \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$: $y = a \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} bx$를 x축 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것



∴ 치역은 $\{y \mid -|a|+d \le y \le |a|+d\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$

6 삼각함수의 성질 ❶

(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)

① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ ② $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$

③ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

✡ **$\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$의 삼각함수 :** $\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta\right) = $ ① $\square$ ② $\square$ θ

① $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$가 속하는 사분면 → 바뀌기 전 삼각함수의 부호로 결정 → 얼싸안고 (※ 단, θ는 항상 예각으로 간주)

② n이 짝수 ⇒ 그대로

n이 홀수 ⇒ 바꾼다. : $\sin \rightleftarrows \cos$, $\tan \rightleftarrows \frac{1}{\tan}$

6 삼각함수의 성질 ❷

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ② $\cos(-\theta) = \cos\theta$

③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3) $\pi - \theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ ② $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

③ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

(4) $\pi + \theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ ② $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

③ $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

6 삼각함수의 성질 ❸

(5) $\frac{\pi}{2} - \theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

(6) $\frac{\pi}{2} + \theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

✡ $-\theta$의 삼각함수

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

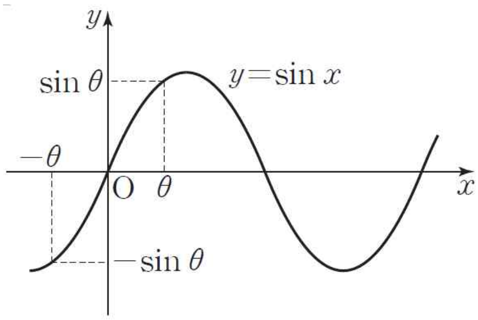
$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

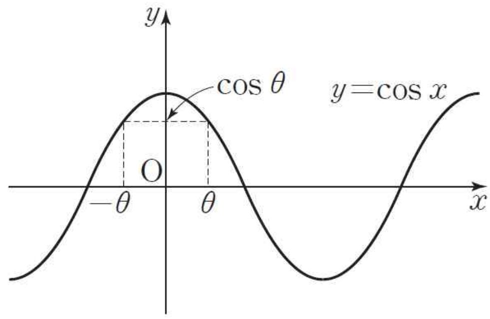
함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

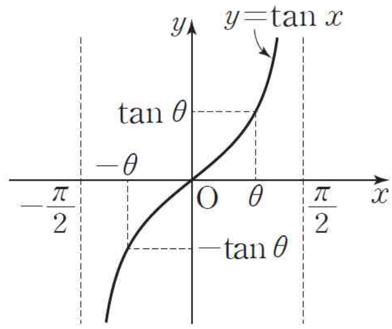
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

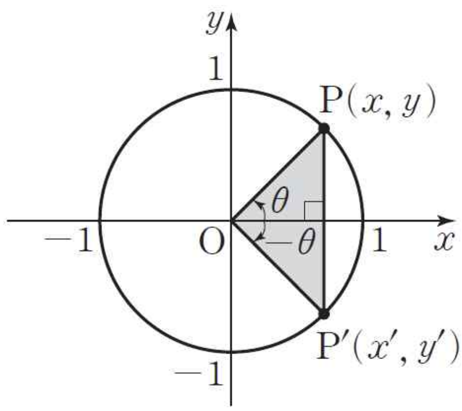
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$







✡ $-\theta$의 삼각함수



(2) 각 θ와 각 $-\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 점 P와 점 P′은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=-x$, $y'=-y$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta\ \ (x\neq 0)$$

✡ 삼각함수의 값 구하기

$$\theta \begin{cases} \text{제 } 1\text{사분면} : & \alpha & \text{all (얼)} \\ \text{제 } 2\text{사분면} : & \pi - \alpha & \text{sin (싸)} \\ \text{제 } 3\text{사분면} : & \pi + \alpha & \text{tan (안)} \\ \text{제 } 4\text{사분면} : & 2\pi - \alpha & \text{cos (고)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{}\,\theta = \text{①} \boxed{}\,\alpha$$

(1) 방정식을 만족하는 1사분면의 각 α

(2) $$\theta = \begin{cases} \text{제 } 1\text{사분면} : & \alpha & \leftrightarrows \text{all (얼)} \\ \text{제 } 2\text{사분면} : & \pi - \alpha & \leftrightarrows \text{sin (싸)} \\ \text{제 } 3\text{사분면} : & \pi + \alpha & \leftrightarrows \text{tan (안)} \\ \text{제 } 4\text{사분면} : & 2\pi - \alpha & \leftrightarrows \text{cos (고)} \end{cases}$$

(3) 주기를 더하거나 뺀다.

7 삼각함수의 방정식에의 활용

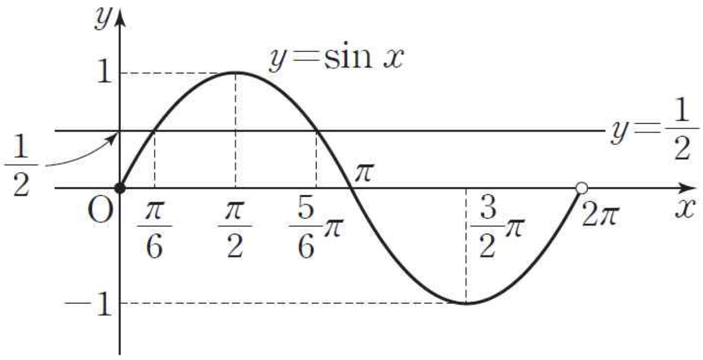
방정식 $2\sin x = 1$, $\tan x = -1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

(1) 주어진 방정식을 $\sin x = k$ ($\cos x = k$, $\tan x = k$)의 꼴로 변형한다.

(2) 주어진 범위에서 삼각함수 $y = \sin x$ ($y = \cos x$, $y = \tan x$)의 그래프와 직선 $y = k$를 그린 후 두 그래프의 교점의 x좌표를 찾아서 해를 구한다.

예 $0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식

$\sin x = \dfrac{1}{2}$의 해를 구해 보자.



방정식 $\sin x = \dfrac{1}{2}$의 해는

함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = \dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

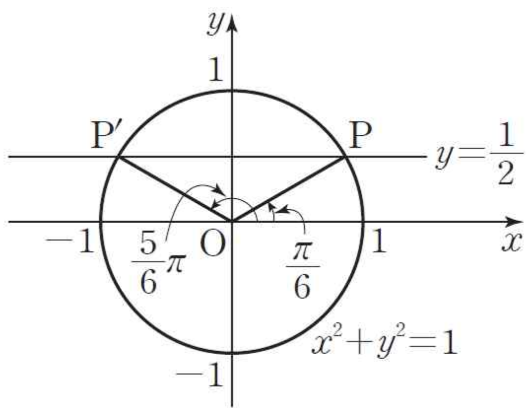
따라서 그림에서 구하는 해는 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x = \dfrac{5}{6}\pi$이다.

☑ 단위원을 이용하는 방법

단위원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선

$y = \dfrac{1}{2}$이 만나는 두 점을 P, P$'$

이라 할 때, 방정식 $\sin x = \dfrac{1}{2}$의



해는 두 동경 OP, OP$'$이 나타내는 각의 크기이다.

(단, O는 원점이다.) 따라서 그림에서 구하는 해는

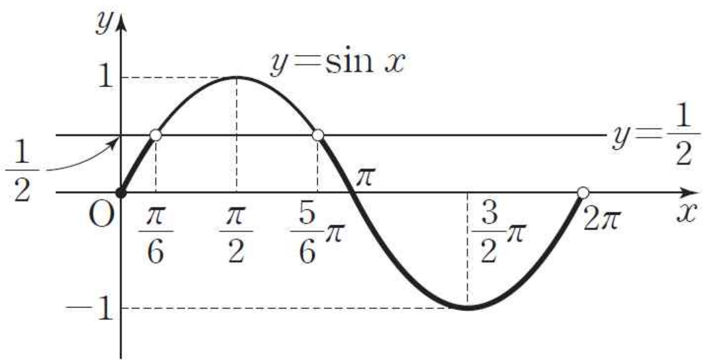
$x = \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x = \dfrac{5}{6}\pi$이다.

8 삼각함수의 부등식에의 활용

부등식 $2\sin x < 1$, $2\sin x > -1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

(1) 주어진 부등식을 $\sin x > k$ ($\sin x \geq k$, $\sin x < k$, $\sin x \leq k$)의 꼴로 변형한다.

(2) 주어진 범위에서 삼각함수 $y = \sin x$의 그래프가 직선 $y = k$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하여 해를 구한다. 이때 함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 x좌표를 구하여 해를 구한다.



예 $0 \leq x < 2\pi$일 때, 부등식 $\sin x < \dfrac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식

$\sin x = \dfrac{1}{2}$의 해는 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x = \dfrac{5}{6}\pi$

이때 부등식 $\sin x < \dfrac{1}{2}$의 해는 함수 $y = \sin x$의 그래프가

직선 $y = \dfrac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$$

☑ (1) 삼각함수를 포함한 부등식도 삼각함수를 포함한 방정식과 마찬가지로 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

(2) 두 개 이상의 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식은 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 등을 이용하여 하나의 삼각함수로 변형하여 풀면 편리하다.