01 지수함수와 로그함수

본문 6~15쪽

필수유형 1 ①	01 ②	02 28	03 20
	04 25		
필수유형 2 ②	05 ③	06 ①	07 ①
	08 216		
필수유형 3 ①	09 ①	10 128	11 27
	12 ⑤		
필수유형 4 ③	13 ②	14 900	15 256
	16 3		
필수유형 5 ④	17 ③	18 14	19 ③
필수유형 6 ④	20 ⑤	21 ④	22 ③
필수유형 7 ③	23 25	24 ④	25 ④
필수유형 8 ②	26 4	27 5	28 ④
필수유형 9 ③	29 3	30 18	31 ④
필수유형 10 ④	32 ①	33 ④	34 ①

필수유형 1

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

즉, $3<n<6$이고 n이 짝수이어야 하므로 n은 4이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01

$$\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{16}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}+\sqrt[5]{2\times16}$$
$$=\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[5]{2^5}=2+2=4$$

답 ②

02

$x^4=64$에서

$x^4-64=0,\ (x^2+8)(x^2-8)=0$

x가 실수이면 $x^2+8>0$이므로

$x^2=8,\ x=\pm2\sqrt{2}$

$a>b$이므로 $a=2\sqrt{2},\ b=-2\sqrt{2}$

$t^3=-64$에서

$t^3+64=0,\ (t+4)(t^2-4t+16)=0$

t가 실수이면 $t^2-4t+16=(t-2)^2+12>0$이므로

$t=-4$

따라서 $c=-4$이므로

$(a-b)^2+c=(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})^2-4=32-4=28$

답 28

03

$x^3=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})^3$

$=(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{16})^3+3\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})$

$=4+16+3\times\sqrt[3]{4\times16}\times x$

$=20+3\times\sqrt[3]{64}\times x$

$=20+12x$

따라서 $x^3-12x=20$

답 20

04

(i) a가 양수이므로 b가 짝수일 때, a의 b제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[b]{a}$, $-\sqrt[b]{a}$의 2개이다.

만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6),
(4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6),
(6, 2), (6, 4), (6, 6)

이므로 그 개수는 15이다.

(ii) $-a$가 음수이므로 b가 홀수일 때, $-a$의 b제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[b]{-a}$의 한 개이다.

만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5),
(5, 3), (5, 5), (6, 3), (6, 5)

이므로 그 개수는 10이다.

(i), (ii)에서 $m=15,\ n=10$이므로

$m+n=15+10=25$

답 25

필수유형 2

$(2^{\sqrt{3}}\times4)^{\sqrt{3}-2}=(2^{\sqrt{3}}\times2^2)^{\sqrt{3}-2}=(2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2}=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=2^{3-4}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 ②

05

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{8}}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{8}}\times8^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2$

답 ③

06

$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=2$에서 좌변의 분모, 분자에 각각 2^x을 곱하면

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$\frac{4^x+1}{4^x-1}=2$, $4^x+1=2\times4^x-2$, $4^x=3$

$\frac{8^x-8^{-x}}{2^x+2^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 2^x을 곱하면

$$\frac{8^x-8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{16^x-4^{-x}}{4^x+1}=\frac{(4^x)^2-\frac{1}{4^x}}{4^x+1}=\frac{3^2-\frac{1}{3}}{3+1}=\frac{13}{6}$$

답 ①

07

$(2a)^{2b}=2^{2b}\times a^{2b}=2^{2b}\times(a^b)^2=2^{2b}\times4^2=8$에서

$2^{2b}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $b=-\frac{1}{2}$

$a^b=a^{-\frac{1}{2}}=4$에서 $a=4^{-2}=\frac{1}{16}$

따라서 $(8a)^{8b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$

답 ①

08

조건 (가)에서 $2^x=3^{-y}=k\,(k>0)$이라 하면

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$, $3^{-y}=k$에서 $3=k^{-\frac{1}{y}}$이므로

$2\times3=k^{\frac{1}{x}}\times k^{-\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

조건 (나)에서 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-2$이므로

$k^{-2}=6$, $k^2=\frac{1}{6}$, $k=\frac{\sqrt{6}}{6}$

따라서 $\frac{9^y}{16^x}=\frac{(3^y)^2}{(2^x)^4}=(2^x)^{-4}\times(3^{-y})^{-2}=\frac{1}{k^4}\times\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^6}=216$

답 216

필수유형 3

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$은 짝수이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$$
$$=-\log1+\log2+\log3-\log4+\log6-\log9+\log12+\log18-\log36$$
$$=\log\frac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$$
$$=\log6$$
$$=\log2+\log3$$

답 ①

09

$\log_3 4-2\log_3 6=\log_3 4-\log_3 6^2=\log_3\frac{4}{36}=\log_3 3^{-2}=-2$

답 ①

10

$\log_2(a+4b)=4$에서 $a+4b=2^4=16$

$\log_2 a+\log_2 b=4$에서 $\log_2 ab=4$이므로 $ab=2^4=16$

따라서 $a^2+16b^2=(a+4b)^2-8ab=16^2-8\times16=128$

답 128

11

다른 근을 α라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\log_2 3=\log_2 24$ …… ㉠

$\alpha\times\log_2 3=k$ …… ㉡

㉠에서

$\alpha=\log_2 24-\log_2 3=\log_2\frac{24}{3}=\log_2 8=3$

㉡에 $\alpha=3$을 대입하면

$k=3\log_2 3=\log_2 3^3=\log_2 27$

따라서 $2^k=27$

답 27

12

$\log_a b+\log_a c=\log_a bc=1$에서 $bc=a$이므로

$c=\frac{a}{b}$ …… ㉠

$\log_b c+\log_b a=\log_b ca=2$에서 $ca=b^2$이므로

$c=\frac{b^2}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{a}{b}=\frac{b^2}{a}$이므로 $a^2=b^3$, $b=a^{\frac{2}{3}}$

㉠에 $b=a^{\frac{2}{3}}$을 대입하면

$c=\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}$

이므로 $a=c^3$, $b=a^{\frac{2}{3}}=(c^3)^{\frac{2}{3}}=c^2$

따라서 $\log_c a+\log_c b=\log_c c^3+\log_c c^2=3+2=5$

답 ⑤

필수유형 4

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 두 점을 각각 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

즉, $\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$에서 $\frac{1}{4}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$이므로

$\log_2 a=\frac{4}{3}\log_2 b$

따라서 $\log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{\log_2 b}{\frac{4}{3}\log_2 b}=\frac{3}{4}$

답 ③

13

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 3}\times9^{\log_3 6}=3^{\log_2\frac{1}{2}}\times6^{\log_3 9}=3^{-1}\times6^2=12$

답 ②

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

14

$$\log_x 2+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{\log 5}{\log x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 5$$
$$=\log_x(2\times3\times5)$$
$$=\log_x 30$$

이므로 $\log_x 30=\frac{1}{2}$에서 $x^{\frac{1}{2}}=30$

따라서 $x=30^2=900$

답 900

15

주어진 상용로그표에서 $\log 2.14=0.3304$이므로

$\log 214=\log(2.14\times100)=\log 2.14+2=0.3304+2=2.3304$

$\log x+\log 214=4.7386$에서

$\log x=4.7386-\log 214=4.7386-2.3304=2.4082=0.4082+2$

$=\log 2.56+\log 100=\log(2.56\times100)$

$=\log 256$

따라서 $x=256$

답 256

16

사각형 ABCD는 사다리꼴이므로 이 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\log_5 3+\log_5 9)\times\log_3 25=\frac{1}{2}\times\log_5 27\times\log_3 25$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log 27}{\log 5}\times\frac{\log 25}{\log 3}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3\log 3}{\log 5}\times\frac{2\log 5}{\log 3}$$
$$=3$$

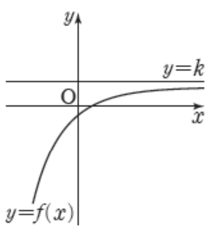
답 3

필수유형 5

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 $f(0)\le0$이어야 한다.



$f(0)=-2^4+k\le0$에서 $k\le16$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

17

함수 $y=2^{x-1}-4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하면

$f(x)=2^{x-m-1}-4$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\ge0$이어야 한다.

$f(0)=2^{-m-1}-4\ge0$에서 $2^{-m-1}\ge4$

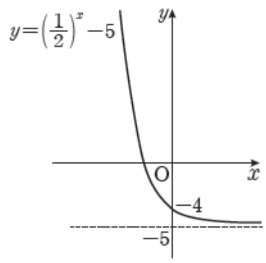
$-m-1\ge2$, $m\le-3$

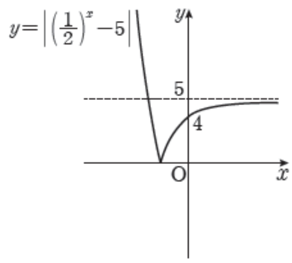
따라서 실수 m의 최댓값은 -3이다.

답 ③

18

두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-5$, $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-5\right|$의 그래프는 각각 그림과 같다.





$1\le n\le4$일 때 $a_n=2$

$5\le n\le10$일 때 $a_n=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times4+1\times6=14$

답 14

19

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $f(x)=4^{x-2}$이다.

또 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $g(x)=4^{-x}$이다.

$\overline{PQ}=2$이고 점 P와 점 R는 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{QR}=5$이면 $\overline{PR}=3$이고 $t=\frac{3}{2}$이다.

두 점 S, T의 x좌표가 모두 $\frac{3}{2}$이므로 $\mathrm{S}\left(\frac{3}{2}, 4^{\frac{3}{2}-2}\right)$, $\mathrm{T}\left(\frac{3}{2}, 4^{-\frac{3}{2}}\right)$

따라서 선분 ST의 길이는

$$\overline{ST}=4^{\frac{3}{2}-2}-4^{-\frac{3}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}-4^{-\frac{3}{2}}=2^{-1}-2^{-3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 ③

필수유형 6

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x)\le3g(x)$, $g(x)\{f(x)-3\}\le0$

(i) $g(x)<0$인 경우

$f(x)-3\ge0$에서 $f(x)\ge3$

그림에서 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x<3$이고, $f(x)\ge3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x\le1$ 또는 $x\ge5$이므로 $x\le1$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

(ii) $g(x)=0$인 경우

$g(x)\{f(x)-3\}=0\le 0$이므로 $x=3$

(iii) $g(x)>0$인 경우

$f(x)-3\le 0$에서 $f(x)\le 3$

그림에서 $g(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>3$이고,

$f(x)\le 3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $1\le x\le 5$이므로

$3<x\le 5$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x\le 1$ 또는 $3\le x\le 5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$

답 ④

20

$x-y=2$에서 $y=x-2$이므로

$y+1=x-1$ …… ㉠

㉠을 $4^x+4^{y+1}=40$에 대입하면

$4^x+4^{x-1}=40,\ 4^x+\frac{4^x}{4}=40$

$\frac{5}{4}\times 4^x=40,\ 4^x=40\times\frac{4}{5}=32$

$x=\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}$

$y=x-2=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha\beta=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

답 ⑤

21

$2^x=t$라 하면 $t>0$이고,

$(2^x+2)^2+2^x+a>0$에서

$(t+2)^2+t+a>0$

$t^2+5t+4+a>0$

t에 대한 이차함수 $f(t)=t^2+5t+4+a$의 그래프의 축의 방정식은

$t=-\frac{5}{2}$이고, $t>0$인 부분에서 $f(t)>0$이려면 $f(0)\ge 0$이어야 한다.

$f(0)=4+a\ge 0$에서 $a\ge -4$

따라서 실수 a의 최솟값은 -4이다.

답 ④

22

$2^x=t$라 하면 이차방정식 $2t^2-16t+9=0$의 두 근은 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=8,\ 2^\alpha 2^\beta=\frac{9}{2}$

따라서 $\frac{4^\alpha+4^\beta}{2^\alpha+2^\beta}=\frac{(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times 2^\alpha 2^\beta}{2^\alpha+2^\beta}=\frac{8^2-2\times\frac{9}{2}}{8}=\frac{55}{8}$

답 ③

필수유형 7

$P(p,\ \log_a p)$, $Q(q,\ \log_a q)$ $(p>q)$라 하면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $p+q=\frac{5}{2}$

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a pq=0$, $pq=a^0=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$에서 $2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$, 즉 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $P(2,\ \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$\overline{PQ}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(\log_a 4)^2=1$

이때 $a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

답 ③

23

$y=\log_3(5x-45)=\log_3 5(x-9)$

$=\log_3(x-9)+\log_3 5$

이므로 함수 $y=\log_3(5x-45)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 $\log_3 5$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=9$, $n=\log_3 5$이므로

$m^n=9^{\log_3 5}=5^{\log_3 9}=5^2=25$

답 25

24

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만날 때,

$\log_a(-x)=1$에서 $x=-a$, $\log_b x=1$에서 $x=b$

$\overline{P_1Q_1}=2$이므로 $a+b=2$ …… ㉠

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만날 때,

$\log_a(-x)=2$에서 $x=-a^2$, $\log_b x=2$에서 $x=b^2$

$\overline{P_2Q_2}=3$이므로 $a^2+b^2=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{1}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만날 때,

$\log_a(-x)=3$에서 $x=-a^3$, $\log_b x=3$에서 $x=b^3$

따라서 선분 P_3Q_3의 길이는

$\overline{P_3Q_3}=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3\times\frac{1}{2}\times 2=5$

답 ④

25

두 점 P, Q는 직선 $y=mx$ 위의 점이고 $\overline{OP}=2\overline{PQ}$이므로

$P(2\alpha,\ 2\alpha m)$, $Q(3\alpha,\ 3\alpha m)$ $\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$로 놓을 수 있다.

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

두 점 P, Q는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$\log_2 2a=2am$, $\log_2 3a=3am$

위의 두 식에서 $3\log_2 2a=2\log_2 3a$이므로

$3(1+\log_2 a)=2(\log_2 3+\log_2 a)$

$\log_2 a=2\log_2 3-3=\log_2 9-\log_2 8=\log_2 \frac{9}{8}$

즉, $a=\frac{9}{8}$이므로

$$m=\frac{\log_2 2a}{2a}=\frac{\log_2 \frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}\log_2\left(\frac{3}{2}\right)^2=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{8}{9}}$$

따라서 $2^m=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{8}{9}}$

답 ④

다른 풀이

위의 풀이 과정에서 a의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\log_2 2a=2am$, $\log_2 3a=3am$에서

$2a=2^{2am}$, $3a=2^{3am}$이므로

$3a=2^{3am}=(2^{2am})^{\frac{3}{2}}=(2a)^{\frac{3}{2}}$

$3a=(2a)^{\frac{3}{2}}$의 양변을 제곱하면

$9a^2=8a^3$, $a^2(8a-9)=0$

$a>\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{9}{8}$

필수유형 8

$\mathrm{A}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, -\log_2(8-k))$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

$\log_2 k(8-k)=-2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때

$k(8-k)=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $4k^2-32k+1=0$

$0<k<8$이므로 $k=\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$

(ii) $\log_2 k(8-k)=2$일 때

$k(8-k)=2^2=4$, $k^2-8k+4=0$

$0<k<8$이므로 $k=4-2\sqrt{3}$ 또는 $k=4+2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$\left(\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2}\right)(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=\frac{1}{4}\times 4=1$$

답 ②

26

진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq 4$, $x<4$이므로 $0<x<4$이어야 한다.

$\log x+\log(x-4)^2=\log(12-3x)$에서

$\log x(x-4)^2=\log(12-3x)$

$x(x-4)^2=12-3x$, $(x-4)(x^2-4x+3)=0$

$(x-1)(x-3)(x-4)=0$

$0<x<4$이므로 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은 4이다.

답 4

27

(i) $\frac{x}{3}>1$, 즉 $x>3$일 때

$x^2+12\le 8x$, $x^2-8x+12\le 0$

$(x-2)(x-6)\le 0$, $2\le x\le 6$

$x>3$이므로 $3<x\le 6$

(ii) $0<\frac{x}{3}<1$, 즉 $0<x<3$일 때

$x^2+12\ge 8x$, $x^2-8x+12\ge 0$

$(x-2)(x-6)\ge 0$, $x\le 2$ 또는 $x\ge 6$

$0<x<3$이므로 $0<x\le 2$

(i), (ii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\le 2$ 또는 $3<x\le 6$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 4, 5, 6이고, 그 개수는 5이다.

답 5

28

연습일수가 P_1일 때의 반응시간이 T_1이므로

$\log T_1=K-\frac{1}{4}\log P_1$ ······ ㉠

연습일수가 P_2일 때의 반응시간이 T_2이므로

$\log T_2=K-\frac{1}{4}\log P_2$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\log T_1-\log T_2=-\frac{1}{4}(\log P_1-\log P_2)$

$P_2=10P_1$이므로

$$\log\frac{T_1}{T_2}=-\frac{1}{4}(\log P_1-\log 10P_1)=-\frac{1}{4}\log\frac{P_1}{10P_1}$$

$$=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{10}=-\frac{1}{4}\times(-1)=\frac{1}{4}$$

따라서 $\frac{T_1}{T_2}=10^{\frac{1}{4}}$

답 ④

필수유형 9

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식은

$y=2^{x-m}+2$ ······ ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식은

$y=\log_2 8(x-2)$ ······ ㉡

문제의 조건에서 함수 ㉡의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프가 나타내는 함수의 식은 ㉠이다.

㉡에서

$y=3+\log_2(x-2)$, $y-3=\log_2(x-2)$

$x-2=2^{y-3}$, $x=2^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-3}+2$

이 함수가 ㉠과 같아야 하므로 $m=3$

답 ③

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

29

$y=a^x-1$에서 $a^x=y+1$, $x=\log_a(y+1)$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_a(x+1)$
따라서 함수 $y=a^x-1$의 역함수는 $y=\log_a(x+1)$이다.
$a>1$이므로 두 함수 $y=a^x-1$, $y=\log_a(x+1)$은 모두 증가함수이고, 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.
$P(t, t)$ $(t>0)$이라 하면 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2}=t\sqrt{2}$
$t\sqrt{2}=8\sqrt{2}$에서 $t=8$
점 $P(8, 8)$이 함수 $y=a^x-1$의 그래프 위의 점이므로
$a^8-1=8$, $a^8=9$
따라서 $a^4=(a^8)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3$

답 3

30

$A(2, a^2)$, $B(2, \log_a 2)$이고 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$\overline{PA}=\overline{PD}=a^2-2$, $\overline{PB}=\overline{PC}=2-\log_a 2$
삼각형 PCB의 넓이가 $\frac{8}{9}$이므로
$\frac{1}{2}(2-\log_a 2)^2=\frac{8}{9}$
이때 $2-\log_a 2>0$이므로
$2-\log_a 2=\frac{4}{3}$에서 $\log_a 2=\frac{2}{3}$
$a^{\frac{2}{3}}=2$, $a=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$
따라서 삼각형 PDA의 넓이는
$\frac{1}{2}(a^2-2)^2=\frac{1}{2}\times(8-2)^2=18$

답 18

31

$f(x)=\log_a x+b$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$f(1)=2$에서 $\log_a 1+b=2$, $b=2$
함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $(1, 2)$를 지나고 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(1)=2$에서 $f(2)=1$
이때 $f(x)=\log_a x+2$이므로
$f(2)=1$에서 $\log_a 2+2=1$
$\log_a 2=-1$
$a^{-1}=2$, $a=\frac{1}{2}$
따라서 $a+b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 ④

필수유형 10

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 감소함수이므로 닫힌구간 $[0, 12]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(12)$이다.
$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}k=-2$, $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
$f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=-2\log_2 16=-8$이므로 $m=-8$
따라서 $k+m=4+(-8)=-4$

답 ④

32

함수 $f(x)=\log_3(2x+a)$는 증가함수이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=\log_3 a$이다.
$\log_3 a=-1$이므로 $a=3^{-1}=\frac{1}{3}$
따라서 $f(x)=\log_3\left(2x+\frac{1}{3}\right)$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(a)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 1=0$

답 ①

33

(i) $a>1$일 때
함수 $f(x)$는 증가함수이므로
$1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$이다.
$f(2)=a^2+2a^2=3a^2=1$이므로
$a^2=\frac{1}{3}$, $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$
이 경우는 $a>1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $0<a<1$일 때
함수 $f(x)$는 감소함수이므로
$1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.
$f(1)=a+2a^2=1$이므로
$2a^2+a-1=0$, $(2a-1)(a+1)=0$
$a=\frac{1}{2}$
(i), (ii)에서
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{2}$
따라서 $1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이므로
$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

답 ④

34

함수 $f(x)=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^x+1$은 감소함수이고
$f(-1)=9$, $f(0)=3$이므로
$-1\le x\le 0$에서 $3\le f(x)\le 9$
함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$는 감소함수이므로 함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$의 최댓값 M과 최솟값 m은
$M=g(3)=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$
$m=g(9)=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{3^{-1}}3^2=-2$
따라서 $M-m=-1-(-2)=1$

답 ①

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

02 삼각함수

본문 18~25쪽

필수유형 1 ③	01 ③	02 8	03 ③
필수유형 2 ①	04 ⑤	05 ④	06 ④
필수유형 3 ⑤	07 ⑤	08 ④	09 13
필수유형 4 ③	10 ⑤	11 ④	12 ①
필수유형 5 ②	13 ⑤	14 ④	15 ③
필수유형 6 ④	16 ②	17 ④	18 ⑤
	19 ③		
필수유형 7 ③	20 60	21 60	22 ③
필수유형 8 21	23 172	24 ②	25 6

필수유형 1

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 BOH는 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{OB}=r$, $\overline{OH}=\overline{BH}=r\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}r$

삼각형 BOH의 둘레의 길이가 $6(1+\sqrt{2})$이므로

$r+\frac{\sqrt{2}}{2}r+\frac{\sqrt{2}}{2}r=6(1+\sqrt{2})$

$(1+\sqrt{2})r=6(1+\sqrt{2})$, $r=6$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기 45°를 호도법으로 나타내면 $\frac{\pi}{4}$이므로

부채꼴 OAB의 호 AB의 길이는

$6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$

답 ③

01

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4=2$

부채꼴 AOP의 중심각의 크기를 θ_1이라 하면 부채꼴 AOP의 넓이가 $\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta_1=\frac{3}{4}\pi$, $\theta_1=\frac{3}{8}\pi$

부채꼴 BOP의 중심각의 크기를 θ_2라 하면

$\theta_2=\pi-\theta_1=\pi-\frac{3}{8}\pi=\frac{5}{8}\pi$

따라서 부채꼴 BOP의 호 BP의 길이는

$2\times\frac{5}{8}\pi=\frac{5}{4}\pi$

답 ③

02

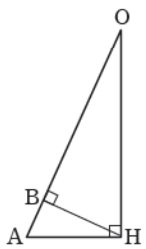
그림과 같이 직각삼각형 AHB에서

$\overline{AH}=2$, $\overline{BH}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

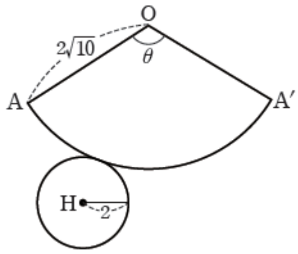


두 직각삼각형 AHB, AOH는 서로 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{AO}$에서

$\overline{AO}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{5}}=2\sqrt{10}$

한편, 주어진 원뿔의 전개도는 그림과 같다.



이때 원뿔의 옆면인 부채꼴 OAA′의 호 AA′의 길이가 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\sqrt{10}\times\theta=4\pi$

$\theta=\frac{4\pi}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$

부채꼴 OAA′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{10})^2\times\frac{\sqrt{10}}{5}\pi=4\sqrt{10}\pi$

이므로 원뿔의 겉넓이는

$4\pi+4\sqrt{10}\pi=(4+4\sqrt{10})\pi$

따라서 $p=4$, $q=4$이므로

$p+q=4+4=8$

답 8

03

$\angle MAT=60°=\frac{\pi}{3}$이고 $\angle OAT=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle OAM=\angle OAT-\angle MAT=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

두 삼각형 OAM과 OBM은 서로 합동이므로

$\angle OMA=\angle OMB=\frac{\pi}{2}$이고

$\angle BOM=\angle AOM=\frac{\pi}{2}-\angle OAM=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

이므로 $\angle COD=\angle BOM=\frac{\pi}{3}$

또 중심이 O인 원의 반지름이 $\overline{OC}$이므로

$\overline{OC}=\overline{OA}=\frac{\overline{OM}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

따라서 부채꼴 ODC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

답 ③

필수유형 2

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2+\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=1-\frac{21}{49}=\frac{28}{49}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{-\frac{2\sqrt{7}}{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ①

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

04

$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+4^2}=\sqrt{a^2+16}$

$\sin\theta=\dfrac{4}{r}=\dfrac{4}{\sqrt{a^2+16}}=\dfrac{1}{3}$에서

$r=12,\ a^2=128$

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$이므로

$r\cos^2\theta=r\times\left(\dfrac{a}{r}\right)^2=\dfrac{a^2}{r}=\dfrac{128}{12}=\dfrac{32}{3}$

답 ⑤

05

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sqrt{(2\cos\theta+\sin\theta)^2}=|2\cos\theta+\sin\theta|=-2\cos\theta-\sin\theta$

$|2\cos\theta|=-2\cos\theta$

그러므로

$\sqrt{(2\cos\theta+\sin\theta)^2}+|2\cos\theta|+\sin\theta$

$=-2\cos\theta-\sin\theta-2\cos\theta+\sin\theta$

$=-4\cos\theta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=0$에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$이므로

반지름의 길이가 1인 원 위의

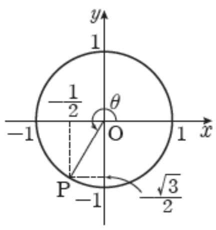
점 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에 대하여 동경 OP가

나타내는 각의 크기가 θ이므로

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

따라서 ㉠에서

$-4\cos\theta=-4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$



답 ④

다른 풀이

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이고 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=0$에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$이므로 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

따라서 $\sin\theta=\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\sqrt{(2\cos\theta+\sin\theta)^2}+|2\cos\theta|+\sin\theta$

$=\sqrt{\left\{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2}+\left|2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$

06

세 점 $\mathrm{A}(-2,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, C′이라 하면

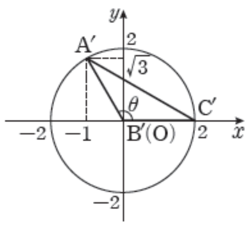
$\mathrm{A'}(-1,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B'}(0,\ 0)$, $\mathrm{C'}(2,\ 0)$

이때 $\angle\mathrm{A'B'C'}=\angle\mathrm{ABC}=\theta$이고

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$



따라서 $4(\sin^2\theta-\cos\theta)=4\left\{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=5$

답 ④

다른 풀이

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BH}}=1$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 $\angle\mathrm{ABH}=60°$, 즉 $\theta=120°$이다.

따라서 $\sin\theta=\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$이므로

$4(\sin^2\theta-\cos\theta)=4\left\{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=5$

필수유형 3

$\cos\dfrac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\cos\dfrac{13}{6}\pi+\sqrt{6}\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

07

$\cos\dfrac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\dfrac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서

$\left(3-2\sqrt{2}\cos\dfrac{5}{6}\pi\right)\left(3+2\sqrt{3}\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

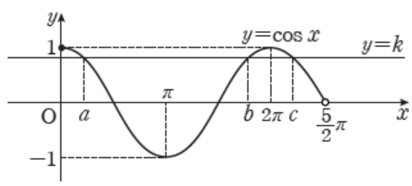
$=\left\{3-2\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{3+2\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

$=(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$

$=3$

답 ⑤

08



그림과 같이 직선 $y=k\ (0<k<1)$과 곡선 $y=\cos x$가 만나는 점의 x좌표 a, b, c에 대하여

$\dfrac{a+b}{2}=\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠, $\dfrac{b+c}{2}=2\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$b=\dfrac{11}{6}\pi$일 때,

㉠에서 $a=2\pi-\dfrac{11}{6}\pi=\dfrac{\pi}{6}$, ㉡에서 $c=4\pi-\dfrac{11}{6}\pi=\dfrac{13}{6}\pi$

따라서 $a+c=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{7}{3}\pi$이므로

$\sin(a+c)=\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

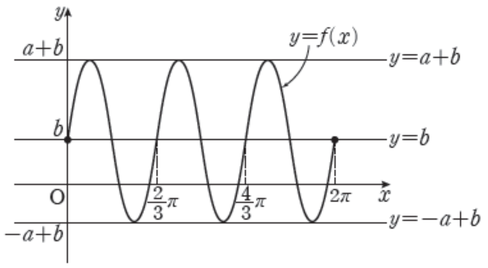
답 ④

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

09

함수 $f(x)=a\sin 3x+b$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

조건 (가)에서 $f(0)=b>1$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그림에서 자연수 n에 대하여 $g(n)$은 반드시 0, 3, 6, 7 중 하나의 값을 갖는다.

조건 (다)에서 28은 3의 배수가 아니므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ 중 적어도 하나는 7의 값을 갖는다.

또 그래프의 개형에서 두 개 이상이 7의 값을 가질 수 없으므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ 중 오직 하나만 7의 값을 갖는다. $g(m_1)=7$이라 하자.

$21=28-7$은 6의 배수가 아니므로 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$에서 $g(m_1)$을 제외한 4개 중에서 3의 값을 갖는 것은 홀수 개이다. 만약 3개가 3의 값을 갖는다면 조건 (다)를 만족시킬 수 없으므로 오직 하나만 3의 값을 갖는다. $g(m_2)=3$이라 하자.

이제 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$에서 $g(m_1)$과 $g(m_2)$를 제외한 3개는 0과 6 중 하나의 값을 갖는다. 이것들의 합이 $18=28-(7+3)$이므로 모두 6의 값을 갖는다.

즉, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$는 각각 3, 6, 6, 6, 7 중 하나의 값을 갖는다.

조건 (가)에서 $b>1$이므로 $g(1)\ne 7$

$g(5)=7$ 또는 $g(4)=7$이면 $g(1)=3$이어야 하므로 조건 (나)에 모순이다.

$g(3)=7$이면 역시 조건 (나)에 모순이다.

이상에서 $g(2)=7$, $g(5)=3$, $g(1)=g(3)=g(4)=6$이므로

$b=2$이고, $a+b=5$에서 $a=3$이다.

따라서 $a^2+b^2=3^2+2^2=13$

답 13

필수유형 4

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$에서

$x-\frac{3}{4}\pi=t$라 하면 $x=t+\frac{3}{4}\pi$, $x-\frac{\pi}{4}=t+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}f\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)&=\cos^2 t-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+k\\&=(1-\sin^2 t)-(-\sin t)+k\\&=-\sin^2 t+\sin t+k+1\\&=-\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

모든 실수 t에 대하여 $-1\le\sin t\le 1$이므로

함수 $f\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 가지므로

$k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$

또 함수 $f\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin t=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$m=k-1=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

답 ③

10

함수 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+b$에서

$-a+b\le f(x)\le a+b$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$-a+b=1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3+\sqrt{3}$에서

$a\sin\frac{\pi}{3}+b=3+\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a+b=3+\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$a+b=2+3=5$

답 ⑤

11

$a\cos\left(\frac{5}{12}\pi-ax\right)=a\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)\right\}=a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=3a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+a\cos\left(\frac{5}{12}\pi-ax\right)+b\\&=4a\sin\left(ax+\frac{\pi}{12}\right)+b\end{aligned}$$

함수 $f(x)$의 주기가 4π이므로

$\frac{2\pi}{a}=4\pi$에서 $a=\frac{1}{2}$

$-4a+b\le f(x)\le 4a+b$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$-4a+b=1$ …… ㉠

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)+3$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+3=2\times\frac{1}{2}+3=4$

답 ④

12

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3k-1$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$=\cos^2 x+2k\sin x+3k-1$

$=1-\sin^2 x+2k\sin x+3k-1$

$=-(\sin x-k)^2+k^2+3k$

$0\le x\le 2\pi$일 때, $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-(t-k)^2+k^2+3k$

이때 $f(t)=-(t-k)^2+k^2+3k$라 하자.

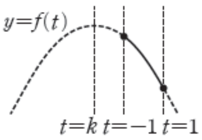
(i) $k<-1$일 때

$f(t)$의 최댓값은 $f(-1)=-3$이므로

$-(-1-k)^2+k^2+3k=-3$

$-1+k=-3$

$k=-2$



(ii) $-1\le k<1$일 때

$f(t)$의 최댓값은 $f(k)=-3$이므로

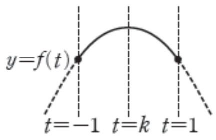
$k^2+3k=-3$

$k^2+3k+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times 3=-3<0$

이므로 $-1\le k<1$에서 실수 k의 값은 존재하지 않는다.



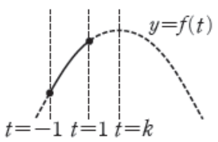
(iii) $k\ge 1$일 때

$f(t)$의 최댓값은 $f(1)=-3$이므로

$-(1-k)^2+k^2+3k=-3$

$-1+5k=-3$

$k=-\frac{2}{5}$



그런데 $k=-\frac{2}{5}$는 $k\ge 1$을 만족시키지 못한다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=-2$이므로

$f(t)=-(t+2)^2-2\ (-1\le t\le 1)$

함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 m을 가지므로

$m=f(1)=-11$

따라서 $k+m=-2+(-11)=-13$

답 ①

필수유형 5

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$4\sin^2 x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$에서 $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$ ...... ㉠

$0\le x<4\pi$일 때, $2\sin x+3>0$이므로 ㉠에서

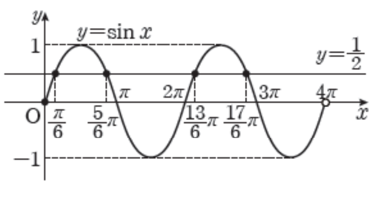
$2\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<4\pi$일 때, 방정식

$\sin x=\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는

$x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{6}\pi$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{13}{6}\pi+\frac{17}{6}\pi=6\pi$

답 ②

13

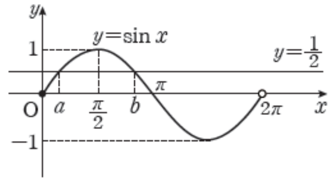
$0\le x<2\pi$일 때, 함수

$y=\sin x$의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표를

a, b라 하면

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$



그러므로 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 모든 해의 합은

$\alpha=a+b=\pi$

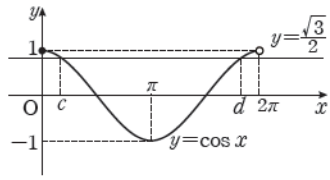
$0\le x<2\pi$일 때, 함수

$y=\cos x$의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 점의 x좌표

를 c, d라 하면

$\frac{c+d}{2}=\pi$



그러므로 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 모든 해의 합은

$\beta=c+d=2\pi$

따라서 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

답 ⑤

14

$\sin^2\theta-3\cos^2\theta=0$에서 $\sin^2\theta=3\cos^2\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=3$, 즉 $\tan^2\theta=3$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, $\tan\theta>0$이므로 $\tan\theta=\sqrt{3}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ④

다른 풀이

$\sin^2\theta-3\cos^2\theta=0$에서 $\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)=0$

$4\sin^2\theta=3$, $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

15

$\{\sin(2x)+\cos(2x)\}^2-\sin(2x)-1=0$에서

$\sin^2(2x)+\cos^2(2x)+2\sin(2x)\cos(2x)-\sin(2x)-1=0$

$\sin^2(2x)+\cos^2(2x)=1$이므로

$2\sin(2x)\cos(2x)-\sin(2x)=0$

$\sin(2x)\{2\cos(2x)-1\}=0$

$\sin(2x)=0$ 또는 $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$0 \le x < \pi$에서 $0 \le 2x < 2\pi$이므로

$\sin(2x)=0$을 풀면

$2x=0$ 또는 $2x=\pi$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$\cos(2x)=\frac{1}{2}$을 풀면

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{5}{3}\pi$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 방정식의 모든 해의 합은

$0+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 ③

필수유형 6

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않으려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$, $2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$ ...... ㉠

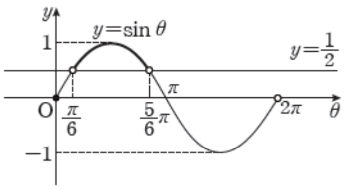
$0 \le \theta < 2\pi$일 때, $\sin\theta+2>0$이므로 ㉠에서

$2\sin\theta-1>0$, $\sin\theta>\frac{1}{2}$

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, 부등식

$\sin\theta>\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$3\alpha+\beta=3\times\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

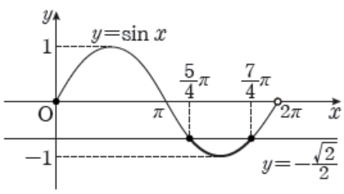
16

$2\sin x+\sqrt{2}\le 0$에서 $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식

$\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{5}{4}\pi$, $\beta=\frac{7}{4}\pi$이므로

$\cos\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 ②

17

$2\sin^2 x-7\cos(\pi-x)<5$에서

$2(1-\cos^2 x)-7(-\cos x)<5$

$2\cos^2 x-7\cos x+3>0$

$(2\cos x-1)(\cos x-3)>0$ ...... ㉠

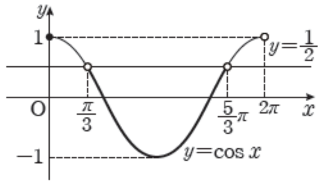
$0 \le x < 2\pi$일 때, $\cos x-3<0$이므로 ㉠에서

$2\cos x-1<0$, $\cos x<\frac{1}{2}$

$0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식

$\cos x<\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

18

$\cos^2\theta+4\sin\theta\le 2(a-2)$에서

$(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta\le 2(a-2)$, $\sin^2\theta-4\sin\theta+2a-5\ge 0$

$\sin\theta=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

이고 주어진 부등식은

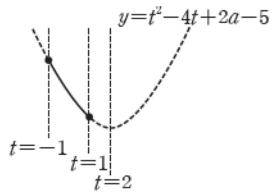
$t^2-4t+2a-5\ge 0$

$(t-2)^2+2a-9\ge 0$

$-1\le t\le 1$일 때,

함수 $y=t^2-4t+2a-5$는 $t=1$에서

최솟값을 가지므로



$1-4+2a-5\ge 0$에서 $a\ge 4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

답 ⑤

19

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-(2\sin\theta+1)x+1>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-(2\sin\theta+1)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$D=(2\sin\theta+1)^2-4<0$, $4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$

$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$ ...... ㉠

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, $2\sin\theta+3>0$이므로 ㉠에서

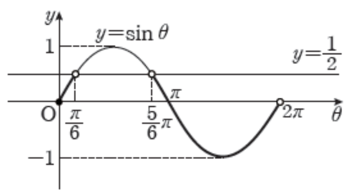
$2\sin\theta-1<0$, $\sin\theta<\frac{1}{2}$

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, 부등식

$\sin\theta<\frac{1}{2}$을 만족시키는 모든

θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$



따라서 $a=0$, $b=\frac{\pi}{6}$, $c=\frac{5}{6}\pi$, $d=2\pi$이므로

$a+b+2c+2d=0+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{3}\pi+4\pi=\frac{35}{6}\pi$

답 ③

필수유형 7

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times 15$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

따라서 선분 AC의 길이는

$\overline{AC}=2\times15\times\sin B=2\times15\times\frac{7}{10}=21$

답 ③

20

$\angle A+\angle B+\angle C=180°$에서

$\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-120°=60°$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°}=2\times20\sqrt{3}$

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=2\times20\sqrt{3}\times\sin 60°=2\times20\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=60$

답 60

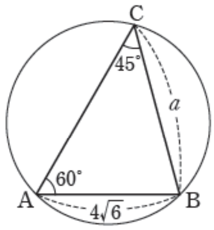
21

$\angle A+\angle B+\angle C=180°$이고

$\angle A:\angle B:\angle C=4:5:3$이므로

$\angle A=60°,\ \angle C=45°$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여



$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45°}=2R$에서

$a=\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45°}\times\sin 60°=\frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$

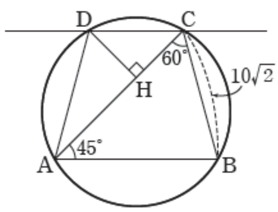
$R=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45°}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{3}$

따라서 $a+R^2=12+(4\sqrt{3})^2=60$

답 60

22

삼각형 ABC에서



$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)$

$\quad=180°-(45°+60°)=75°$

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$이므로

$\angle ACD=\angle CAB=45°$

$\angle BAD=180°-\angle BCD$

$\quad=180°-(60°+45°)=75°$

$\angle CAD=\angle BAD-\angle CAB=75°-45°=30°$

$\overline{AD}=\overline{BC}=10\sqrt{2}$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$

$\frac{\overline{CD}}{\sin 30°}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 45°}$

$\overline{CD}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 45°}\times\sin 30°=\frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=10$

삼각형 CDH에서

$\overline{DH}=\overline{CD}\times\sin(\angle DCH)=\overline{CD}\times\sin 45°=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

답 ③

필수유형 8

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times7$

$\overline{BC}=2\times7\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$ …… ㉠

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이고 $\overline{AC}=k\ (k>0)$이므로 $\overline{AB}=3k$이다.

이때 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$\quad=9k^2+k^2-2\times3k\times k\times\frac{1}{2}$

$\quad=7k^2$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{7}k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$이므로 $k=\sqrt{21}$

따라서 $k^2=21$

답 21

23

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle ADC=180°$에서

$\angle ABC=180°-\angle ADC$

$\cos(\angle ABC)=\cos(180°-\angle ADC)$

$\quad=-\cos(\angle ADC)$ …… ㉠

또한 $\sin(\angle ADC)=\frac{4\sqrt{5}}{9}$이고 $0°<\angle ADC<90°$이므로

$\cos(\angle ADC)=\sqrt{1-\sin^2(\angle ADC)}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)^2}=\frac{1}{9}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\cos(\angle ABC)=-\frac{1}{9}$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$k^2=\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{172}{3}$

따라서 $3k^2=172$

답 172

24

$\overline{CE}=x$라 하면 $\overline{AG}=x+2$이므로

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=9^2+8^2-2\times9\times8\times\cos(\angle CDE)$

$\cos(\angle CDE)=\frac{9^2+8^2-x^2}{2\times9\times8}$ …… ㉠

삼각형 ADG에서 코사인법칙에 의하여

$(x+2)^2=9^2+8^2-2\times9\times8\times\cos(\angle ADG)$

$\cos(\angle ADG)=\frac{9^2+8^2-(x+2)^2}{2\times9\times8}$ …… ㉡

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$\angle CDE + \angle ADG = \pi$이므로

$\cos(\angle ADG) = \cos(\pi - \angle CDE)$

$= -\cos(\angle CDE)$ ...... ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$x^2+2x-143=0$, $(x-11)(x+13)=0$에서 $x=11$

$x=11$을 ㉠에 대입하면

$\cos(\angle CDE) = \dfrac{9^2+8^2-11^2}{2\times9\times8} = \dfrac{1}{6}$

따라서 삼각형 CED의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times9\times8\times\sin(\angle CDE) = 36\sqrt{1-\cos^2(\angle CDE)}$

$= 36\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$= 6\sqrt{35}$

답 ②

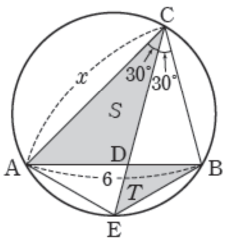
25

직선 CD가 $\angle ACB$를 이등분하므로 $\angle ACE = \angle ECB = 30°$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60°} = 2R$

$R = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60°} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$



$\overline{CA} = \overline{CE}$인 이등변삼각형 AEC에서

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 30°} = 2\times2\sqrt{3}$

$\overline{AE} = 2\times2\sqrt{3}\times\sin 30°$

$= 2\times2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = 2\sqrt{3}$

$\overline{CA} = \overline{CE} = x$라 하면 삼각형 AEC에서

코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2 = x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos 30°$

$12 = (2-\sqrt{3})x^2$

$x^2 = \dfrac{12}{2-\sqrt{3}} = 12(2+\sqrt{3})$

(삼각형 AEC의 넓이)$=S+$(삼각형 AED의 넓이)이고

(삼각형 AEC의 넓이)$= \dfrac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{CE}\times\sin 30° = \dfrac{1}{2}\times x\times x\times\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{1}{4}\times12(2+\sqrt{3}) = 3(2+\sqrt{3})$

이므로 $S+$(삼각형 AED의 넓이)$=3(2+\sqrt{3})$ ...... ㉠

한편, $\angle ECB$와 $\angle EAB$는 호 EB에 대한 원주각이므로

$\angle EAB = \angle ECB = 30°$

(삼각형 AEB의 넓이)$=T+$(삼각형 AED의 넓이)이고

(삼각형 AEB의 넓이)$= \dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AE}\times\sin 30°$

$= \dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = 3\sqrt{3}$

이므로 $T+$(삼각형 AED의 넓이)$=3\sqrt{3}$ ...... ㉡

따라서 ㉠$-$㉡을 하면

$S-T = 3(2+\sqrt{3}) - 3\sqrt{3} = 6$

답 6

03 수열

본문 28~39쪽

필수유형 1 ③	01 ②	02 ⑤	03 ①
필수유형 2 ②	04 ⑤	05 ②	06 512
필수유형 3 4	07 ②	08 256	09 ④
필수유형 4 96	10 ①	11 ④	
필수유형 5 ③	12 ③	13 ⑤	
필수유형 6 ④	14 ④	15 49	16 ④
필수유형 7 14	17 ②	18 10	19 25
	20 14		
필수유형 8 91	21 ②	22 10	23 5
	24 410		
필수유형 9 9	25 ⑤	26 ②	27 ②
필수유형 10 ③	28 ①	29 15	30 ③
	31 37		
필수유형 11 33	32 33	33 110	34 ③
	35 10		
필수유형 12 ④	36 ③		

필수유형 1

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2+a_4 = (a_1+d)+(a_1+3d) = 2(a_1+2d) = 16$

$a_1+2d = 8$ ...... ㉠

$a_1-a_3+a_5-a_7 = (a_1-a_3)+(a_5-a_7) = (-2d)+(-2d)$

$= -4d = -12$

에서 $d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$

따라서 $a_{10} = 2+9\times3 = 29$

답 ③

01

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$a_2+b_4=8$에서 $(a_1+b_1)+(d_1+3d_2)=8$ ...... ㉠

$a_5+b_{13}=23$에서 $(a_1+b_1)+4(d_1+3d_2)=23$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3(d_1+3d_2)=15$, $d_1+3d_2=5$ ...... ㉢

따라서 ㉢을 ㉠에 대입하면 $a_1+b_1=3$

답 ②

02

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_m=6$에서 $a+(m-1)d=6$이므로

$a+md-d=6$ ...... ㉠

$a_{2m}=18$에서 $a+(2m-1)d=18$이므로

$a+2md-d=18$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $md=12$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

따라서

$a_{3m+2}=a+(3m+1)d=(a+d)+3md=a_2+3\times12=a_2+36$

이므로 $k=36$이다.

답 ⑤

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 p라 할 때, 일반항을

$a_n=pn+q$ (q는 상수)라 하면

$a_m=6$에서 $pm+q=6$ …… ㉠

$a_{2m}=18$에서 $2pm+q=18$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면 $pm=12$

따라서

$a_{3m+2}=(3m+2)p+q=(2p+q)+3mp=a_2+3\times12=a_2+36$

이므로 $k=36$이다.

03

등차수열 $\{a_n\}$에서 정수인 공차를 d라 하면

$d\le0$일 때, 이 등차수열의 모든 항은 음수가 되므로

$a_ma_{m+3}>0$이어서 조건을 만족시킬 수 없다.

$d>0$일 때, 이 등차수열은 모든 자연수 m에 대하여 $a_m<a_{m+1}$이고,

$a_ma_{m+3}<0$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 24이므로

$a_{26}\le0$, $a_{27}>0$이어야 한다.

$a_{26}=-51+25d\le0$에서 $d\le\frac{51}{25}=2.04$

$a_{27}=-51+26d>0$에서 $d>\frac{51}{26}>1$

따라서 $d=2$이므로

$a_6=-51+5\times2=-41$

답 ①

필수유형 2

$S_3-S_2=a_3$이므로 $a_6=2(S_3-S_2)$에서

$a_6=2a_3$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2+5d=2(2+2d)$, $2+5d=4+4d$

이므로 $d=2$

따라서 $a_{10}=2+9\times2=20$이므로

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(2+20)}{2}=110$

답 ②

04

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 2이므로

$S_{10}=a_{64}$에서

$\frac{10\{2a+(10-1)\times2\}}{2}=a+(64-1)\times2$

$10a+90=a+126$

$9a=36$, $a=4$

따라서 $a_{10}=4+(10-1)\times2=22$

답 ⑤

05

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{5(2a+4d)}{2}=45$에서 $a+2d=9$ …… ㉠

$\frac{9(2a+8d)}{2}=117$에서 $a+4d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=2$

따라서 $a_7=5+6\times2=17$

답 ②

06

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 모든 항이 0이 아닌 정수이므로

$a_n\ne0$에서 $(n-1)d\ne15$

즉, d는 15의 양의 약수가 아니어야 한다. …… ㉠

또한 2 이상의 자연수 m에 대하여

$S_m=\frac{m\{2\times(-15)+(m-1)d\}}{2}=0$

$(m-1)d=30$

에서 d는 30의 양의 약수이어야 한다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $d=2$, 6, 10, 30

(i) $d=2$일 때, $m=16$이므로

$S_{2m}=\frac{32\{2\times(-15)+31\times2\}}{2}=512$

(ii) $d=6$일 때, $m=6$이므로

$S_{2m}=\frac{12\{2\times(-15)+11\times6\}}{2}=216$

(iii) $d=10$일 때, $m=4$이므로

$S_{2m}=\frac{8\{2\times(-15)+7\times10\}}{2}=160$

(iv) $d=30$일 때, $m=2$이므로

$S_{2m}=\frac{4\{2\times(-15)+3\times30\}}{2}=120$

(i)~(iv)에서 구하는 최댓값은 512이다.

답 512

필수유형 3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$a_2=36$에서 $ar=36$

$a_7=\frac{1}{3}a_5$에서 $ar^6=\frac{1}{3}ar^4$, $r^2=\frac{1}{3}$

따라서 $a_6=ar^5=ar\times(r^2)^2=36\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=4$

답 4

07

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$\frac{a_3-a_5}{a_4}=\frac{a_3(1-r^2)}{a_3\times r}=\frac{1-r^2}{r}$

$\frac{1-r^2}{r}=\frac{3}{2}$에서

$2r^2+3r-2=0$, $(2r-1)(r+2)=0$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_6=160\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=5$

답 ②

08

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$\log_2\frac{a_4}{a_2}+\log_2\frac{a_5}{a_3}+\log_2\frac{a_6}{a_4}+\log_2\frac{a_7}{a_5}$

$=\log_2\left(\frac{a_4}{a_2}\times\frac{a_5}{a_3}\times\frac{a_6}{a_4}\times\frac{a_7}{a_5}\right)=\log_2\frac{a_6\times a_7}{a_2\times a_3}$

$=\log_2 r^8=8\log_2 r$

$8\log_2 r=10$에서 $\log_2 r=\frac{5}{4}$이므로 $r=2^{\frac{5}{4}}$

따라서 $a_9=\frac{1}{4}\times\left(2^{\frac{5}{4}}\right)^8=2^8=256$

답 256

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

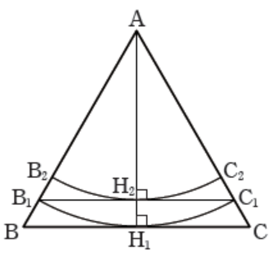
$\frac{a_{n+2}}{a_n}=r^2$이므로

$\log_2\frac{a_4}{a_2}+\log_2\frac{a_5}{a_3}+\log_2\frac{a_6}{a_4}+\log_2\frac{a_7}{a_5}=\log_2(r^2)^4=\log_2 r^8$

$\log_2 r^8=10$에서 $r^8=2^{10}$

따라서 $a_9=\frac{1}{4}\times r^8=\frac{1}{4}\times2^{10}=2^8=256$

09



변 BC와 호 B_1C_1이 만나는 점을 H_1이라 하면 삼각형 ABH_1은 변 AB가 빗변이고 $\angle ABH_1=\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB_1}=\overline{AH_1}=\overline{AB}\sin 60^\circ$

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

부채꼴 AB_1C_1은 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$이고 중심각의 크기가 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$이므로 호 B_1C_1의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\pi$

두 정삼각형 ABC, AB_1C_1의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{AB_1}=6:3\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$

마찬가지 방법으로 구하면 자연수 n에 대하여 두 정삼각형 AB_nC_n, $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $2:\sqrt{3}$이다.

따라서 호 B_nC_n의 길이 a_n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{3}\pi$이고 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$a_5=\sqrt{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$

답 ④

필수유형 4

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공비가 $r\ (r>0,\ r\neq1)$이므로

$$\frac{S_9}{a_1+a_4+a_7}=\frac{\frac{3(1-r^9)}{1-r}}{3+3r^3+3r^6}=\frac{(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{(1-r)(1+r^3+r^6)}$$

$$=\frac{(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=1+r+r^2$$

즉, $1+r+r^2=r+5$에서 $r^2=4$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서 $a_6=3\times2^5=96$

답 96

10

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면 $a_3+a_5=24$에서

$\frac{6}{5}\times(r^2+r^4)=24$, $(r^2)^2+r^2-20=0$, $(r^2+5)(r^2-4)=0$

$r^2>0$이므로 $r^2=4$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10}=S$라 하면 S는 첫째항이 $\frac{6}{5}$이고 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$10(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10})=10S$

$$=10\times\frac{\frac{6}{5}\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}$$

$$=-4092$$

답 ①

11

원 $x^2+y^2=\frac{1}{4^n}$의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2^n}$이므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 이 원에 접하는 직선 l_n의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^n}\times\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$

직선 l_n이 x축, y축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2^n},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}\right)$이므로 직선 l_n과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 a_n은

$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2^n}\times\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}=\frac{5}{16}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{5}{16}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{\frac{5}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

답 ④

필수유형 5

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$이므로 $n=11$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

(ⅱ) $\alpha=n-4$, $\beta=4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$이므로 $n=\frac{13}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

12

등차수열 $\{a_n\}$에서 등차중항을 이용하면

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{3},\ a_6=\frac{a_5+a_7}{2}=\frac{\frac{26}{3}}{2}=\frac{13}{3}\text{이므로}$$

$$a_4=\frac{a_2+a_6}{2}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{13}{3}}{2}=3$$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3=\frac{10}{3}$에서 $a+(a+2d)=\frac{10}{3}$

$a+d=\frac{5}{3}$ …… ㉠

$a_5+a_7=\frac{26}{3}$에서 $(a+4d)+(a+6d)=\frac{26}{3}$

$a+5d=\frac{13}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=\frac{2}{3}$

따라서 $a_4=a+3d=1+3\times\frac{2}{3}=3$

13

조건 (가)에서 $2p=10+q$ …… ㉠

조건 (나)에서 세 수 $2p$, $6\sqrt{2}$, $3q$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(6\sqrt{2})^2=2p\times3q$, $pq=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6$, $q=2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{a_{20}-a_q}{a_{10}-a_p}=\frac{a_{20}-a_2}{a_{10}-a_6}=\frac{(a+19d)-(a+d)}{(a+9d)-(a+5d)}=\frac{18d}{4d}=\frac{9}{2}$$

답 ⑤

필수유형 6

$S_n=2^{n+1}-3$에서

$a_1=S_1=2^2-3=1$

$n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-3)-(2^n-3)=2^n$

따라서

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a_{13}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{13}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{14}}\right)$$

답 ④

14

$$a_4=S_4-S_3=\frac{4+k}{5}-\frac{3+k}{4}=\frac{1-k}{20}$$

$\frac{1-k}{20}=-2$에서 $1-k=-40$

따라서 $k=41$

답 ④

15

$S_n=n^2+2n$에서

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ⅱ) $n\ge2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=2n+1\ (n\ge1)$

$a_k>1$이고 $\log a_k\le2$에서

$0<\log(2k+1)\le2$, $1<2k+1\le100$

$0<k\le\frac{99}{2}=49.5$

따라서 구하는 자연수 k의 최댓값은 49이다.

답 49

16

$S_4-S_3=2$에서 $a_4=2$

$S_7-S_6=300$에서 $a_7+a_6=300$ …… ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_7=a_4\times r^3=2r^3$, $a_6=a_4\times r^2=2r^2$

이므로 ㉠에 대입하면

$2r^3+2r^2=300$, $r^3+r^2-150=0$

$(r-5)(r^2+6r+30)=0$

이때 $r^2+6r+30>0$이므로 $r=5$

따라서 $a_6=2\times5^2=50$

답 ④

필수유형 7

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18$ …… ㉠

또 $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$ …… ㉡

㉡$\times2-$㉠을 하면 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$

답 14

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

17

$\sum_{k=1}^{15}(3a_k-10)=3\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}10=3\times 250-10\times 15=600$

답 ②

18

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times 6+3\sum_{k=1}^{10}b_k=12+3\sum_{k=1}^{10}b_k$

$12+3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$에서 $3\sum_{k=1}^{10}b_k=30$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}b_k=10$

답 10

19

$P-Q=\sum_{k=1}^{m}(a_k+1)(a_k-2)-\sum_{k=1}^{m}(a_k+2)(a_k-3)$

$=\sum_{k=1}^{m}\{(a_k)^2-a_k-2\}-\sum_{k=1}^{m}\{(a_k)^2-a_k-6\}$

$=\sum_{k=1}^{m}\{(a_k)^2-a_k-2-(a_k)^2+a_k+6\}$

$=\sum_{k=1}^{m}4=4m$

$4m=100$에서 $m=25$

답 25

20

$\sum_{k=1}^{20}\{(k+1)a_k-ka_{k+1}\}$

$=(2a_1-a_2)+(3a_2-2a_3)+(4a_3-3a_4)+\cdots+(21a_{20}-20a_{21})$

$=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})-20a_{21}$

$=2\sum_{k=1}^{20}a_k-20a_{21}$

$=2\times 400-20a_{21}$

$=800-20a_{21}$

$800-20a_{21}=520$에서 $20a_{21}=280$

따라서 $a_{21}=14$

답 14

필수유형 8

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)=\sum_{n=1}^{7}(n^2-2n+1)=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$

$=\frac{6\times 7\times 13}{6}=91$

답 91

21

$\sum_{k=1}^{10}(k-2)(k^2+2k+4)=\sum_{k=1}^{10}(k^3-8)=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}8$

$=\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2-8\times 10=2945$

답 ②

22

$\sum_{k=1}^{n}(n+2k)=\sum_{k=1}^{n}n+2\sum_{k=1}^{n}k=n\times n+2\times\frac{n(n+1)}{2}=2n^2+n$

$2n^2+n=210$에서 $2n^2+n-210=0$, $(n-10)(2n+21)=0$

n은 자연수이므로 $n=10$

답 10

23

$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$이므로

$\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=6\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{2n}k^2=7\sum_{k=1}^{n}k^2$

$\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}=7\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$2(4n+1)=7(n+1)$, $8n+2=7n+7$

따라서 $n=5$

답 5

24

$\frac{x+3}{x+2}=x$에서 $x+3=x^2+2x$, $x^2+x-3=0$

α, β는 이차방정식 $x^2+x-3=0$의 두 근이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x-3$

$\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-3)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}-3\times 10$

$=385+55-30=410$

답 410

필수유형 9

이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

즉, $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$ 또는 $\alpha_n=n-1$, $\beta_n=n$이므로

$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$

$=\sqrt{81}-0=9$

답 9

25

등차수열의 합의 공식에서

$S_n=\frac{n\{4+(n-1)\times 2\}}{2}=n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

답 ⑤

26

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

$\sqrt{n+1}-1=6$에서 $\sqrt{n+1}=7$이므로 $n=48$

$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k-2}}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2})$

$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{4}-\sqrt{1})+(\sqrt{7}-\sqrt{4})+(\sqrt{10}-\sqrt{7})+\cdots$

$+(\sqrt{6n+1}-\sqrt{6n-2})\}$

$=\frac{1}{3}(\sqrt{6n+1}-1)$

따라서 $n=48$을 대입하면

$\frac{1}{3}(\sqrt{289}-1)=\frac{17-1}{3}=\frac{16}{3}$

답 ②

27

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공차가 $2a$이므로

$a_n=a+(n-1)\times 2a=2an-a$ ······ ㉠

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)\times 2a\}}{2}=100a$

$100a=300$에서 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $a_n=6n-3$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(6k-3)(6k+3)}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{18}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{189}$

답 ②

필수유형 10

$a_1=1$이므로 $a_4=a_1+1=2$이고

$a_{11}=2a_4+1=2\times 2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

28

$a_2=2a_1+1=2\times 1+1=3$

$a_3=2a_2+1=2\times 3+1=7$

$a_4=2a_3+1=2\times 7+1=15$

$a_5=2a_4+1=2\times 15+1=31$

답 ①

29

$b_1=a_1+a_2$

$b_2=a_2+a_3$

$b_3=a_3+a_4$

$b_4=a_4+a_5$

따라서 변끼리 더하면

$b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_5+2(a_2+a_3+a_4)=10+2(a_2+a_3+a_4)$

즉, $10+2(a_2+a_3+a_4)=40$에서 $a_2+a_3+a_4=15$

답 15

30

주어진 관계식에 따라 수열 $\{a_n\}$의 항의 값을 구하면

$a_3=a_1+2=1+2=3$

$a_4=2a_2$

$a_5=a_3+2=3+2=5$

$a_4=a_5$이므로 $2a_2=5$에서 $a_2=\frac{5}{2}$

답 ③

31

$n=7$일 때, $a_8=a_7+7+2=a_7+9$에서

$a_8-a_7=9$ ······ ㉠

$n=8$일 때, $a_9=a_8+2\times 8+1=a_8+17$에서

$a_9-a_8=17$ ······ ㉡

$n=9$일 때, $a_{10}=a_9+9+2=a_9+11$에서

$a_{10}-a_9=11$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $a_{10}-a_7=37$

답 37

필수유형 11

$a_1=9$, $a_2=3$이고

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_3=a_2-a_1=-6$

$n=2$일 때, $a_4=a_3-a_2=-9$

$n=3$일 때, $a_5=a_4-a_3=-3$

$n=4$일 때, $a_6=a_5-a_4=6$

$n=5$일 때, $a_7=a_6-a_5=9$

$n=6$일 때, $a_8=a_7-a_6=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 차례대로 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.

이때 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$이므로 구하는 100 이하의 자연수 k의 개수는 $16\times2+1=33$

답 33

32

$a_2=\dfrac{1}{1-a_1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$a_3=\dfrac{1}{1-a_2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$

$a_4=\dfrac{1}{1-a_3}=\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$

따라서

$a_1=a_4=a_7=\cdots=\dfrac{1}{2}$

$a_2=a_5=a_8=\cdots=2$

$a_3=a_6=a_9=\cdots=-1$

즉, m이 3의 배수일 때, $a_m=-1$이다.

또한 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 33이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 m의 개수는 33이다.

답 33

33

$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{10}\{(-1)^{2k}\times2k\}=2\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\times\dfrac{10\times11}{2}=110$

답 110

34

$a_1=2$, $a_2=5$이고

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=10$에서 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_1+a_2+a_3=10$에서 $a_3=3$

$n=2$일 때, $a_2+a_3+a_4=10$에서 $a_4=2$

$n=3$일 때, $a_3+a_4+a_5=10$에서 $a_5=5$

$n=4$일 때, $a_4+a_5+a_6=10$에서 $a_6=3$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 2, 5, 3이 차례대로 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+3}$이 성립한다.

$a_{10}=a_7=a_4=a_1=2$

$a_{20}=a_{17}=a_{14}=\cdots=a_2=5$

따라서 $a_{10}+a_{20}=2+5=7$

답 ③

35

주어진 관계식에 따라 수열 $\{a_n\}$의 항의 값을 구하면

$a_1=5$, $a_2=16$, $a_3=8$,

$a_4=4$, $a_5=2$, $a_6=1$,

$a_7=4$, $a_8=2$, $a_9=1$,

$\vdots$

$a_{28}=4$, $a_{29}=2$, $a_{30}=1$

즉, $n\geq4$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 4, 2, 1이 차례대로 반복된다.

$(-1)^{a_k}$의 값은 a_k가 홀수이면 -1, 짝수이면 1이고,

첫째항부터 제30항까지의 항 중에서 a_k가 홀수인 항의 개수는 10이고 짝수인 항의 개수는 20이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{30}(-1)^{a_k}=(-1)\times10+1\times20=10$

답 10

필수유형 12

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}\\&\qquad+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}\\&\qquad+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}\\&=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}\\&=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\dfrac{g(7)}{f(3)}=\dfrac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

36

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}k(2m+1-k)=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{3}$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}k(2m+3-k)\\&=\sum_{k=1}^{m}k(2m+3-k)+\boxed{(m+1)(m+2)}\\&=\sum_{k=1}^{m}k(2m+1-k)+\boxed{\sum_{k=1}^{m}2k}+\boxed{(m+1)(m+2)}\\&=\frac{m(m+1)(2m+1)}{3}+\boxed{m(m+1)}+\boxed{(m+1)(m+2)}\\&=\frac{m+1}{3}(2m^2+m+3m+3m+6)\\&=\frac{m+1}{3}(2m^2+7m+6)\\&=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{3}\end{aligned}$$

따라서 $f(m)=(m+1)(m+2)$, $g(m)=m(m+1)$이므로

$f(4)+g(6)=5\times6+6\times7=72$

답 ③

※ 본 PDF 파일을 타인에게 배포하는 경우 저작권법 제20조의 배포권 침해에 해당되어 형사고소 및 손해배상 책임을 물을 수 있음을 알려 드립니다.