Ⅲ_5. 무리함수

[10공수2-03-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 탐구할 수 있다.

A : 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 탐구하여 설명할 수 있다.

B : 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

C : 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 안다.

D : 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프를 그릴 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 그릴 수 있다.

1 무리식

(1) 무리식

근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서
유리식으로 나타낼 수 없는 식을 '무리식'이라 한다.

(2) 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

(근호 안의 식의 값) ≥ 0, (근호 전체) ≥ 0

$\boxed{2}$ 무리식의 계산

(1) 무리식 : 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식

$\Rightarrow$ (근호 안) ≥ 0, (근호 전체) ≥ 0

(2) ① $\sqrt{A}$ 가 실수 $\Leftrightarrow A \geq 0$

② $\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ 가 실수 $\Leftrightarrow \dfrac{A}{B} \geq 0$, $B \neq 0$

③ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow (A \geq 0,\ B \geq 0)\ \&\ (A = B^2)$

(3) ① $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$

② $(\sqrt{A})^2 = A$

③ $\sqrt[3]{B^3} = B$ (실수 B의 부호와 관계없이)

✡ 분모의 유리화 ❶

(1) $\dfrac{b}{\sqrt{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$ (단, $a > 0$)

(2) $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$= \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$)

(3) $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$)

✡ 분모의 유리화 ❷

(4) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \dfrac{c\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}$

$= \dfrac{c\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$ (단, $a+b \neq 0$)

(5) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \dfrac{c\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}$

$= \dfrac{c\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$ (단, $a+b \neq 0$)

(6) $\dfrac{d}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{d\{a-(\sqrt{b}+\sqrt{c})\}}{\{a+(\sqrt{b}+\sqrt{c})\}\{a-(\sqrt{b}+\sqrt{c})\}}$

3 무리함수 ⇨ 출발점과 방향

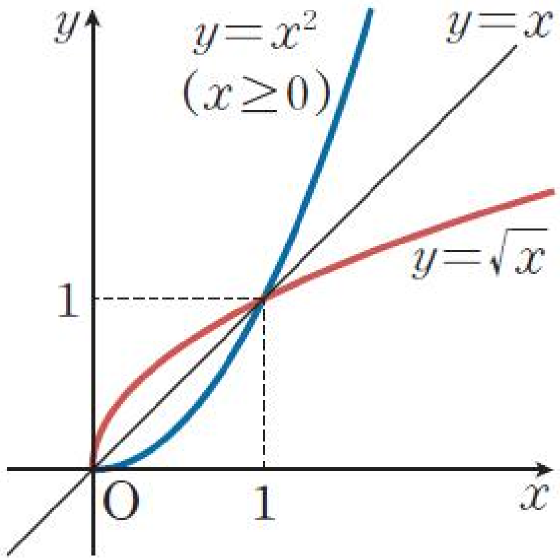
(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때,
이 함수를 '무리함수'라 한다.

(2) 무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않을 때는
(근호 안) ≥ 0인 실수의 집합을 정의역으로 하고,
(근호 전체) ≥ 0인 실수의 집합을 치역으로 한다.

$\therefore$ (정의역) $= \{x \mid$ (근호 안) $\geq 0\}$

(치역) $= \{y \mid$ (근호 전체) $\geq 0\}$

$\boxed{4}$ 무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프



무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 그림과 같고

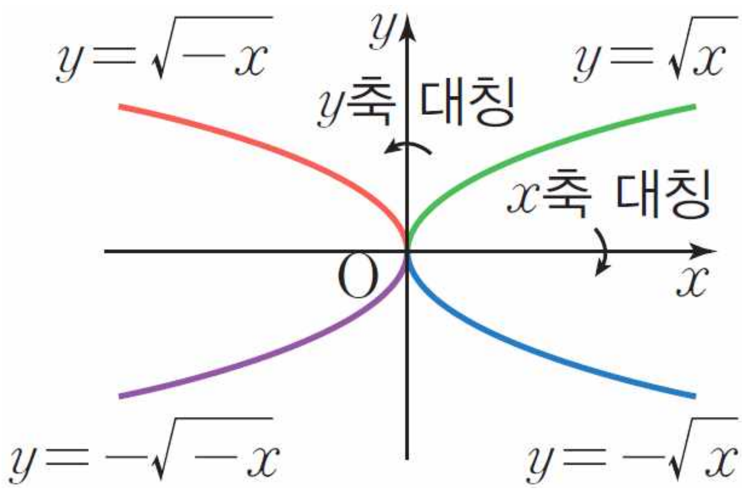
(1) 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$,
치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이다.

(2) 출발점이 원점 $(0, 0)$이다.

(3) 일대일대응이다.

(4) 그 역함수 $y=x^2$ $(x \geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\boxed{5}$ 무리함수의 기본형



함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를

(1) y축에 대하여 대칭이동

$\Leftrightarrow y=\sqrt{-x}$

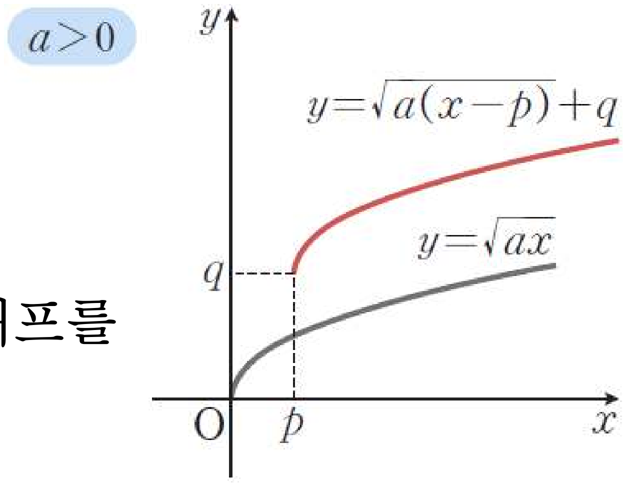
(2) x축에 대하여 대칭이동

$\Leftrightarrow y=-\sqrt{x}$

(3) 원점에 대하여 대칭이동

$\Leftrightarrow y=-\sqrt{-x}$

$\boxed{6}$ 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a \neq 0)$의 그래프



(1) 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a \neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y-q \geq 0\}$이다.

(3) 출발점은 $(p,\ q)$이다.

(4) 역함수는 $y=\frac{1}{a}(x-q)^2+p$ $(x \geq q)$이다.

$\boxed{7}$ 무리함수 $y=k\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

(1) ① 출발점 : $\left(-\frac{b}{a},\ c\right)$, ② 방향 : ? 사분면

(2) ① $a>0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}$

㉠ $k>0 \Rightarrow y \geq c$ ∴ 방향 : 1사

㉡ $k<0 \Rightarrow y \leq c$ ∴ 방향 : 4사

② $a<0 \Rightarrow x \leq -\frac{b}{a}$

㉠ $k>0 \Rightarrow y \geq c$ ∴ 방향 : 2사

㉡ $k<0 \Rightarrow y \leq c$ ∴ 방향 : 3사

✡ 반원의 그래프

$x^2+y^2=r^2$에서 $y^2=r^2-x^2$이므로

위쪽 반원은 $y=\sqrt{r^2-x^2}$

아래쪽 반원은 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$