01 수열의 극한

유제 (본문 5~11쪽)

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ③

Level 1 기초 연습 (본문 12쪽)

1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ③ 5 ②

Level 2 기본 연습 (본문 13쪽)

1 ④ 2 ⑤ 3 ① 4 ② 5 ⑤

Level 3 실력 완성 (본문 14쪽)

1 ① 2 ⑤ 3 ④

02 급수

유제 (본문 17~21쪽)

1 ③ 2 5 3 12 4 ① 5 ⑤
6 57

Level 1 기초 연습 (본문 22쪽)

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ② 5 ④

Level 2 기본 연습 (본문 23~24쪽)

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ④ 8 ④

Level 3 실력 완성 (본문 25쪽)

1 ② 2 23 3 117

03 여러 가지 함수의 미분(1)

유제 (본문 29~35쪽)

1 ④ 2 ② 3 ⑤ 4 ④ 5 108
6 ⑤ 7 ②

Level 1 기초 연습 (본문 36쪽)

1 ③ 2 ① 3 ③ 4 ② 5 ②

한눈에 보는 정답

Level 2 기본 연습
본문 37쪽

1 ④ 2 ④ 3 ④ 4 ③

Level 3 실력 완성
본문 38쪽

1 ④ 2 ② 3 18 4 ③

04 여러 가지 함수의 미분(2)

유제
본문 41~49쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ① 5 ③
6 ② 7 ④ 8 60 9 ⑤ 10 15

Level 1 기초 연습
본문 50쪽

1 ④ 2 ③ 3 115 4 ④ 5 ③

Level 2 기본 연습
본문 51쪽

1 ④ 2 90 3 ④ 4 ⑤

Level 3 실력 완성
본문 52쪽

1 ② 2 ③ 3 ③

05 여러 가지 미분법

유제
본문 55~63쪽

1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ⑤ 5 ④
6 13 7 ③ 8 ⑤ 9 ① 10 ②

Level 1 기초 연습
본문 64쪽

1 ② 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 ①

Level 2 기본 연습
본문 65쪽

1 ③ 2 ① 3 ② 4 ④ 5 ②

Level 3 실력 완성
본문 66쪽

1 ④ 2 ① 3 ② 4 257

06 도함수의 활용

유제
본문 69~79쪽

1 ① 2 ② 3 ④ 4 ② 5 ③
6 ③ 7 ③ 8 ① 9 ③ 10 ②
11 ③

Level 1 기초 연습 본문 80쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 ③ 5 ①

Level 2 기본 연습 본문 81쪽

1 ④ 2 ① 3 ① 4 ②

Level 3 실력 완성 본문 82쪽

1 ③ 2 ② 3 ③

07 여러 가지 적분법

유제 본문 85~91쪽

1 ② 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ③
6 ② 7 ③ 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 92쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 ① 5 ①

Level 2 기본 연습 본문 93쪽

1 ① 2 ③ 3 ② 4 ②

Level 3 실력 완성 본문 94쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ③ 4 ①

08 정적분의 활용

유제 본문 97~105쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ②
6 ① 7 ⑤ 8 ③ 9 ①

Level 1 기초 연습 본문 106~107쪽

1 ① 2 ② 3 ② 4 ② 5 ①
6 ① 7 ② 8 ③ 9 ④

Level 2 기본 연습 본문 108~109쪽

1 ② 2 ② 3 ① 4 ① 5 ①
6 ① 7 ① 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 110쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 ①

01 수열의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ③

1 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면 $1, -1, 1, -1, \cdots$이므로 $a_{2n-1}=1$, $a_{2n}=-1$이다.

ㄱ. $b_n=\frac{1}{n}$이면 수열 $\{a_nb_n\}$은 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$이고, n이 한없이 커질 때 a_nb_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 0에 수렴한다.

ㄴ. $b_n=\frac{2n-1}{2}$이면 수열 $\{a_nb_n\}$은 $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \cdots$이고, n이 한없이 커질 때 a_nb_n의 값은 부호가 교대로 바뀌면서 절댓값이 한없이 커진다.
따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. $b_n=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$이면 $b_{2n-1}=-1$, $b_{2n}=1$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_nb_n=-1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 -1에 수렴한다.

이상에서 수열 $\{b_n\}$으로 알맞은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

2 $b_n=\frac{3a_n-1}{2a_n+3}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$이고

$b_n(2a_n+3)=3a_n-1$에서 $(2b_n-3)a_n=-3b_n-1$

이때 $b_n=\frac{3}{2}$이면 $\frac{3a_n-1}{2a_n+3}=\frac{3}{2}$에서 $6a_n-2=6a_n+9$가 되어 $-2=9$이므로 모순이다.

즉, $b_n\neq\frac{3}{2}$에서 $2b_n-3\neq0$이므로 양변을 $2b_n-3$으로 나누면

$$a_n=\frac{-3b_n-1}{2b_n-3}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-3b_n-1}{2b_n-3}=\frac{-3\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}1}{2\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}3}$$

$$=\frac{-3\times(-1)-1}{2\times(-1)-3}=-\frac{2}{5}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(4a_n-1)=4\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1$$

$$=4\times\left(-\frac{2}{5}\right)-1=-\frac{13}{5}$$

답 ③

3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$n(n+1)<2a_n<n(n+3)$을 만족시키므로
$3n(n+1)<6a_n<3n(n+3)$
$n>0$이므로

$$\frac{3n(n+1)}{n^2+2n}<\frac{6a_n}{n^2+2n}<\frac{3n(n+3)}{n^2+2n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n(n+1)}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(n+3)}{n^2+2n}=3$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{n^2+2n}=3$$

답 ③

4
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n})^2-(\sqrt{n^2-n})^2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{2}=2$$

답 ④

5
$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}n^2+\sum_{k=1}^{n}2nk+\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n^2\times n+2n\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=n^3+n^2(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=1+1+\frac{2}{6}=\frac{7}{3}$$

답 ②

다른 풀이 1

$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2$
$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

다른 풀이 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

6 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열의 일반항은

$a_n=3^{n-1}$이고, $a_{2n-1}=3^{(2n-1)-1}=3^{2n-2}=9^{n-1}$이므로

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\frac{9^n-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^n-1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}}{a_na_{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(9^n-1)}{3^{n-1}\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(9^n-1)}{\frac{1}{3}\times 9^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}\times\frac{9^n-1}{9^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{8}(1-0)=\frac{3}{8}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ③	2 ④	3 ⑤	4 ③	5 ②

1 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

답 ③

2 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$3n-3<a_n<3n+1$을 만족시키므로

$3(2n-1)-3<a_{2n-1}<3(2n-1)+1$

$6n-6<a_{2n-1}<6n-2$

$n>0$이므로

$$\frac{6n-6}{n}<\frac{a_{2n-1}}{n}<\frac{6n-2}{n}$$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$$6-\frac{6}{n}<\frac{a_{2n-1}}{n}<6-\frac{2}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{6}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{2}{n}\right)=6$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{n}=6$$

답 ④

3 $$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+4(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n)^2-4a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)^2-4\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=3^2-4\times(-4)=9+16=25$$

답 ⑤

4 $$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+4n-1}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2+4n-1}-(an+b)\}\{\sqrt{4n^2+4n-1}+(an+b)\}}{\sqrt{4n^2+4n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+4n-1})^2-(an+b)^2}{\sqrt{4n^2+4n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+4n-1)-(a^2n^2+2abn+b^2)}{\sqrt{4n^2+4n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-a^2)n^2+2(2-ab)n-(1+b^2)}{\sqrt{4n^2+4n-1}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-a^2)n+2(2-ab)-\frac{1+b^2}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 3에 수렴하려면

$4-a^2=0$ …… ㉡

$\dfrac{2(2-ab)}{2+a}=3$ …… ㉢

이때 $a\le 0$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+4n-1}-(an+b)\}=\infty$이므로 $a>0$

그러므로 ㉡에서 $a=2$

㉢에서 $\dfrac{2(2-ab)}{2+a}=\dfrac{2(2-2b)}{2+2}=1-b=3$이므로

$b=-2$

따라서 $a-b=2-(-2)=4$

답 ③

5 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}a_n+3^{n+1}}{3^na_n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^na_n+1}$$

$$=\frac{4\lim\limits_{n\to\infty}a_n+3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n+1}$$

$$=\frac{4\times\alpha+3\times0}{0\times\alpha+1}=4\alpha=2$$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ②	5 ⑤

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$이므로

$a_1+a_5=a_1+(a_1+4d)=2a_1+4d=12$

에서 $a_1+2d=6$ …… ㉠

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n+n(n-1)d}{2n^2-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)d}{2-\frac{3}{n^2}}=\frac{0+d}{2-0}=\frac{d}{2}$$

이므로 $\dfrac{d}{2}=4$에서 $d=8$

$d=8$을 ㉠에 대입하면 $a_1=-10$

따라서 $a_{10}=-10+9\times8=62$

답 ④

2 $a_n-\dfrac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=b_n$이라 하면 $|b_n|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$에서

모든 자연수 n에 대하여

$-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<b_n<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=b_n+\dfrac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{0+3}{0+1}=3\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right)=0+3=3$$

답 ⑤

3 $a_n-3b_n=c_n$이라 하면 $b_n=\dfrac{1}{3}(a_n-c_n)$이고,

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2\times\frac{1}{3}(a_n-c_n)}{a_n+\frac{1}{3}(a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{11a_n-2c_n}{4a_n-c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{11-2\times\frac{c_n}{a_n}}{4-\frac{c_n}{a_n}}$$

$$=\frac{11-0}{4-0}=\frac{11}{4}$$

답 ①

4 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=300$, $\sum\limits_{n=11}^{20}a_n=100$에서

$\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=300$, $\dfrac{10(a_{11}+a_{20})}{2}=100$

즉, $a_1+a_{10}=60$, $a_{11}+a_{20}=20$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$에서

$2a+9d=60$, $2a+29d=20$

두 식을 연립하여 풀면 $a=39$, $d=-2$

이므로 $a_n=-2n+41$

$$\begin{aligned} f(n)&=\sum_{k=n}^{2n} a_k=\frac{(2n-n+1)(a_n+a_{2n})}{2} \\ &=\frac{(n+1)(-6n+82)}{2} \\ &=(n+1)(-3n+41) \\ &=-3n^2+38n+41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(n)&=\sum_{k=1}^{n} a_{3k}=\frac{n(a_3+a_{3n})}{2} \\ &=\frac{n(35-6n+41)}{2} \\ &=\frac{n(76-6n)}{2} \\ &=n(38-3n) \\ &=-3n^2+38n \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2(n+1)+41}{n+1} \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{39}{n}}{1+\frac{1}{n}}=-2 \end{aligned}$$

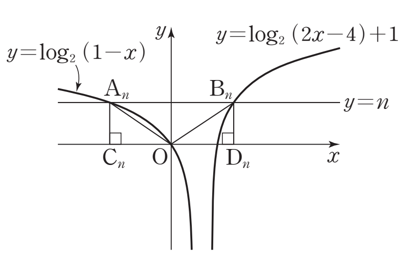
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+38n+41}{-3n^2+38n} \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{38}{n}+\frac{41}{n^2}}{-3+\frac{38}{n}}=1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{f(n)}{g(n)}\right\}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \\ &=-2+1=-1 \end{aligned}$$

답 ②

5



점 A_n의 x좌표는 $\log_2(1-x)=n$에서

$1-x=2^n$, $x=1-2^n$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times|1-2^n|\times n=\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times n$$

점 B_n의 x좌표는 $\log_2(2x-4)+1=n$에서

$\log_2(2x-4)=n-1$

$2x-4=2^{n-1}$, $x=2^{n-2}+2$이므로

$$T_n=\frac{1}{2}\times|2^{n-2}+2|\times n=\frac{1}{2}\times(2^{n-2}+2)\times n$$

따라서

$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times n}{\frac{1}{2}\times(2^{n-2}+2)\times n}=\frac{2^n-1}{2^{n-2}+2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-2}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{1-0}{\frac{1}{4}+0}=4$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 ①　　2 ⑤　　3 ④

1 $x^2+2nx-n=0$에서 $x=-n\pm\sqrt{n^2+n}$이므로

$\alpha_n=-n-\sqrt{n^2+n}$, $\beta_n=-n+\sqrt{n^2+n}$

두 점 $\mathrm{A}(\alpha_n)$, $\mathrm{B}(\beta_n)$에 대하여 선분 AB를 $n:1$로 내분하는 점 P의 좌표 p_n은

$$p_n=\frac{n(-n+\sqrt{n^2+n})+(-n-\sqrt{n^2+n})}{n+1}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+n}-n)}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

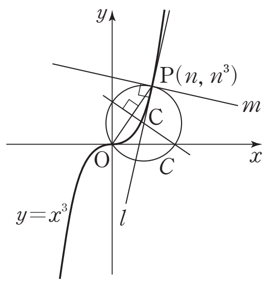
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n^2+n}-n}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{1+\frac{1}{n}} \\ &=\frac{-1-1}{1+0}=-2 \end{aligned}$$

따라서

$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

답 ①

2 $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ n^3)$에서의 접선 l의 방정식은 $y-n^3=3n^2(x-n)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=3n^2x-2n^3$ …… ㉠



직선 l이 점 P를 지나고 원 C 위의 점 P에서의 접선 m과 서로 수직이므로 직선 l은 원의 중심 C를 지난다.
그러므로 원 C의 중심 C는 직선 l과 선분 OP의 수직이등분선의 교점이다.
직선 OP는 기울기가 $\frac{n^3}{n}=n^2$이므로 선분 OP의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{n^2}$이고 점 $\left(\frac{n}{2},\ \frac{n^3}{2}\right)$을 지나는 직선이다.

즉, $y-\frac{n^3}{2}=-\frac{1}{n^2}\left(x-\frac{n}{2}\right)$

$y=-\frac{1}{n^2}x+\frac{n^3}{2}+\frac{1}{2n}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{\frac{5}{2}n^3+\frac{1}{2n}}{3n^2+\frac{1}{n^2}}$이므로 $a_n=\dfrac{\frac{5}{2}n^3+\frac{1}{2n}}{3n^2+\frac{1}{n^2}}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2}n^3+\frac{1}{2n}}{3n^3+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2n^4}}{3+\frac{1}{n^4}}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

3 (i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{x+0+0}{1+0}=x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=1$이므로

$f(1)=\frac{1+2+1}{1+1}=2$

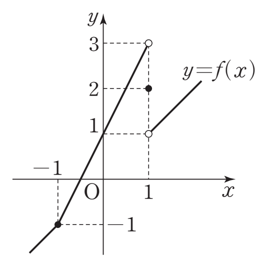
(iii) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\frac{0+2x+1}{0+1}=2x+1$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=-1$이므로

$f(-1)=\frac{-1-2+1}{1+1}=-1$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x-n)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$만큼 평행이동한 것이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=3$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이고 $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1-}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=3\times\{f(1-n)+a_n\}$ …… ㉠

$\lim_{x\to1+}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=1\times\{f(1-n)+a_n\}$ …… ㉡

$f(1)\{f(1-n)+a_n\}=2\times\{f(1-n)+a_n\}$ …… ㉢

$\lim_{x\to1}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=f(1)\{f(1-n)+a_n\}$에서

㉠=㉡=㉢이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x-n)+a_n\}=f(1-n)+a_n=0$

$n=1$일 때, $1+a_1=0$이므로 $a_1=-1$

$n\ge2$일 때, $1-n+a_n=0$이므로 $a_n=n-1$

따라서 $p=-1$, $q=1$, $r=-1$이므로

$p+q+r=-1+1+(-1)=-1$

답 ④

02 급수

유제 본문 17~21쪽

1 ③ **2** 5 **3** 12 **4** ① **5** ⑤
6 57

1 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)$

$+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$

첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 $S_1=a_1=2$이고

$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2\times2+3n)}{2}=\frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(3n+4)}=0$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{2}$

답 ③

2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n$이고,

$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$이다.

$a_{2n-1}=\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$a_{2n}=\frac{(-1)^{2n}}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$에서

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$

이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{4}$

따라서 $80\alpha^2=80\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=5$

답 5

참고

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-a_{2n})$

$=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

$=-\frac{1}{4}-0=-\frac{1}{4}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-8)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-8)=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(2a_n-8)+4\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2a_n-8)+\lim_{n\to\infty}4$

$=\frac{1}{2}\times0+4=4$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_{n-1}+a_{2n})=2\lim_{n\to\infty}a_{n-1}+\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

$=2\times4+4=12$

답 12

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-n^2+2n}{n^2}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2+2n}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-1+\frac{2}{n}\right)=0$

한편 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n^2}-1+\frac{2}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}=0+1=1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-4a_n}{n^2+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-4\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{a_n}{n^2}}$

$=\frac{3+0-4}{1+1}=-\frac{1}{2}$

답 ①

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $|r|<1$이고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{1-r} = \frac{4}{3}$이므로 $4-4r=6$에서 $r=-\frac{1}{2}$

$a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$(a_n)^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{(a_n)^2\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

답 ⑤

6 $\log_2 (S_n+1) = 3n$에서 $S_n+1 = 2^{3n}$

$S_n = 2^{3n}-1 = 8^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 7$

(ii) $n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1} = (8^n-1)-(8^{n-1}-1) = 7 \times 8^{n-1}$

(i), (ii)에서 $a_n = 7 \times 8^{n-1}$ $(n \geq 1)$

그러므로 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{49}$$

따라서 $p+q = 49+8 = 57$

답 57

Level 1 기초 연습

본문 22쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ② 5 ④

1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n+3b_n) = 35$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\{(2a_n+3b_n)-2a_n\}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n) - \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$= \frac{1}{3} \times 35 - \frac{2}{3} \times 4 = 9$$

답 ④

2 $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = -1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+ \cdots +(a_n-a_{n+1})\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$
$$= a_1 - (-1)$$
$$= 2-(-1) = 3$$

답 ③

3 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 상수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} (2a_n+6) = 2\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} 6 = 2\alpha+6$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\alpha+6$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$에서 $\alpha=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$$

답 ③

4 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-8x+14}{2}\right)^n$이 수렴할 조건은

$-1 < \frac{x^2-8x+14}{2} < 1$

$\frac{x^2-8x+14}{2} > -1$에서

$x^2-8x+16>0$, $(x-4)^2>0$

이므로 x는 4가 아닌 모든 실수이다. …… ㉠

$\frac{x^2-8x+14}{2} < 1$에서 $x^2-8x+12<0$

$(x-2)(x-6)<0$, $2<x<6$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 3, 5이므로 구하는 합은 $3+5=8$

답 ②

5 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= 6+\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 23~24쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ④ 8 ④

1 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=6+(n-1)\times 4=4n+2$

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(6+4n+2)}{2}=2n(n+2)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

2 조건 (가)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1-3n^2}{2n^2+4}<b_n<\frac{2n-3n^2}{2n^2+4}$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3n^2}{2n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3n^2}{2n^2+4}=-\frac{3}{2}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=-\frac{3}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-b_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}b_n=0-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}(a_n)^2+\lim_{n\to\infty}(b_n)^2=(\lim_{n\to\infty}a_n)^2+(\lim_{n\to\infty}b_n)^2$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

답 ③

3 곡선 $y=-\log_2\frac{x}{2}$와 직선 $y=n$의 교점의 x좌표는

$-\log_2\frac{x}{2}=n$에서 $\frac{x}{2}=2^{-n}$, $x=2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이므로 $\mathrm{P}_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n\right)$

곡선 $y=\log_4\frac{1}{x}$과 직선 $y=n$의 교점의 x좌표는

$\log_4\frac{1}{x}=n$에서 $\frac{1}{x}=4^n$, $x=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

이므로 $\mathrm{Q}_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n, n\right)$

그러므로 $a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n$

이때 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, $\left|\frac{1}{4}\right|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$은 모두 수렴한다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

답 ④

4 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n a_n\right\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n a_n\right\}=0$이다.

$b_n=\left(\frac{5}{2}\right)^n a_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$a_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n b_n$에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n b_n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^{n+1}a_n}{4^n+3^n a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n a_n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n a_n}=\frac{4+0}{1+0}=4$$

답 ⑤

5 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 급수 $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$이 수렴하므로

$|r|<1$이고 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2+a_3=\sum_{n=4}^{\infty} a_n$에서

$a(1+r+r^2)=\dfrac{ar^3}{1-r}$

$a\neq 0$이므로 $(1-r)(1+r+r^2)=r^3$

$1-r^3=r^3$에서 $r^3=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{a_{10}}{a_4}=\dfrac{ar^9}{ar^3}=r^6=(r^3)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

답 ②

6 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2이고 공비가 r $(0<r<1)$인 등비수열이므로

$a_n=2r^{n-1}$

$a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty} 2r^{k-1}=\dfrac{2r^n}{1-r}$에서

$2r^{n-1}=\dfrac{2r^n}{1-r}$

$r\neq 0$이므로 $1=\dfrac{r}{1-r}$, $1-r=r$, $r=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_n=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

답 ②

7 $b_{2n}=\log_{\frac{1}{3}}(a_2a_4a_6\cdots a_{2n})=-\log_3(a_2a_4a_6\cdots a_{2n})$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$b_{2n-1}+b_{2n}$

$=\log_3(a_1a_3a_5\cdots a_{2n-1})-\log_3(a_2a_4a_6\cdots a_{2n})$

$=\log_3\dfrac{a_1a_3a_5\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4a_6\cdots a_{2n}}$

$=\log_3\dfrac{a_1}{a_2}+\log_3\dfrac{a_3}{a_4}+\log_3\dfrac{a_5}{a_6}+\cdots+\log_3\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$

$=n\times\log_3\dfrac{1}{r}=-n\log_3 r$

$\sum_{n=1}^{20} b_n=\sum_{n=1}^{10}(b_{2n-1}+b_{2n})$

$=\sum_{n=1}^{10}(-n\log_3 r)$

$=(-\log_3 r)\times\sum_{n=1}^{10} n$

$=(-\log_3 r)\times\dfrac{10\times 11}{2}$

$=-55\log_3 r$

$\sum_{n=1}^{20} b_n=110$이므로 $-55\log_3 r=110$

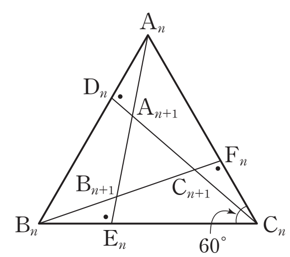
$\log_3 r=-2$, $r=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

따라서 $a_n=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{8}$

답 ④

8



$\overline{B_nC_n}=3a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{B_nF_n}=\sqrt{(3a)^2+a^2-2\times 3a\times a\times\cos 60^\circ}=\sqrt{7}a$

이고 세 삼각형 $A_nB_nE_n$, $B_nC_nF_n$, $C_nA_nD_n$은 합동이므로

$\angle A_nE_nB_n=\angle B_nF_nC_n=\angle C_nD_nA_n$

그러므로 두 삼각형 $B_nC_nF_n$, $B_nB_{n+1}E_n$은 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{B_nC_n}:\overline{B_nB_{n+1}}=\overline{B_nF_n}:\overline{B_nE_n}$

즉, $3a:\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{7}a:a$에서

$\overline{B_nB_{n+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}a=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$

$\overline{B_nF_n}:\overline{B_nE_n}=\overline{F_nC_n}:\overline{E_nB_{n+1}}$

즉, $\sqrt{7}a:a=a:\overline{E_nB_{n+1}}$에서

$\overline{E_nB_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}a=\dfrac{\sqrt{7}}{7}a$이므로

$\overline{F_nC_{n+1}}=\overline{E_nB_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}a$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{7}a-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a-\dfrac{\sqrt{7}}{7}a=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$

$=\dfrac{\sqrt{7}}{7}\times 3a=\dfrac{\sqrt{7}}{7}\overline{B_nC_n}$

그러므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이는 공비가 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$인 등비수열을 이룬다.

$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 1\times \sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{1}{7}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7\sqrt{3}}{8}$$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 25쪽

1 ② **2** 23 **3** 117

1 $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=-\frac{1}{6}$, $a_4=\frac{1}{8}$, $a_5=-\frac{1}{10}$,

$a_6=\frac{1}{12}$, $a_7=-\frac{1}{14}$, …이므로

$b_1=\frac{1}{4}$, $b_2=\frac{1}{4}$, $b_3=\frac{1}{8}$, $b_4=\frac{1}{8}$, $b_5=\frac{1}{12}$, $b_6=\frac{1}{12}$, …

즉, $b_{2n-1}=\begin{cases} a_{2n-1} & (a_{2n-1}\ge a_{2n}) \\ a_{2n} & (a_{2n-1}<a_{2n}) \end{cases}$에서

$b_{2n-1}=a_{2n}=\frac{1}{4n}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_{2k-1}b_{2k+1}$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{16k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

그러므로

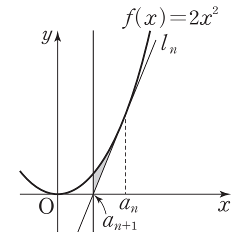
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{1}{16}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}b_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{2k-1}b_{2k+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty} S_n$$
$$=\frac{1}{16}$$

답 ②

2



$f(x)=2x^2$이라 하면 $f'(x)=4x$

점 $(a_n, 2(a_n)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2(a_n)^2=4a_n(x-a_n)$

$y=4a_nx-2(a_n)^2$

$a_1=1$에서 $a_n>0$이므로 $y=0$에서 $x=\frac{1}{2}a_n$

그러므로 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$, $a_1=1$에서

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

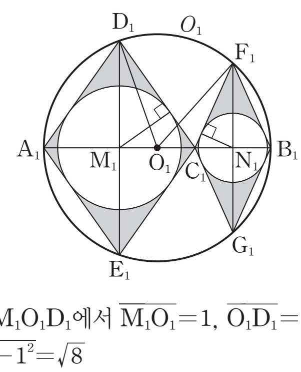
$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}[2x^2-\{4a_nx-2(a_n)^2\}]\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2a_nx^2+2(a_n)^2x\right]_{a_{n+1}}^{a_n}$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2a_nx^2+2(a_n)^2x\right]_{\frac{a_n}{2}}^{a_n}$$
$$=\frac{1}{12}(a_n)^3=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{21}$이므로

$p+q=21+2=23$

답 23

3 그림 R_1에서 원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$, 선분 $\mathrm{C_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{N_1}$, 두 사각형 $\mathrm{A_1E_1C_1D_1}$과 $\mathrm{C_1G_1B_1F_1}$에 각각 내접하는 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.



직각삼각형 $\mathrm{M_1O_1D_1}$에서 $\overline{\mathrm{M_1O_1}}=1$, $\overline{\mathrm{O_1D_1}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{D_1M_1}}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$

직각삼각형 $M_1C_1D_1$에서 $\overline{M_1C_1}=2$, $\overline{D_1M_1}=\sqrt{8}$이므로
$\overline{C_1D_1}=\sqrt{2^2+(\sqrt{8})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$이고

$\frac{1}{2}\times\overline{M_1C_1}\times\overline{D_1M_1}=\frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times r_1$에서

$r_1=\frac{2\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

직각삼각형 $O_1N_1F_1$에서 $\overline{O_1N_1}=2$, $\overline{O_1F_1}=3$이므로
$\overline{F_1N_1}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
직각삼각형 $C_1N_1F_1$에서 $\overline{C_1N_1}=1$, $\overline{F_1N_1}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{C_1F_1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$이고

$\frac{1}{2}\times\overline{C_1N_1}\times\overline{F_1N_1}=\frac{1}{2}\times\overline{C_1F_1}\times r_2$에서

$r_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

그러므로 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 두 사각형의 넓이에서 내접하는 두 원의 넓이를 뺀 것이므로

$$S_1=4\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}\right)-\pi\times\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2-\pi\times\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$$

$$=8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi$$

한편 원 O_1과 사각형에 내접하는 두 원의 닮음비는 각각

$3:r_1=3:\sqrt{\frac{8}{3}}$, $3:r_2=3:\sqrt{\frac{5}{6}}$

이므로 넓이의 비는 각각 $1:\frac{8}{27}$, $1:\frac{5}{54}$이고,

$S_2=S_1+S_1\left(\frac{8}{27}+\frac{5}{54}\right)=S_1+\frac{7}{18}S_1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi$이고 공비가 $\frac{7}{18}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi}{1-\frac{7}{18}}=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi}{\frac{11}{18}}$$

$$=\frac{18}{11}\left(8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi\right)$$

따라서 $a+b+c=\frac{18}{11}\left(8+2-\frac{7}{2}\right)=\frac{117}{11}$이므로
$11(a+b+c)=117$

답 117

03 여러 가지 함수의 미분(1)

유제

본문 29~35쪽

1 ④	2 ②	3 ⑤	4 ④	5 108
6 ⑤	7 ②			

1 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x-1}-3^{x+2}}{3^{x-1}+4^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times4^x-9\times3^x}{\frac{1}{3}\times3^x+\frac{1}{4}\times4^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-9\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-0}{0+\frac{1}{4}}=2$$

답 ④

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(x^3+5x)}{4\log_2x^2+\log_2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2x^3\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{8\log_2x+\log_2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2x^3+\log_2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{9\log_2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\log_2x+\log_2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{9\log_2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{3}+\frac{\log_2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{9\log_2x}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

답 ②

3 $a=0$이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{3x}=0$이므로 $a\neq0$이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}$$

이때 $ax=t$라 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{3x}=\frac{a}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=\frac{a}{3}\times1=\frac{a}{3}$

즉, $\frac{a}{3}=\frac{1}{6}$에서 $a=\frac{1}{2}$

답 ⑤

4 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}=\frac{1}{3}$에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x-1}=3$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x}{(e^x+1)(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x+1}\left\{\frac{f(x)}{e^x-1}+\frac{x}{e^x-1}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{1+1}(3+1)=2$$

답 ④

5 $f(x)=3^{x+1}+3^{2x}$에서

$$f'(x)=(3^{x+1}+3^{2x})'$$
$$=3\times(3^x)'+(9^x)'$$
$$=3\times 3^x\ln 3+9^x\ln 9$$
$$=3^{x+1}\ln 3+3^{2x}\times 2\ln 3$$
$$=(3^{x+1}+2\times 3^{2x})\ln 3$$

이때

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$
$$=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)$$
$$=4\times(3^2+2\times 3^2)\ln 3=108\ln 3$$

따라서 $a=108$

답 108

6 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2e^x+ax-2e}{x-1}$가 존재하고 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 1}(x^2e^x+ax-2e)=e+a-2e$$
$$=a-e=0$$

에서 $a=e$

이때 $g(x)=x^2e^x+ex$라 하면 $g(1)=2e$이고

$g'(x)=2xe^x+x^2e^x+e=(x^2+2x)e^x+e$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2e^x+ax-2e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=4e=b$$

따라서 $a=e$, $b=4e$이므로 $a+b=5e$

답 ⑤

7 $\lim_{x\to 2}\frac{ax\log_2 x-b}{x^2-4}$가 존재하고 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2}(ax\log_2 x-b)=2a\log_2 2-b=2a-b=0$

따라서 $b=2a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax\log_2 x-b}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x\log_2 x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=a\lim_{x\to 2}\left(\frac{x\log_2 x-2}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right)$$

이때 $g(x)=x\log_2 x$라 하면 $g(2)=2$이고

$g'(x)=1\times\log_2 x+x\times\frac{1}{x\ln 2}=\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x\log_2 x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$
$$=\log_2 2+\frac{1}{\ln 2}=1+\frac{1}{\ln 2}$$

따라서

$$a\lim_{x\to 2}\left(\frac{x\log_2 x-2}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right)=a\times\left(1+\frac{1}{\ln 2}\right)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{a}{4}\times\left(1+\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$\frac{a}{4}\times\left(1+\frac{1}{\ln 2}\right)=1+\frac{1}{\ln 2}$에서 $a=4$이고 ㉠에서 $b=8$

그러므로 $a+b=12$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 36쪽

1 ③　2 ①　3 ③　4 ②　5 ②

1 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x+3}-3^{x+4}}{2^{2x-1}+3^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^3\times 4^x-3^4\times 3^x}{2^{-1}\times 4^x+3^2\times 3^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8-3^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{2}+3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}$$
$$=\frac{8-0}{\frac{1}{2}+0}=16$$

답 ③

2 $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left\{ \frac{f(x)}{\ln 2x} \times \frac{\ln 2x}{2x-1} \right\}$

이때 $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1}$에서 $2x-1=t$로 놓으면 $2x=1+t$이고

$x \to \frac{1}{2}$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x-1} &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left\{ \frac{f(x)}{\ln 2x} \times \frac{\ln 2x}{2x-1} \right\} \\ &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\ln 2x} \times \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} \\ &= 6 \times 1 = 6\end{aligned}$$

답 ①

3 함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+2h\right)-f\left(\frac{1}{2}-2h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{f\left(\frac{1}{2}+2h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}-\left\{f\left(\frac{1}{2}-2h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f\left(\frac{1}{2}+2h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{2h} \times 2 + \frac{f\left(\frac{1}{2}-2h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{-2h} \times 2 \right\} \\ &= 2f'\left(\frac{1}{2}\right)+2f'\left(\frac{1}{2}\right)=4f'\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$f(x)=e^x \ln 2x = e^x(\ln 2 + \ln x)$에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x(\ln 2+\ln x)+e^x \times \left(0+\frac{1}{x}\right) \\ &= e^x\left(\ln 2x+\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+2h\right)-f\left(\frac{1}{2}-2h\right)}{h} &= 4f'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 4 \times e^{\frac{1}{2}}(\ln 1+2) \\ &= 8\sqrt{e}\end{aligned}$$

답 ③

4 $f(x)\ln(1+2x)=e^{3x}-1$에서 함수 $f(x)$는 $x \neq 0$일 때

$f(x)=\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$ $(x \neq 0)$

이다. 함수 $f(x)$가 $x>-\frac{1}{2}$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다. 따라서

$$\begin{aligned}f(0) &= \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{3}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ②

5 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x^3-1}$의 값이 존재하고 $x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x \to 1}\{f(x)-5\}=f(1)-5=0$

$f(1)=5$이므로 $f(1)=a=5$

따라서 $f(x)=x^2\ln x+5x$

이때

$f'(x)=2x\ln x+x^2 \times \frac{1}{x}+5=2x\ln x+x+5$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x^3-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}(0+1+5)=2\end{aligned}$$

따라서 $b=2$

그러므로 $a+b=7$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 37쪽

1 ④ 2 ④ 3 ④ 4 ③

1
$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{\sqrt{x^2+h}-x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(e^{x+h}-e^x)(\sqrt{x^2+h}+x)}{(x^2+h)-x^2} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \times (\sqrt{x^2+h}+x) \right\} \\ &= (e^x)' \times (\sqrt{x^2}+x) = 2xe^x\end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=2e^x+2xe^x=2(1+x)e^x$

따라서 $f'(1)=2(1+1)e=4e$

답 ④

2 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$에서

$a-8=\lim_{x\to 2-}(ae^{x-2}-4x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+2bx-3a)$

$a-8=4+4b-3a$

$a-b=3$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

이때

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{ae^h-4(2+h)\}-(a-8)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{a(e^h-1)-4h}{h}$$
$$=a\lim_{h\to 0-}\frac{e^h-1}{h}-4=a-4$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(2+h)^2+2b(2+h)-3a\}-(a-8)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(2b+4)h-4(a-b-3)}{h}$$

㉠에서 $a-b-3=0$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(h+2b+4)$$
$$=2b+4$$

그러므로 $a-4=2b+4$에서

$a-2b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-5$

따라서 $a+b=-7$

답 ④

3 $\ln x\le f(x)-1\le e^{x-1}-1$이므로 $x=1+t$로 놓으면

$t>-1$이고

$\ln(1+t)\le f(1+t)-1\le e^t-1$ …… ㉠

(ⅰ) $t>0$일 때, ㉠에서

$$\frac{\ln(1+t)}{t}\le\frac{f(1+t)-1}{t}\le\frac{e^t-1}{t}$$

이때 $\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$, $\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}=1$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(1+t)-1}{t}=1$$

(ⅱ) $t<0$일 때, ㉠에서

$$\frac{\ln(1+t)}{t}\ge\frac{f(1+t)-1}{t}\ge\frac{e^t-1}{t}$$

이때 $\lim_{t\to 0-}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$, $\lim_{t\to 0-}\frac{e^t-1}{t}=1$이므로

$$\lim_{t\to 0-}\frac{f(1+t)-1}{t}=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-1}{t}=1$$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(2x)-1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(2x)-1}{x(2x-1)}$에서 $2x-1=s$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}(1+s)$이고 $x\to\frac{1}{2}$일 때 $s\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(2x)-1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(2x)-1}{x(2x-1)}$$
$$=\lim_{s\to 0}\frac{f(1+s)-1}{\frac{1}{2}s(1+s)}$$
$$=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{f(1+s)-1}{s}\times\frac{2}{1+s}\right\}$$
$$=1\times\frac{2}{1+0}=2$$

답 ④

4 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$와 y축 위의 점 $\mathrm{Q}(0,\ f(t))$에 대하여

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=(0-1)^2+\{f(t)-0\}^2=1+\{f(t)\}^2$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(0-t)^2+\{f(t)-\ln t\}^2$

$=t^2+\{f(t)\}^2-2f(t)\ln t+(\ln t)^2$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$에서

$1+\{f(t)\}^2=t^2+\{f(t)\}^2-2f(t)\ln t+(\ln t)^2$

이므로 $t\ne 1$일 때

$$f(t)=\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{\ln t}{2}$$

$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{2\ln t}$에서 $t=1+h$로 놓으면 $t\to 1$일 때

$h\to 0$이므로

$$\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{2\ln t}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1}{2\ln(1+h)}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{h}{\ln(1+h)}\times\frac{2+h}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{2+0}{2}=1$$

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{2}=\frac{\ln 1}{2}=0$$

따라서

$$\lim_{t\to1}f(t)=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{2\ln t}+\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{2}=1+0=1$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 38쪽

1 ④　　2 ②　　3 18　　4 ③

1 $a_n=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x\{\ln(x+k)-\ln x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x\ln\frac{x+k}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k\left\{\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k\times\ln e$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 ④

2 $\lim_{x\to2}\frac{xf(x)+4}{x^2-2x}$의 값이 존재하고 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to2}\{xf(x)+4\}=2f(2)+4=0$$

따라서 $f(2)=-2$

$h(x)=xf(x)$라 하면 $h(2)=2f(2)=-4$이고

$h'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{2}h'(2)=\frac{1}{2}\{f(2)+2f'(2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{-2+2f'(2)\}=3$$

따라서 $f'(2)=4$

$g(x)=f(x)\log_2 x$에서

$g'(x)=f'(x)\log_2 x+f(x)\times\frac{1}{x\ln 2}$이므로

$$g'(2)=f'(2)\log_2 2+f(2)\times\frac{1}{2\ln 2}$$
$$=4\times1+(-2)\times\frac{1}{2\ln 2}=4-\frac{1}{\ln 2}$$

답 ②

3 조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x\to\frac{1}{2}$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\times\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{-2x+1}-1}\right\}=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$가 존재하고,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{-2x+1}-1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{e^{-2x+1}-1}{-2x+1}}$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 ㉡으로부터

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ 즉\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)-2x^3}{x^2}\times\frac{1}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}\right\}=2$$

이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}=\frac{1}{\ln e^3}=\frac{1}{3}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=6$$

따라서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차함수이고 이차항의 계수는 6이어야만 한다.

$f(x)=2x^3+6x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=6x^2+12x+a$

이고 ㉢에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+6+a=-\frac{1}{2}$에서 $a=-8$

㉠에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-4+b=0$에서 $b=\frac{9}{4}$

$f(x)=2x^3+6x^2-8x+\frac{9}{4}$이므로

$f(1)=2+6-8+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$

따라서 $8f(1)=8\times\frac{9}{4}=18$

답 18

4 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-1=k$에서 $x_1=\log_{\frac{1}{2}}(1+k)=-\log_2(1+k)$

$2^{x_2}-1=k$에서 $x_2=\log_2(1+k)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=x_2-x_1\\&=\log_2(1+k)-\{-\log_2(1+k)\}\\&=2\log_2(1+k)\end{aligned}$$

두 점 B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2라 하면

$y_1=k$이고 두 점 B, C의 x좌표가 모두 x_2이므로

$$\begin{aligned}y_2&=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-1=(2^{x_2})^{-1}-1=(1+k)^{-1}-1\\&=\frac{1}{1+k}-1=-\frac{k}{1+k}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{BC}}=y_1-y_2=k-\left(-\frac{k}{1+k}\right)=\frac{k(2+k)}{1+k}$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{k\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}&=\lim_{k\to0+}\frac{2\log_2(1+k)}{\frac{k(2+k)}{1+k}}\\&=\lim_{k\to0+}\left\{\frac{\log_2(1+k)}{k}\times\frac{2(1+k)}{2+k}\right\}\\&=\lim_{k\to0+}\left\{\log_2(1+k)^{\frac{1}{k}}\times\frac{2(1+k)}{2+k}\right\}\\&=\log_2 e\times\frac{2(1+0)}{2+0}=\frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

답 ③

04 여러 가지 함수의 미분(2)

유제 본문 41~49쪽

1 ③	2 ③	3 ④	4 ①	5 ③
6 ②	7 ④	8 60	9 ⑤	10 15

1 $\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=2^2+1=5$

$\cot^2\theta=\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{4}$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

따라서 $\csc^2\theta+\sec^2\theta=\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4}$

답 ③

2
$$\begin{aligned}&\frac{\cot\theta}{1+\csc\theta}-\frac{\cot\theta}{1-\csc\theta}\\&=\frac{\cot\theta(1-\csc\theta)-\cot\theta(1+\csc\theta)}{(1+\csc\theta)(1-\csc\theta)}\\&=\frac{-2\cot\theta\csc\theta}{1-\csc^2\theta}=\frac{2\cot\theta\csc\theta}{\csc^2\theta-1}\\&=\frac{2\cot\theta\csc\theta}{\cot^2\theta}=\frac{2\csc\theta}{\cot\theta}\\&=\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{2}{\cos\theta}\\&=2\sec\theta=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\sec\theta=2\sqrt{2}$에서 $\sec^2\theta=8$

답 ③

3
$$\begin{aligned}\cos 135^\circ\cos 15^\circ+\sin 135^\circ\sin 15^\circ&=\cos(135^\circ-15^\circ)\\&=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ\cos 15^\circ-\cos 75^\circ\sin 15^\circ&=\sin(75^\circ-15^\circ)\\&=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{\cos 135^\circ\cos 15^\circ+\sin 135^\circ\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ\cos 15^\circ-\cos 75^\circ\sin 15^\circ}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

4 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$이고, $\sin(\alpha-\beta)>0$이므로

$\alpha-\beta$는 제1사분면의 각이다.

따라서 $\cos(\alpha-\beta)>0$이므로

$$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

㉠에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이고, $\cos(\alpha+\beta)<0$이므로 $\alpha+\beta$는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\sin(\alpha+\beta)>0$이므로

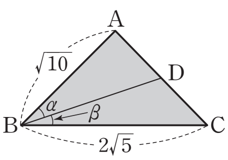
$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}&\cos 2\alpha\\&=\cos\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\}\\&=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

답 ①

5



$\angle ABD=\alpha$, $\angle DBC=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$에서

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1\end{aligned}$$

$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

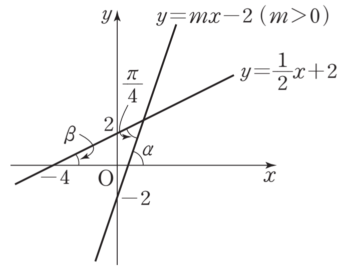
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\end{aligned}$$

답 ③

6



두 직선 $y=mx-2$와 $y=\frac{1}{2}x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan\alpha=m$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{m-\frac{1}{2}}{1+m\times\frac{1}{2}}=\frac{2m-1}{m+2}\end{aligned}$$

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$에서 $\left|\frac{2m-1}{m+2}\right|=1$

(i) $\frac{2m-1}{m+2}=1$일 때

$2m-1=m+2$, $m=3$

(ii) $\frac{2m-1}{m+2}=-1$일 때

$2m-1=-(m+2)$, $m=-\frac{1}{3}$

$m>0$이므로 $m=3$

답 ②

7 $\frac{\pi}{2}-x=t$라 하면 $x=\frac{\pi}{2}-t$이고, $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}&=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t\sin t\,(1+\cos t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{t\sin t\,(1+\cos t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{t\sin t\,(1+\cos t)}\end{aligned}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{1+\cos t}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 ④

8 직각삼각형 ABH에서

$\sin\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$이므로 $\overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$

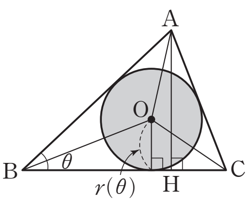
$\overline{BH}=\overline{AB}\times\cos\theta=1\times\cos\theta=\cos\theta$

직각삼각형 ACH에서

$$\overline{CH}^2=\overline{AC}^2-\overline{AH}^2$$
$$=(\sqrt{2-2\cos\theta})^2-\sin^2\theta$$
$$=(2-2\cos\theta)-(1-\cos^2\theta)$$
$$=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=(1-\cos\theta)^2$$

$\overline{CH}=1-\cos\theta$

따라서 $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\cos\theta+(1-\cos\theta)=1$



삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 OAB, 삼각형 OBC, 삼각형 OCA의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r(\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r(\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times r(\theta)+\frac{1}{2}\times 1\times r(\theta)+\frac{1}{2}\times\sqrt{2-2\cos\theta}\times r(\theta)$$

$\sin\theta=(2+\sqrt{2-2\cos\theta})r(\theta)$

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta}{2+\sqrt{2-2\cos\theta}}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{1}{2r(\theta)}-\frac{1}{\overline{AH}}\right)\times\frac{\overline{AC}}{\theta}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{2+\sqrt{2-2\cos\theta}}{2\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\times\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{\theta}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{2\sin\theta}\times\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $120\alpha=120\times\frac{1}{2}=60$

답 60

9 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=(e^x)'\times\cos x+e^x\times(\cos x)'$$
$$=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(x)=0$에서 $e^x>0$이므로 $\cos x-\sin x=0$

$\cos x=\sin x$에서 $\cos x\neq 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면

$\tan x=1\ (0<x<2\pi)$

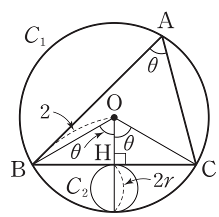
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

따라서 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 ⑤

10 원 C_1의 중심 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원 C_1과 선분 BC로 둘러싸인 두 부분 중 넓이가 작은 쪽에서 원 C_1과 선분 BC에 동시에 접하는 원을 그렸을 때, 그 크기가 가장 큰 원 C_2는 점 H에서 선분 BC와 접한다.



$\angle$CAB는 호 BC에 대한 원주각이고, $\angle$COB는 호 BC에 대한 중심각이므로

$\angle COB=2\angle CAB=2\theta$

한편 $\angle OHB=\angle OHC=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=2$, $\overline{OH}$는 공통이므로 삼각형 OBH와 삼각형 OCH는 서로 합동이다.

따라서 $\angle BOH=\angle COH$이므로

$\angle COB=\angle BOH+\angle COH$

$2\theta=2\angle BOH$, $\angle BOH=\theta$이고,

$\overline{OH}=\overline{OB}\cos\theta=2\cos\theta$

이때 원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{OB}=\overline{OH}+2r$, $2=2\cos\theta+2r$, $r=1-\cos\theta$
따라서
$f(\theta)=\pi r^2=\pi(1-\cos\theta)^2=\pi(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$
한편
$$(\cos^2\theta)'=(\cos\theta\times\cos\theta)'$$
$$=-\sin\theta\times\cos\theta+\cos\theta\times(-\sin\theta)$$
$$=-2\sin\theta\cos\theta$$
이므로
$f'(\theta)=\pi(2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)$
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\pi\left(2\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$
따라서 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $20k^2=20\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=15$

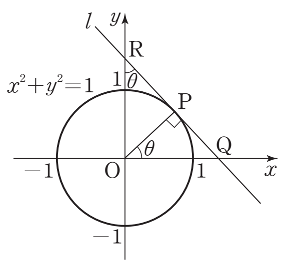
답 15

Level 1 기초 연습

본문 50쪽

1 ④	2 ③	3 115	4 ④	5 ③

1



점 P에서의 접선을 l이라 하면 직선 l은 선분 OP와 수직이므로 삼각형 POQ와 삼각형 PRO는 직각삼각형이다.
또 삼각형 POQ와 삼각형 PRO는 서로 닮음이므로 $\angle PRO=\theta$이다.
따라서 직각삼각형 PRO에서
$\tan\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{PR}}=\frac{1}{\overline{PR}}$이므로
$\overline{PR}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$

답 ④

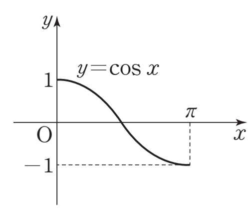
다른 풀이

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POR=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 직각삼각형 PRO에서
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{PR}}{\overline{OP}}=\overline{PR}$$
즉, $\overline{PR}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

참고

직각삼각형 POQ에서
$\cos\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{1}{\overline{OQ}}$, $\overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$
$\tan\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{PQ}}{1}$, $\overline{PQ}=\tan\theta$
직각삼각형 PRO에서
$\sin\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{1}{\overline{OR}}$, $\overline{OR}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$
직각삼각형 QOR에서
$\cos\theta=\frac{\overline{OR}}{\overline{QR}}=\frac{\csc\theta}{\overline{QR}}$, $\overline{QR}=\frac{\csc\theta}{\cos\theta}=\csc\theta\sec\theta$
① $\overline{OQ}=\sec\theta$ ② $\overline{OR}=\csc\theta$
③ $\overline{PQ}=\tan\theta$ ⑤ $\overline{QR}=\csc\theta\sec\theta$

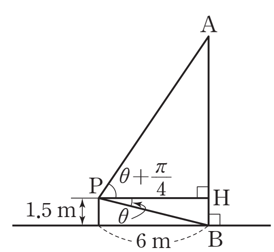
2 삼각함수의 덧셈정리에 의하여
$$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+a$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+a$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sin x+a$$
$$=\cos x+a$$
이때 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음과 같으므로 $-1\le\cos x\le 1$이다.



따라서 $f(x)=\cos x+a$의 최솟값은 $-1+a$이므로
$-1+a=-1$, $a=0$

답 ③

3



그림과 같이 탑의 꼭대기와 밑부분의 중심을 각각 A, B라 하자. 또 눈의 위치를 P, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=h$ m이고 $\overline{\mathrm{BH}}=1.5$ m, $\overline{\mathrm{PH}}=6$ m이므로

$\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\dfrac{1.5}{6}=\dfrac{1}{4}$에서

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}\times1}=\frac{5}{3}$$

따라서

$$h=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{PH}}\times\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\overline{\mathrm{BH}}$$
$$=6\times\frac{5}{3}+1.5=11.5$$

이므로 $10h=10\times11.5=115$

답 115

4 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left(2\times\frac{\sin4x}{4x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)$

이때 $4x=\theta$라 하면 $x\to0$일 때 $\theta\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

또 $2x=t$라 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\lim_{t\to0}\frac{t}{e^{t}-1}=1$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{e^{2x}-1}=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$
$$=2\times1\times1=2$$

답 ④

5 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)=(x+\pi)\sin x$에서

$$f'(x)=(x+\pi)'\times\sin x+(x+\pi)\times(\sin x)'$$
$$=1\times\sin x+(x+\pi)\times\cos x$$
$$=\sin x+(x+\pi)\cos x$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)\cos\frac{\pi}{2}=1+\frac{3}{2}\pi\times0=1$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 51쪽

1 ④ 2 90 3 ④ 4 ⑤

1 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\cot\alpha+\cot\beta=2$, $\cot\alpha\cot\beta=-1$

한편 $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$, $\cot\beta=\dfrac{1}{\tan\beta}$이므로

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{\cot\alpha\cot\beta}=-1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\cot\alpha+\cot\beta=2$에서

$$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=2$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=2$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=2\tan\alpha\tan\beta$$
$$=2\times(-1)=-2 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{-2}{1-(-1)}=-1$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

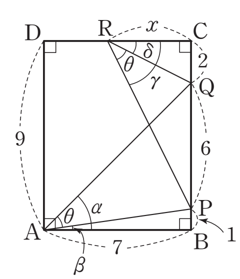
$\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin\frac{3}{4}\pi$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

2



$\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{PRQ}=\theta$, $\angle\mathrm{QAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{PAB}=\beta$라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=\dfrac{1}{7}$에서

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{7}}{1+1\times\frac{1}{7}}=\dfrac{3}{4}$

$\overline{CQ}=\overline{AD}-(\overline{BP}+\overline{PQ})=9-(1+6)=2$

$\overline{RC}=x$라 하고 $\angle PRC=\gamma$, $\angle QRC=\delta$라 하면

$\tan\gamma=\dfrac{8}{x}$, $\tan\delta=\dfrac{2}{x}$에서

$\tan\theta=\tan(\gamma-\delta)=\dfrac{\tan\gamma-\tan\delta}{1+\tan\gamma\tan\delta}$

$=\dfrac{\frac{8}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{8}{x}\times\frac{2}{x}}=\dfrac{6x}{x^2+16}$

즉, $\dfrac{6x}{x^2+16}=\dfrac{3}{4}$에서

$x^2+16=8x$, $(x-4)^2=0$, $x=4$

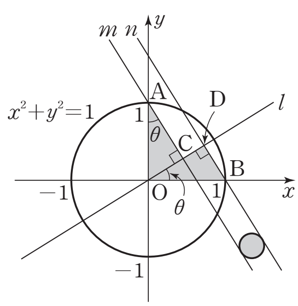
$\overline{DR}=\overline{DC}-\overline{RC}=\overline{AB}-x=7-4=3$

따라서 직각삼각형 ADR에서

$\overline{AR}^2=\overline{AD}^2+\overline{DR}^2=9^2+3^2=90$

답 90

3



직선 l이 두 직선 m, n과 만나는 점을 각각 C, D라 하면

$\angle CAO+\angle AOC=\angle AOC+\angle DOB=\dfrac{\pi}{2}$에서

$\angle CAO=\angle DOB=\theta$

이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이므로 삼각형 AOC와 삼각형 OBD는 서로 합동이다.

$\overline{OC}=\sin\theta$, $\overline{OD}=\cos\theta$이고

$\overline{CD}=|\overline{OC}-\overline{OD}|=|\sin\theta-\cos\theta|$

이다. 한편 색칠한 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\overline{CD}}{2}$이므로

$S(\theta)=\pi\times\left(\dfrac{\overline{CD}}{2}\right)^2=\pi\times\left(\dfrac{|\sin\theta-\cos\theta|}{2}\right)^2$

$=\dfrac{\pi}{4}\times(\sin\theta-\cos\theta)^2$

이때 $\theta-\dfrac{\pi}{4}=t$라 하면 $\theta=t+\dfrac{\pi}{4}$이고 $\theta\to\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이다. 또

$\sin\theta-\cos\theta=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\sin t\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos t\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-\left(\cos t\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin t\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin t$

따라서

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi}{4}\times(\sqrt{2}\sin t)^2}{t^2}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$

$=\dfrac{\pi}{2}\times1^2=\dfrac{\pi}{2}$

답 ④

4 $f(0)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xf(\sin x)}{1-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x\{f(\sin x)-f(0)\}}{1-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$

이때 $\sin x=t$라 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$

$f'(x)=(2\sin x)'=2\cos x$에서 $f'(0)=2\times1=2$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+\cos x)=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\times\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$

$=2\times1\times2=4$

답 ⑤

다른 풀이

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xf(\sin x)}{1-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin(\sin x)}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{2\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{2\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{2\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$

이때 $\sin x=t$라 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$이고,

$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim_{x\to0}(1+\cos x)=2$이므로

$\lim_{x\to0}\left\{2\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$

$=2\times1\times1\times2=4$

Level 3 실력 완성

본문 52쪽

1 ② 2 ③ 3 ③

1 직선 $y=mx+1-m=m(x-1)+1$을 l이라 하면

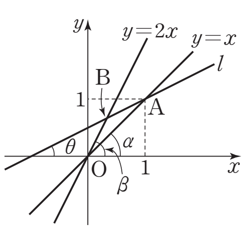
직선 l은 기울기가 m $(m>0,\ m\neq1,\ m\neq2)$이고,

점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선이므로 직선 l은 두 직선 $y=x$, $y=2x$와 각각 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, B에서 만난다.

두 직선 $y=x$, $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=2$이다.

$\tan\theta=m$이므로 삼각형 OAB가 이등변삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $0<m<1$인 경우



직선 $y=2x$와 직선 l의 교점 B는 제1사분면 위의 점이다.

한편 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서

$\angle\mathrm{BOA}=\angle\mathrm{BAO}$

즉, $\beta-\alpha=\alpha-\theta$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=\tan(\alpha-\theta)$

$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$

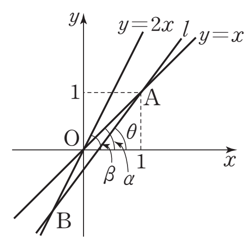
$=\frac{1-m}{1+1\times m}=\frac{1-m}{1+m}$

$\frac{1-m}{1+m}=\frac{1}{3}$에서 $m=\frac{1}{2}$

이때 $\theta=\theta_1$이라 하면

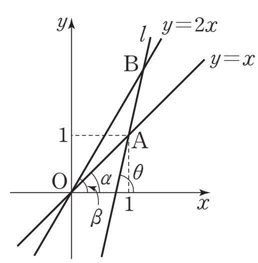
$\tan\theta=\tan\theta_1=\frac{1}{2}$ …… ㉠

(ii) $1<m<2$인 경우



직선 $y=2x$와 직선 l의 교점 B가 제3사분면 위의 점이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $m>2$인 경우



직선 $y=2x$와 직선 l의 교점 B는 제1사분면 위의 점이다.

한편 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{ABO}$

즉, $\beta-\alpha=\theta-\beta$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=\tan(\theta-\beta)$

$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$

$$\tan(\theta-\beta)=\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta}$$
$$=\frac{m-2}{1+m\times2}=\frac{m-2}{2m+1}$$

$\frac{m-2}{2m+1}=\frac{1}{3}$에서 $m=7$

이때 $\theta=\theta_2$라 하면

$\tan\theta=\tan\theta_2=7$ …… ㉡

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

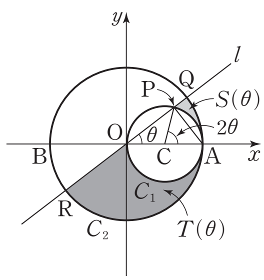
$\omega=\theta_1+\theta_2$이고, ㉠, ㉡에서

$\tan\theta_1=\frac{1}{2}$, $\tan\theta_2=7$이므로

$$\tan\omega=\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}+7}{1-\frac{1}{2}\times7}=-3$$

답 ②

2



직선 l이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 l이 원 C_2와 제3사분면에서 만나는 점을 R라 하자. 또 원 C_2가 x축과 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(-4, 0)$이라 하고, 원 C_1의 중심을 $\mathrm{C}(2, 0)$이라 하자.

$S(\theta)$=(부채꼴 OAQ의 넓이)−(삼각형 OCP의 넓이)
−(부채꼴 CAP의 넓이)

이때

(부채꼴 OAQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4^2\times\theta=8\theta$

원 C_1에서 호 AP에 대한 중심각 ∠PCA의 크기는 호 AP에 대한 원주각 ∠POA의 크기의 2배이므로

$\angle\mathrm{PCA}=2\angle\mathrm{POA}=2\theta$이고 삼각형 OCP의 높이는

$\overline{\mathrm{CP}}\times\sin2\theta=2\sin2\theta$이므로

(삼각형 OCP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times2\sin2\theta$
$=2\sin2\theta$
$=2\sin(\theta+\theta)$
$=2(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)$
$=2\times2\sin\theta\cos\theta$
$=4\sin\theta\cos\theta$

(부채꼴 CAP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2^2\times2\theta=4\theta$

따라서

$S(\theta)$=(부채꼴 OAQ의 넓이)−(삼각형 OCP의 넓이)
−(부채꼴 CAP의 넓이)
$=8\theta-4\sin\theta\cos\theta-4\theta$
$=4\theta-4\sin\theta\cos\theta$

$S(\theta)-4\theta+4\sin\theta=4\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta$

한편

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times$(원 C_2의 넓이)
$-\frac{1}{2}\times$(원 C_1의 넓이)−(부채꼴 OBR의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times(\pi\times4^2)-\frac{1}{2}\times(\pi\times2^2)-\frac{1}{2}\times4^2\times\theta$
$=6\pi-8\theta$

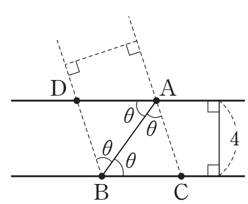
$6\pi-T(\theta)=8\theta$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-4\theta+4\sin\theta}{\theta^2\{6\pi-T(\theta)\}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta}{\theta^2\times8\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ③

3



선분 BC와 선분 BD는 선분 AB에 대하여 대칭이므로

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ABC}=\theta$

종이의 윗변과 아랫변은 평행하므로

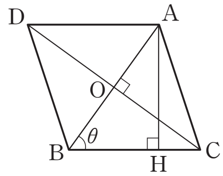
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ABC}=\theta$ (엇각)

선분 AC와 선분 AD는 선분 AB에 대하여 대칭이므로

$\angle BAC = \angle BAD = \theta$

삼각형 ABC와 삼각형 ABD는 이등변삼각형이고, $\overline{AB}$는 공통이므로 두 삼각형은 서로 합동이다.

따라서 사각형 ADBC는 마름모이다.



점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=4$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\sin\theta = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{4}{\overline{AB}}$, $\overline{AB} = \dfrac{4}{\sin\theta}$

한편 선분 AB와 선분 CD의 교점을 O라 하면 사각형 ADBC는 마름모이므로 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

즉, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$\overline{OB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\theta}$

직각삼각형 OBC에서

$\overline{OC} = \overline{OB}\tan\theta = \dfrac{2}{\sin\theta} \times \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$

따라서

$S(\theta) = 4 \times \left(\dfrac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC}\right)$

$= 4 \times \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sin\theta} \times \dfrac{2}{\cos\theta}\right)$

$= \dfrac{8}{\sin\theta\cos\theta}$

ㄱ. $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{8}{\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{8}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 16$ (참)

ㄴ. $S(\theta) = \dfrac{8}{\sin\theta\cos\theta} = 48$에서

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{6}$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2$

$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{3}$

이때 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{6 \times \left\{S\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - S(\theta)\right\}}{(6\theta - \pi) \times S\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \times S(\theta)}$

$= \displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \left[\dfrac{1}{\theta - \dfrac{\pi}{6}} \left\{\dfrac{1}{S(\theta)} - \dfrac{1}{S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\right\}\right]$

$f(\theta) = \dfrac{1}{S(\theta)} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{8}$라 하면

$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \left[\dfrac{1}{\theta - \dfrac{\pi}{6}} \left\{\dfrac{1}{S(\theta)} - \dfrac{1}{S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\right\}\right]$

$= \displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{f(\theta) - f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{\theta - \dfrac{\pi}{6}} = f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$f'(\theta) = \dfrac{1}{8}\{(\sin\theta)' \times \cos\theta + \sin\theta \times (\cos\theta)'\}$

$= \dfrac{1}{8}\{\cos\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times (-\sin\theta)\}$

$= \dfrac{1}{8}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{6} - \sin^2\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \dfrac{1}{8}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}$

$= \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

05 여러 가지 미분법

유제

본문 55~63쪽

1 ①	2 ③	3 ③	4 ⑤	5 ④
6 13	7 ③	8 ⑤	9 ①	10 ②

1 $f(x)=\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^{k+1}}{x^{2k-1}}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^7}+\cdots+\frac{1}{x^{17}}-\frac{1}{x^{19}}$

$f'(x)=(x^{-1}-x^{-3}+x^{-5}-x^{-7}+\cdots+x^{-17}-x^{-19})'$

$=-x^{-2}+3x^{-4}-5x^{-6}+7x^{-8}$

$-\cdots-17x^{-18}+19x^{-20}$

따라서

$f'(1)=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+(-17+19)$

$=2\times5=10$

답 ①

2 $g'(x)=\left\{\frac{1+f(x)}{x^2}\right\}'=\frac{f'(x)\times x^2-\{1+f(x)\}\times2x}{(x^2)^2}$

$=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)-2x}{x^4}$

$=\frac{xf'(x)-2f(x)-2}{x^3}$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$g'(2)=\frac{2f'(2)-2f(2)-2}{8}=\frac{f'(2)-f(2)-1}{4}$

$=\frac{16-1}{4}=\frac{15}{4}$

답 ③

3 $f'(x)=(e^{4x})'\tan2x+e^{4x}(\tan2x)'$

$=\{e^{4x}\times(4x)'\}\times\tan2x+e^{4x}\times\{\sec^2 2x\times(2x)'\}$

$=4e^{4x}\tan2x+2e^{4x}\sec^2 2x$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4e^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{\pi}{4}+2e^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{\pi}{4}$

$=4e^{\frac{\pi}{2}}\times1+2e^{\frac{\pi}{2}}\times(\sqrt{2})^2=8e^{\frac{\pi}{2}}$

답 ③

4 $h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$g(1)=1$, $h'(1)=-4$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=-4$

$y=f\left(\frac{1}{g(x)}\right)$에서

$y'=f'\left(\frac{1}{g(x)}\right)\times\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$

$=f'\left(\frac{1}{g(x)}\right)\times\left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right]$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{g(1)}\right)\times\left[-\frac{g'(1)}{\{g(1)\}^2}\right]=f'(1)\times\{-g'(1)\}$

$=-f'(1)g'(1)=4$

답 ⑤

5 $x=\ln|\cos\theta|$, $y=\ln|\sin2\theta|$에서

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\frac{dy}{d\theta}=\frac{(\sin2\theta)'}{\sin2\theta}=\frac{2\cos2\theta}{\sin2\theta}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{2\cos2\theta}{\sin2\theta}}{-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=-\frac{2\cos2\theta\cos\theta}{\sin2\theta\sin\theta}$ ...... ㉠

$\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $\theta=\frac{\pi}{3}$를 대입한 값과 같으므로

$-\frac{2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}$

답 ④

6 $x=\ln t$, $y=t^2-4t$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2t-4$

이므로

$m(t)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-4}{\frac{1}{t}}=2t^2-4t$

$=2(t-1)^2-2\ge-2$ (단, 등호는 $t=1$일 때 성립)

즉, $t>0$일 때 $m(t)\ge-2$이고,

$t=1$일 때 $x=\ln1=0$, $y=1-4=-3$에서 $\mathrm{P}(0,\ -3)$이므로

$a=0$, $b=-3$, $c=-2$

따라서

$a^2+b^2+c^2=0^2+(-3)^2+(-2)^2=13$

답 13

7 합성함수의 미분법에 의해서

$\frac{d}{dx}\{\ln(y+1)\}=\frac{d}{dy}\{\ln(y+1)\}\times\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}e^y=\frac{d}{dy}e^y\times\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$

이때

$\frac{d}{dx}\{e^x\ln(y+1)\}$

$=\left(\frac{d}{dx}e^x\right)\times\ln(y+1)+e^x\times\frac{d}{dx}\{\ln(y+1)\}$

$=e^x\ln(y+1)+\frac{e^x}{y+1}\frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}\{e^y\ln(x+1)\}$

$=\left(\frac{d}{dx}e^y\right)\times\ln(x+1)+e^y\times\frac{d}{dx}\{\ln(x+1)\}$

$=e^y\ln(x+1)\frac{dy}{dx}+\frac{e^y}{x+1}$

따라서 $2e^x\ln(y+1)+e^y\ln(x+1)=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\left\{e^x\ln(y+1)+\frac{e^x}{y+1}\frac{dy}{dx}\right\}+e^y\ln(x+1)\frac{dy}{dx}+\frac{e^y}{x+1}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{e^y}{x+1}+2e^x\ln(y+1)}{\frac{2e^x}{y+1}+e^y\ln(x+1)}$$

$\left(\frac{2e^x}{y+1}+e^y\ln(x+1)\neq0\right)$ …… ㉠

구하는 접선의 기울기는 ㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입한 값이므로 $-\frac{1+2\times0}{2+0}=-\frac{1}{2}$

답 ③

8 점 $(2,\ 1)$이 곡선 $ax^2-y^2-2xy+b=0$ 위의 점이므로

$4a+b=5$ …… ㉠

곱의 미분법에 의해서

$\frac{d}{dx}(xy)=y+x\frac{dy}{dx}$

합성함수의 미분법에 의해서

$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

$ax^2-y^2-2xy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(y^2)-2\frac{d}{dx}(xy)=0$

$2ax-2y\frac{dy}{dx}-2\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{ax-y}{x+y}\ (x+y\neq0)$ …… ㉡

곡선 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 ㉡에 $x=2$, $y=1$을 대입한 값이므로 $\frac{2a-1}{3}$이다.

곡선 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{2a-1}{3}=\frac{1}{3}$, $a=1$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $b=1$이므로 $a+b=1+1=2$

답 ⑤

9 $f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=(e^x)'\times\cos x+e^x\times(\cos x)'$

$=e^x\times\cos x+e^x\times(-\sin x)$

$=e^x(\cos x-\sin x)$

$f''(x)=(e^x)'\times(\cos x-\sin x)+e^x\times(\cos x-\sin x)'$

$=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^x\sin x$

방정식 $f(x)=f''(x)$의 실근이 α이므로

$e^\alpha\cos\alpha=-2e^\alpha\sin\alpha$ …… ㉠

$e^\alpha>0$이므로 ㉠의 양변을 e^α으로 나누면

$\cos\alpha=-2\sin\alpha$ …… ㉡

$\cos\alpha=0$이면 $\sin\alpha=\pm1$이므로 $\cos\alpha\neq-2\sin\alpha$

따라서 $\cos\alpha\neq0$이므로 ㉡의 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$, 즉 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$

답 ①

10 $h(x)=g(2x)$라 하면

$h'(x)=g'(2x)\times(2x)'=2g'(2x)$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g'(0)=\frac{1}{2}h'(0)$ …… ㉡

한편 $(f\circ g)(2x)=f(g(2x))=f(h(x))=x$이므로

$h(0)=k$라 하면 $f(k)=0$

$k^3-2k^2+2k-1=0$, $(k-1)(k^2-k+1)=0$

$k^2-k+1>0$이므로 $k=1$, 즉 $h(0)=1$

$h(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 역함수의 미분법에 의하여

$h'(0)=\frac{1}{f'(h(0))}=\frac{1}{f'(1)}$

$f'(x)=3x^2-4x+2$이므로 $f'(1)=3-4+2=1$

$h'(0)=\frac{1}{f'(1)}=1$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $g'(0)=\frac{1}{2}h'(0)=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

답 ②

다른 풀이

$f(g(2x))=x$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(g(0))=0$

$g(0)=f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$에서

$k^3-2k^2+2k-1=0$, $(k-1)(k^2-k+1)=0$

$k^2-k+1>0$이므로 $k=1$, 즉 $g(0)=1$ …… ㉡

㉠의 양변을 미분하면 $f'(g(2x))\times\{g(2x)\}'=1$

$f'(g(2x))\times g'(2x)\times2=1$ …… ㉢

㉢에 $x=0$을 대입하면 ㉡에 의하여

$f'(g(0))\times g'(0)\times2=1$, $f'(1)\times g'(0)\times2=1$

$f'(x)=3x^2-4x+2$이므로 $f'(1)=1$

$1\times g'(0)\times2=1$

따라서 $g'(0)=\frac{1}{2}$

Level 1 기초 연습

본문 64쪽

1 ②	2 ②	3 ③	4 ⑤	5 ①

1 $f'(x)=\left(\frac{x}{e^x+1}\right)'=\frac{1\times(e^x+1)-x\times e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$

따라서 $f'(0)=\frac{e^0+1}{(e^0+1)^2}=\frac{1}{2}$

답 ②

2 $\left(\ln\frac{1}{x^2+1}\right)'=\{-\ln(x^2+1)\}'$

$=-\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}$

이므로

$y'=(x)'\times\ln\frac{1}{x^2+1}+x\times\left(\ln\frac{1}{x^2+1}\right)'$

$=1\times\ln\frac{1}{x^2+1}+x\times\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

$=\ln\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x^2}{x^2+1}$ …… ㉠

곡선 위의 점 $\left(1, \ln\frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로

$\ln\left(\frac{1}{1+1}\right)-\frac{2\times1}{1+1}=\ln\frac{1}{2}-1=\ln\frac{1}{2}-\ln e=\ln\frac{1}{2e}$

답 ②

3 $x=\tan\theta$, $y=\sec\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\sin\theta$$

이때 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다. 즉, $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $a=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $b=\sec\frac{\pi}{3}=2$이므로

$ab=\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$

답 ③

4 점 (a, b)는 곡선 $x^2+4y^2=8$ 위의 점이므로

$a^2+4b^2=8$ …… ㉠

합성함수의 미분법에 의해서

$\frac{d}{dx}(4y^2)=\frac{d}{dy}(4y^2)\times\frac{dy}{dx}=8y\frac{dy}{dx}$

$x^2+4y^2=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$ $(y\neq0)$ …… ㉡

곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 ㉡에 $x=a$, $y=b$를 대입한 값이므로

$-\frac{a}{4b}=\frac{1}{2}$, $a^2=4b^2$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $a^2=4$, $b^2=1$이므로 $a^2+b^2=4+1=5$

답 ⑤

5 $g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$

$\ln(e^k-1)=0$, $e^k-1=1$

$e^k=2$, $k=\ln2$, 즉 $g(0)=\ln2$

한편 $g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(\ln2)}$

$f(x)=\ln(e^x-1)$이므로

$f'(x)=\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$에서

$f'(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}=\frac{2}{2-1}=2$

따라서 $g'(0)=\frac{1}{f'(\ln 2)}=\frac{1}{2}$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 65쪽

1 ③	2 ①	3 ②	4 ④	5 ②

1 $f(x)=\frac{e^x}{1+\csc x}$에서

$f'(x)=\frac{e^x\times(1+\csc x)-e^x\times(-\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$

$=\frac{e^x(1+\csc x+\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$

방정식 $f(x)=f'(x)$에서

$\frac{e^x}{1+\csc x}=\frac{e^x(1+\csc x+\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$

양변에 $\frac{(1+\csc x)^2}{e^x}$을 곱하여 정리하면

$\csc x\cot x=0$, $\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=0$

$0<x<\pi$에서 $\cos x=0$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$

답 ③

2 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이다. 이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$

한편 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(f(2))=f(0)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))-f(f(2))}{x-2}$

$=(f\circ f)'(2)$

함수 $h(x)=(f\circ f)(x)$라 하면

$h'(x)=f'(f(x))f'(x)$

조건 (가)에서 $f'(0)=3$이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)=f'(0)f'(2)=3\times 4=12$

따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))}{x-2}=h'(2)=12$

답 ①

3 두 곡선 $y^2=x$와 $3x^2-3xy+y^2=1$의 제1사분면에서의 교점은

$3y^4-3y^3+y^2-1=0$, $(y-1)(3y^3+y+1)=0$

이때 $y>0$이므로 $y=1$

$y^2=x$에서 $x=1$

즉, 두 곡선의 제1사분면에서의 교점은 $\mathrm{P}(1, 1)$이다.

$y^2=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ $(y\neq 0)$

곡선 $y^2=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$

$3x^2-3xy+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x-3y-3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-3y}{3x-2y}$ $(3x-2y\neq 0)$

곡선 $3x^2-3xy+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면

$\tan\beta=\frac{6-3}{3-2}=3$

$\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=|\tan(\beta-\alpha)|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$

$=\left|\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}\right|=1$

답 ②

참고

$g(y)=3y^3+y+1$이라 하면 함수 $g(y)$는 증가함수이고, $g(0)=1$이다. 따라서 $y>0$일 때 $g(y)>1$이다.

4 $\theta=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 점 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$에 대하여

$a\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\times 0=\frac{3\sqrt{3}}{8}$에서

$a=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{6}-b\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}-b\times1=\frac{1}{8}$에서

$b=\frac{1}{4}$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{3}{4}\times(-\sin\theta)-\frac{1}{4}\times(-3\sin3\theta)$$
$$=\frac{3}{4}(-\sin\theta+\sin3\theta)$$
$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{4}\times\cos\theta-\frac{1}{4}\times3\cos3\theta=\frac{3}{4}(\cos\theta-\cos3\theta)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{3}{4}(\cos\theta-\cos3\theta)}{\frac{3}{4}(-\sin\theta+\sin3\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos3\theta}{-\sin\theta+\sin3\theta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

구하는 접선의 기울기는 ㉠에 $\theta=\frac{\pi}{6}$를 대입한 값이므로

$$\frac{\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$$

답 ④

5 $h(x)=\{g(x)\}^2$에서 $h'(x)=2g(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=2g(1)g'(1)$ ······ ㉠

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$k-\frac{2}{k}=1$, $k^2-k-2=0$, $(k-2)(k+1)=0$

$k>0$이므로 $k=2$, 즉 $g(1)=2$ ······ ㉡

한편 $g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(2)}$

$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}$이므로 $f'(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$g'(1)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{2}{3}$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $h'(1)=2g(1)g'(1)=2\times2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 66쪽

1 ④ 2 ① 3 ② 4 257

1 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $e^x>0$, $\cos x>0$이므로

$f(x)\sqrt{g(x)}>0$, 즉 $f(x)>0$, $g(x)>0$

조건 (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)\times\sqrt{g(0)}=e^0\times\cos0=1$ ······ ㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)\times\sqrt{g(x)}+f(x)\times\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$
$$=e^x\cos x+e^x(-\sin x) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)\times\sqrt{g(0)}+f(0)\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=1+0=1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠과 조건 (나)에서

$$f'(0)\times\sqrt{g(0)}=f'(0)\times\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉠에서

$$f(0)\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=\frac{1}{\sqrt{g(0)}}\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)} \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 ㉢에 대입하면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$이므로

$\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

답 ④

다른 풀이

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $e^x>0$, $\cos x>0$이므로

$f(x)\sqrt{g(x)}>0$, 즉 $f(x)>0$, $g(x)>0$

조건 (가)에서 양변에 로그를 취하면

$\ln(f(x)\sqrt{g(x)})=\ln(e^x\cos x)$

$\ln f(x)+\ln\sqrt{g(x)}=\ln e^x+\ln(\cos x)$

$\ln f(x)+\frac{1}{2}\ln g(x)=x+\ln(\cos x)$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(x)}{g(x)}=1+\frac{(-\sin x)}{\cos x} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 $x=0$을 대입하면 조건 (나)에서 $\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$$

따라서 $\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

2 ㄱ. $f(t)=3t^5-5t^4+t$, $g(t)=t^4+t^2-2$에서

$f(1)=-1$, $g(1)=0$이므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(1+2\Delta t)-g(1)}{f(1+\Delta t)-f(1)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\left\{\frac{g(1+2\Delta t)-g(1)}{2\Delta t}\right\}}{\frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}}$$

$$= 2 \times \frac{g'(1)}{f'(1)}$$

$f'(t)=15t^4-20t^3+1$, $g'(t)=4t^3+2t$에서

$f'(1)=15-20+1=-4$, $g'(1)=4+2=6$이므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1} = 2 \times \frac{g'(1)}{f'(1)} = 2 \times \frac{6}{-4} = -3$$

(참)

ㄴ. 곡선 l이 점 $(-2, 0)$을 지나면 $f(t)=-2$, $g(t)=0$을 동시에 만족시키는 실수 t가 존재한다.

$g(t)=0$에서 $t^4+t^2-2=0$, $(t^2+2)(t^2-1)=0$

$t^2+2>0$이므로 $t^2-1=0$

$t=-1$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때, $f(-1)=-9$에서 $f(-1)\neq -2$

(ii) $t=1$일 때, $f(1)=-1$에서 $f(1)\neq -2$

(i), (ii)에서 $f(t)=-2$, $g(t)=0$을 동시에 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다. 즉, 곡선 l은 점 $(-2, 0)$을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 두 함수 $f(t)$, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 곡선 l 위의 임의의 점 (x, y)에 대하여 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$가 존재하기 위해서는 실수 전체의 집합에서 $f'(t)\neq 0$이 성립해야 한다.

따라서 $h(t)=f'(t)$로 놓으면 4차 함수 $h(t)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 $h(t)>0$이 성립해야 한다.

$h(t)=15t^4-20t^3+1$

$h'(t)=60t^3-60t^2=60t^2(t-1)$

$h'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=1$

$h'(t)$의 부호를 조사하여 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↘	1	↘	극소	↗

함수 $h(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이고

$h(1)=15-20+1=-4$

$h(0)>0$, $h(1)<0$, $h(2)=81>0$이므로 위의 표와 사잇값 정리에 의하여 $h(\alpha)=0$, $h(\beta)=0$을 만족시키는 α, β $(0<\alpha<1<\beta<2)$가 존재한다.

즉, 방정식 $f'(t)=0$을 만족시키는 α, β가 존재하므로 $t=\alpha$, $t=\beta$에 대응하는 점에 대하여 $\frac{dy}{dx}$는 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

3 $F(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$F'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$f(4)=2$에서 $f^{-1}(2)=4$, $g(2)=9$에서 $g^{-1}(9)=2$

$G(9)=(g\circ f)^{-1}(9)=(f^{-1}\circ g^{-1})(9)$

$=f^{-1}(g^{-1}(9))=f^{-1}(2)=4$

따라서

$$G'(9)=\frac{1}{F'(G(9))}=\frac{1}{g'(f(G(9)))\times f'(G(9))}$$

$$=\frac{1}{g'(f(4))\times f'(4)}=\frac{1}{g'(2)}\times\frac{1}{f'(4)}$$

$$=\frac{1}{12}\times 4=\frac{1}{3}$$

답 ②

다른 풀이

$G(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))$

이므로

$G'(x)=(f^{-1})'(g^{-1}(x))\times(g^{-1})'(x)$

$f(4)=2$에서 $f^{-1}(2)=4$, $g(2)=9$에서 $g^{-1}(9)=2$

따라서

$G'(9)=(f^{-1})'(g^{-1}(9))\times(g^{-1})'(9)$

$=(f^{-1})'(2)\times(g^{-1})'(9)$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}\times\frac{1}{g'(g^{-1}(9))}$$

$$=\frac{1}{f'(4)}\times\frac{1}{g'(2)}=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

4 점 $(f(t), t)$는 함수 $y=2^x-2^{-x}$의 그래프 위의 점이므로

$2^{f(t)}-2^{-f(t)}=t$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$4^{f(t)}+4^{-f(t)}=t^2+2$이므로

$g(t)=f(t)\times\{4^{f(t)}+4^{-f(t)}\}$

$=f(t)\times(t^2+2)=(t^2+2)f(t)$

함수 $g(t)$를 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=2tf(t)+(t^2+2)f'(t)$ …… ㉡

$f\left(\frac{15}{4}\right)=k$라 하면 ㉠에서 $2^k-2^{-k}=\frac{15}{4}$

$4\times 2^{2k}-15\times 2^k-4=0$, $(4\times 2^k+1)(2^k-4)=0$

$4\times 2^k+1>0$에서 $2^k=4$

$k=2$, 즉 $f\left(\frac{15}{4}\right)=2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서

$$g'\left(\frac{15}{4}\right)=2\times\frac{15}{4}\times f\left(\frac{15}{4}\right)+\left\{\left(\frac{15}{4}\right)^2+2\right\}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$=2\times\frac{15}{4}\times 2+\left(\frac{225}{16}+2\right)\times f'\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$=15+\frac{257}{16}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)$$

함수 $h(x)=2^x-2^{-x}$이라 하면 ㉠에서

$h(f(t))=t$ $\cdots\cdots$ ㉣

즉, 함수 f는 함수 h의 역함수이다.

㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(f(t))f'(t)=1$, $f'(t)=\frac{1}{h'(f(t))}$

이때

$h'(x)=2^x\times\ln 2-2^{-x}\times\ln 2\times(-1)=(2^x+2^{-x})\ln 2$

$h'(2)=(2^2+2^{-2})\ln 2=\frac{17}{4}\ln 2$이므로

$$f'\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{1}{h'\left(f\left(\frac{15}{4}\right)\right)}=\frac{1}{h'(2)}=\frac{4}{17\ln 2}$$

따라서

$$g'\left(\frac{15}{4}\right)=15+\frac{257}{16}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$=15+\frac{257}{16}\times\frac{4}{17\ln 2}$$

$$=15+\frac{257}{68\ln 2}$$

이므로

$\left\{g'\left(\frac{15}{4}\right)-15\right\}\times 68\ln 2=257$

답 257

참고

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2^{f(t)}\times\ln 2\times f'(t)-2^{-f(t)}\times\ln 2\times\{-f'(t)\}=1$

$\{2^{f(t)}+2^{-f(t)}\}f'(t)\ln 2=1$

$f'(t)=\frac{1}{\{2^{f(t)}+2^{-f(t)}\}\ln 2}$ $\cdots\cdots$ (*)

$f\left(\frac{15}{4}\right)=2$이므로 (*)에 $t=\frac{15}{4}$를 대입하면

$$f'\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{1}{\left\{2^{f\left(\frac{15}{4}\right)}+2^{-f\left(\frac{15}{4}\right)}\right\}\ln 2}$$

$$=\frac{1}{(2^2+2^{-2})\ln 2}=\frac{4}{17\ln 2}$$

06 도함수의 활용

유제

본문 69~79쪽

1 ①	2 ②	3 ④	4 ②	5 ③
6 ③	7 ③	8 ①	9 ③	10 ②
11 ③				

1 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2-4$라 하면 진수 조건에 의하여 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{\ln x}{x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(t, \frac{1}{2}(\ln t)^2-4\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left\{\frac{1}{2}(\ln t)^2-4\right\}=\frac{\ln t}{t}(x-t)$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원점 $(0, 0)$을 지나야 하므로

$-\frac{1}{2}(\ln t)^2+4=-\ln t$

$(\ln t)^2-2\ln t-8=0$, $(\ln t+2)(\ln t-4)=0$

$\ln t=-2$ 또는 $\ln t=4$에서

$t=e^{-2}$ 또는 $t=e^4$

이때 접선의 기울기는 각각 $-2e^2$, $\frac{4}{e^4}$이므로 두 기울기 m_1, m_2의 곱은

$m_1m_2=-2e^2\times\frac{4}{e^4}=-\frac{8}{e^2}$

답 ①

2 $y=\frac{3}{x^2+3}$에서 $y'=-\frac{6x}{(x^2+3)^2}$

$y=x^2+k$에서 $y'=2x$

두 곡선의 교점의 x좌표를 x_1이라 하면 y좌표가 같으므로

$\frac{3}{{x_1}^2+3}={x_1}^2+k$ $\cdots\cdots$ ㉠

이다. 또 교점에서의 접선이 서로 수직이므로

$-\frac{6x_1}{({x_1}^2+3)^2}\times 2x_1=-1$

정리하면 $({x_1}^2-3)^2=0$

${x_1}^2=3$이고 $x_1>0$이므로 $x_1=\sqrt{3}$

㉠에서 $k=\frac{3}{{x_1}^2+3}-{x_1}^2=\frac{3}{3+3}-3=-\frac{5}{2}$

답 ②

3 $f(x)=axe^{-x}$에서

$f'(x)=ae^{-x}-axe^{-x}=ae^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

(i) $a<0$이면 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

(ii) $a=0$이면 함수 $f(x)$의 함숫값이 항상 0이고, 극댓값이 $\frac{3}{e}$이 될 수 없다.

(iii) $a>0$이면 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

따라서 $b=1$

극댓값이 $\frac{3}{e}$이므로 $f(1)=ae^{-1}=\frac{3}{e}$

따라서 $a=3$

그러므로 $a+b=3+1=4$

답 ④

4 $f(x)=\ln(1+4x^2)-ax$에서

$f'(x)=\frac{8x}{1+4x^2}-a=\frac{-4ax^2+8x-a}{1+4x^2}$

$1+4x^2>0$이고 $a>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여

$-4ax^2+8x-a\le 0$

이어야 한다. 이차방정식 $-4ax^2+8x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-4a^2=-4(a^2-4)\le 0$

a는 양수이므로 $a^2\ge 4$에서 $a\ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

5 점 $(e, 3e^2)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(e)=ae^2+be^2\ln e=(a+b)e^2=3e^2$

따라서 $a+b=3$ ······ ㉠

이때

$f'(x)=2ax+2bx\ln x+bx^2\times\frac{1}{x}$

$=(2a+b)x+2bx\ln x$

$f''(x)=2a+b+2b\ln x+2bx\times\frac{1}{x}$

$=2a+3b+2b\ln x$

$f''(e)=0$에서

$f''(e)=2a+5b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$

따라서 $a^2+b^2=25+4=29$

답 ③

6 $y=ax^2-2x+4\cos x$에서

$y'=2ax-2-4\sin x$

$y''=2a-4\cos x$

곡선 $y=ax^2-2x+4\cos x$가 변곡점을 갖기 위해서는 $y''=0$이 되는 x의 값이 존재하고 그 점의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌어야 한다.

$0<x<2\pi$일 때 $-1\le\cos x<1$이므로

$2a-4<y''\le 2a+4$

$y''=0$이 되는 x의 값이 존재하기 위해서는

$2a-4<0$이고 $2a+4\ge 0$

이때 $2a+4=0$이면 $y''\le 0$이므로 그 점의 좌우에서 y''의 부호가 변하지 않는다.

따라서 변곡점이 존재하기 위해서는

$2a-4<0$이고 $2a+4>0$이어야 한다.

즉, $a<2$이고 $a>-2$에서 $-2<a<2$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이 될 수 있고 그 개수는 3이다.

답 ③

7 점 P는 제1사분면의 점이므로

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

삼각형 OPA는 직각삼각형이므로

$\overline{OP}=2\cos\theta$이고 $\overline{OQ}=2\cos\theta+2$

따라서 점 Q의 y좌표 $f(\theta)$는

$f(\theta)=(2\cos\theta+2)\sin\theta$

$=2(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)$

이때

$f'(\theta)=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta)$

$=2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$=2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(\theta)=0$을 만족시키는 θ의 값은 $\frac{\pi}{3}$이고, $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	극대	↘	

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대가 되고 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ③

8 $x^2 \ln x = 2x^2 - k$에서 $2x^2 - x^2 \ln x = k$

$h(x) = 2x^2 - x^2 \ln x$라 하면 방정식 $f(x) = g(x)$가 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = h(x)$의 그래프와 직선 $y = k$가 만나야 한다.

$h'(x) = 4x - 2x \ln x - x^2 \times \frac{1}{x} = x(3 - 2\ln x)$

$h'(x) = 0$에서 $x = e^{\frac{3}{2}}$

$x > 0$일 때 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^3$	$\searrow$

함수 $h(x)$는 $x = e^{\frac{3}{2}}$일 때 극댓값 $\frac{1}{2}e^3$을 갖고

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}(2x^2 - x^2 \ln x)$$
$$= \lim_{x\to\infty} x^2(2 - \ln x) = -\infty$$

이므로 함수 $h(x)$의 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y \le \frac{1}{2}e^3\right\}$이다.

따라서 함수 $y = h(x)$의 그래프와 직선 $y = k$가 만나기 위한 실수 k의 값의 범위는 $k \le \frac{1}{2}e^3$이고, 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{2}e^3$이다.

답 ①

9 $\ln(x-1) \le 3x - k$에서 $3x - \ln(x-1) \ge k$

$f(x) = 3x - \ln(x-1)$이라 하면

$f'(x) = 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x-1}$

$f'(x) = 0$에서 $x = \frac{4}{3}$

$x > 1$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$4+\ln 3$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{4}{3}$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{3} - \ln\left(\frac{4}{3} - 1\right)$$
$$= 4 - \ln\frac{1}{3} = 4 + \ln 3$$

즉, $x > 1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \ge 4 + \ln 3$

이므로 k의 최댓값은 $4 + \ln 3$이다.

답 ③

10 $\frac{dx}{dt} = 4 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(4-\cos t)^2 + \sin^2 t}$$
$$= \sqrt{16 - 8\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$
$$= \sqrt{17 - 8\cos t}$$

따라서 점 P의 속력은 $t = \pi$일 때 최대이고, 최댓값은

$\sqrt{17+8} = \sqrt{25} = 5$

즉, $k = 1$, $M = 5$이므로 $k + M = 6$

답 ②

11 점 P가 직선 $y = x$ 위에 있을 때

$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$에서

$1 - t^2 = 2t$

$t^2 + 2t - 1 = 0$

$t > 0$이므로 $t = -1 + \sqrt{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{(-4t)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4(1+t^2)^2}{(1+t^2)^4}} = \frac{2}{1+t^2}$$

이므로 $t = -1 + \sqrt{2}$일 때의 점 P의 속력은

$$\frac{2}{1+(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

따라서 $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$이므로

$a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 80쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 ③ 5 ①

1 점 (a, b)는 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 점이므로

$b=\frac{\ln a}{a}$ …… ㉠

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 점 $\left(a, \frac{\ln a}{a}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(x-a)$

즉, $y=\frac{1-\ln a}{a^2}x+\frac{2\ln a-1}{a}$ …… ㉡

접선 ㉡이 원점을 지나므로 $\frac{2\ln a-1}{a}=0$에서

$\ln a=\frac{1}{2}$, 즉 $a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

이고 ㉠에서

$b=\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}=\frac{1}{2\sqrt{e}}$

따라서 $ab=\sqrt{e}\times\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2}$

답 ③

2 $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-(3x-4)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$일 때 극소이고 극솟값 m은

$m=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{9}{2}$

$x=3$일 때 극대이고 극댓값 M은

$M=f(3)=\frac{1}{2}$

따라서

$M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)=5$

답 ⑤

3 $f(x)=e^{x\sin x+\cos x}$에서

$f'(x)=(\sin x+x\cos x-\sin x)e^{x\sin x+\cos x}$

$=(x\cos x)e^{x\sin x+\cos x}$

$0<x<\pi$일 때 $x>0$, $e^{x\sin x+\cos x}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$이고 $x=\frac{\pi}{2}$

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	e^{-1}

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극대이면서 최대이고 최댓값은

$M=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$

또 $f(0)>f(\pi)$이므로 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최소이고 최솟값은

$m=f(\pi)=e^{-1}$

그러므로

$Mm=e^{\frac{\pi}{2}}\times e^{-1}=e^{\frac{\pi}{2}-1}$

답 ①

4 $x\ln x=2x+5-n$에서

$-x\ln x+2x+5=n$

$f(x)=-x\ln x+2x+5$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점이 존재하는 자연수 n의 개수를 구하면 된다.

$f'(x)=-\ln x-x\times\frac{1}{x}+2=-\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$e+5$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 극댓값 $e+5$를 갖고

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(-x\ln x+2x+5)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\{x(2-\ln x)+5\}=-\infty$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점이 존재할 때 n의 값의 범위는

$n\le e+5$

$2<e<3$이므로 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 7이 될 수 있고 그 개수는 7이다.

답 ③

5 $\dfrac{dx}{dt}=-2t+4$, $\dfrac{dy}{dt}=3$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-2t+4)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{4(t-2)^2+9}$$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 속력이 최소가 되고 최솟값은 $\sqrt{9}=3$이다.

즉, $a=2$, $m=3$이므로 $a+m=5$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 81쪽

1 ④ 2 ① 3 ① 4 ②

1 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x-3)x^2-(x^2-3x+2)\times 2x}{x^4}=\frac{3x-4}{x^3}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{t^2-3t+2}{t^2}=\frac{3t-4}{t^3}(x-t)$$

즉, $y=\dfrac{3t-4}{t^3}x+\dfrac{t^2-6t+6}{t^2}$ …… ㉠

직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 다음 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{3t-4}{t^3}x+\frac{t^2-6t+6}{t^2}$$

양변에 t^3x^2을 곱하여 정리하면

$(3t-4)x^3-(6t^2-6t)x^2+3t^3x-2t^3=0$ …… ㉡

직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$가 접하므로 방정식 ㉡은 $x=t$를 중근으로 가진다. 좌변을 인수분해하면

$(x-t)^2\{(3t-4)x-2t\}=0$ …… ㉢

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 ㉠이 점 P 이외의 점에서 만나지 않기 위해서는 방정식 ㉢이 $x=t$ 이외의 근을 갖지 않아야 한다.

(i) $(3t-4)x-2t=0$이 $x<0$인 근을 갖는 경우

$t>0$이므로 $3t-4<0$이면 된다.

따라서 $0<t<\dfrac{4}{3}$

(ii) $(3t-4)x-2t=0$이 근을 갖지 않는 경우

$3t-4=0$에서 $t=\dfrac{4}{3}$

(iii) $(3t-4)x-2t=0$의 근이 t인 경우

$(3t-4)t-2t=0$에서

$3t(t-2)=0$

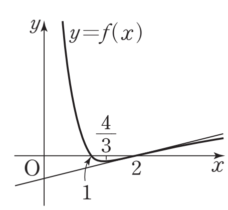
$t>0$이므로 $t=2$

(i), (ii), (iii)에서 $0<t\le\dfrac{4}{3}$ 또는 $t=2$이므로 t의 최댓값은 2이다.

답 ④

참고

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$t=2$일 때 점 P는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고, 점 P에서의 접선은 곡선 $y=f(x)$와 점 P 이외의 점에서는 만나지 않는다.

2 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$에서의 접선 l_1의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$

즉, $y=3a^2x-2a^3$

직선 l_1과 곡선 $y=x^3$의 교점의 x좌표는

$3a^2x-2a^3=x^3$

$(x-a)^2(x+2a)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=-2a$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2a,\ -8a^3)$

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $Q(-2a,\ -8a^3)$에서의 접선 l_2의 방정식은

$y-(-8a^3)=3\times(-2a)^2\{x-(-2a)\}$

즉, $y=12a^2x+16a^3$

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=3a^2$, $\tan\theta_2=12a^2$

이고 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\theta_2-\theta_1)|=\left|\frac{12a^2-3a^2}{1+12a^2\times3a^2}\right|=\frac{9a^2}{1+36a^4}$$

$a>0$일 때 $f(a)=\dfrac{9a^2}{1+36a^4}$이라 하면

$$f'(a)=\frac{18a(1+36a^4)-9a^2\times144a^3}{(1+36a^4)^2}$$

$$=\frac{18a(1+36a^4-72a^4)}{(1+36a^4)^2}=\frac{18a(1-36a^4)}{(1+36a^4)^2}$$

$a>0$일 때 $f'(a)=0$에서 $a^4=\dfrac{1}{36}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$일 때 $f'(a)>0$이고 $a>\dfrac{\sqrt{6}}{6}$일 때 $f'(a)<0$

이므로 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$일 때 $f(a)$는 극대이면서 최대이다.

따라서 구하는 a의 값은 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$이다.

답 ①

3 $2(\ln x)^2-6\ln x=kx^2-3$에서

$$\frac{2(\ln x)^2-6\ln x+3}{x^2}=k$$

$f(x)=\dfrac{2(\ln x)^2-6\ln x+3}{x^2}$이라 하면 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{4}{x}\ln x-\frac{6}{x}\right)x^2-2x\{2(\ln x)^2-6\ln x+3\}}{x^4}$$

$$=\frac{-4(\ln x)^2+16\ln x-12}{x^3}$$

$$=\frac{-4(\ln x-1)(\ln x-3)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=e$ 또는 $x=e^3$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^6}$	$\searrow$

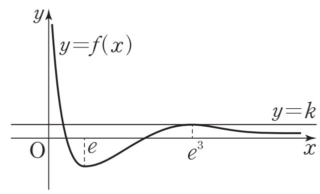
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$에서

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-\frac{6}{x}\times\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{x^2}\right\}=0$$

이고

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}\{2(\ln x)^2-6\ln x+3\}=\infty$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$k>0$이므로 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

$k=f(e^3)=\dfrac{3}{e^6}$

답 ①

4 점 P의 좌표를 $(t,\ n(1-t)^n)\ (0<t<1)$이라 하면

$Q(t,\ 0)$, $R(0,\ n(1-t)^n)$

이므로 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times n(1-t)^n$$

$$=\frac{1}{2}nt(1-t)^n\ (0<t<1)$$

이때

$$f'(t)=\frac{1}{2}n(1-t)^n-\frac{1}{2}n^2t(1-t)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}n(1-t)^{n-1}\{1-(n+1)t\}$$

$f'(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{n+1}$

$0<t<\dfrac{1}{n+1}$일 때 $f'(t)>0$이고, $\dfrac{1}{n+1}<t<1$일 때 $f'(t)<0$이므로 $f(t)$는 $t=\dfrac{1}{n+1}$일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 $S_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$-\dfrac{1}{n+1}=s$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $s\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{2}(1+s)^{-\frac{1}{s}}=\frac{1}{2e}$$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 82쪽

1 ③ 2 ② 3 ③

1 $f(x)=a\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$에서

$$f'(x)=2a\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$
$$=\sin x\cos x\left(2a-\frac{\sqrt{2}}{\sin x}-\frac{1}{2\cos x}\right)$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$, $\cos x>0$이므로

$g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}+\dfrac{1}{2\cos x}$이라 하면 $f'(x)=0$의 근은

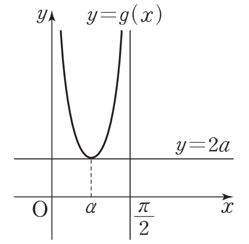
$g(x)=2a$의 근과 같다.

$$g'(x)=-\frac{\sqrt{2}(\sin x)'}{\sin^2 x}-\frac{(\cos x)'}{2\cos^2 x}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$$
$$=\frac{\sin^3 x-(\sqrt{2}\cos x)^3}{2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$g'(x)=0$에서 $\sin x=\sqrt{2}\cos x$이고 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{2}$

$\tan\alpha=\sqrt{2}$라 할 때, $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	극소	↗	



$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않기 위해서는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2a$가 만나지 않거나 접해야 한다.

$\tan\alpha=\sqrt{2}$에서 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$g(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}+\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

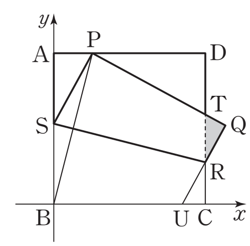
이고, $2a\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이어야 하므로 $a\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

답 ③

2 그림과 같이 선분 BC가 x축, 선분 AB가 y축 위에 오도록 좌표평면에 놓으면

A$(0,\ 1)$, B$(0,\ 0)$, C$(1,\ 0)$, D$(1,\ 1)$



$\overline{\mathrm{AP}}=t$ $(0\le t\le 1)$이라 하면 P$(t,\ 1)$이고, 직선 SR는 선분 BP의 수직이등분선이다.

먼저 $t=0$ 또는 $t=1$이면 $S=0$이다. ······ ㉠

$0<t<1$일 때 직선 BP의 기울기가 $\dfrac{1}{t}$이고, 선분 BP의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 직선 SR의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-t\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$, 즉 $y=-tx+\dfrac{t^2+1}{2}$

이때 S$\left(0,\ \dfrac{t^2+1}{2}\right)$, R$\left(1,\ \dfrac{(t-1)^2}{2}\right)$이다.

직선 QR와 x축이 만나는 점을 U라 하면 삼각형 TQR와 삼각형 UCR는 합동이다.

두 직선 PS와 QR는 서로 평행하므로 직선 QR의 방정식은

$y-\dfrac{(t-1)^2}{2}=\dfrac{1-t^2}{2t}(x-1)$

즉, $y=\dfrac{1-t^2}{2t}x+\dfrac{(t-1)^2}{2}+\dfrac{t^2-1}{2t}$

따라서 점 U의 좌표는 $\left(\dfrac{t^2+1}{t+1},\ 0\right)$이고

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{UC}}\times\overline{\mathrm{CR}}=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{t^2+1}{t+1}\right)\times\dfrac{(t-1)^2}{2}$

$=\dfrac{t(1-t)^3}{4(1+t)}$ (단, $0<t<1$) ……㉡

㉠에서 $t=0$ 또는 $t=1$일 때 ㉡이 성립하므로

$S=\dfrac{t(1-t)^3}{4(1+t)}$ (단, $0\le t\le 1$)

S를 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\{(1-t)^3-3t(1-t)^2\}(1+t)-t(1-t)^3}{(1+t)^2}$

$=\dfrac{(1-t)^2(1-4t-3t^2)}{4(1+t)^2}$

$0<t<1$일 때 $\dfrac{dS}{dt}=0$에서 $t=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$0\le t\le 1$일 때 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dS}{dt}$		$+$	0	$-$	
S	0	↗	극대	↘	0

$t=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$일 때 S의 값이 극대이면서 최대이므로 구하는 선분 AP의 길이는 $\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$이다.

답 ②

3 ㄱ. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}\sin x\ (x\ge 0)\\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x\ (x<0)\end{cases}$ 이므로

$f(0)=0$에서

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-h}\sin h-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-h}\times\frac{\sin h}{h}\right)$

$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+h}\sin h-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0-}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+h}\times\frac{\sin h}{h}\right)$

$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고

$f'(0)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ (참)

ㄴ. $x>0$일 때

$f'(x)=\sqrt{2}(-e^{\frac{\pi}{4}-x})\sin x+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}\cos x$

$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x-\sin x)$

$x<0$일 때

$f'(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\cos x$

$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x)$

이고 $f'(0)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$이므로

$f'(x)=\begin{cases}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x-\sin x)\ (x\ge 0)\\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x)\ (x<0)\end{cases}$

$f'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $\cos x-\sin x=0$, 즉 $\tan x=1$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

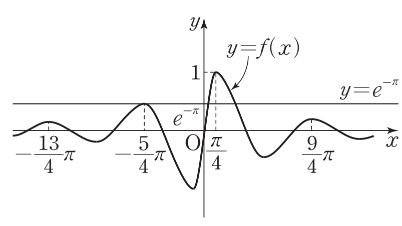
$x<0$일 때 $\cos x+\sin x=0$, 즉 $\tan x=-1$이므로

$x=-\dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{5}{4}\pi,\ -\dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때 극댓값은

$f(\alpha)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}$

이므로 $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아진다.



함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{5}{4}\pi,\ x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극대이고

$f\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$에서

$f\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

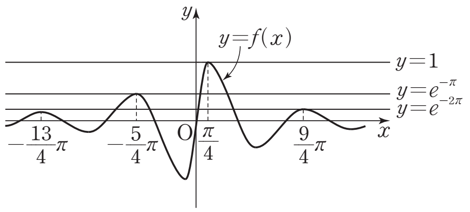
$|x|>\dfrac{5}{4}\pi$이면 $f(x)$의 극댓값은 $e^{-\pi}$보다 작으므로

함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=e^{-\pi}$과 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $g(e^{-\pi})=3$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때 $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아지므로

$$f\left(-\frac{13}{4}\pi\right)=e^{-3\pi}<e^{-\frac{5}{2}\pi}<f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=e^{-2\pi}$$
$$<f\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1<2$$



$e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 k의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 극대일 때마다 줄어드므로 이때 $g(k)$는 불연속이 된다.

따라서 $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

07 여러 가지 적분법

유제

본문 85~91쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 ④	5 ③
6 ②	7 ③	8 ②		

1 $f'(x)=2^x\ln 4+1$이므로

$$f(x)=\int(2^x\ln 4+1)\,dx$$
$$=\ln 4\int 2^x\,dx+\int 1\,dx$$
$$=\ln 4\times\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$
$$=2\ln 2\times\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$
$$=2^{x+1}+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=2+C=1$이므로 $C=-1$

즉, $f(x)=2^{x+1}+x-1$이므로

$f(-1)=1+(-1)-1=-1$

답 ②

2 $f'(x)=\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$f(x)=\int(-\sin x)\,dx=\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+C)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+Cx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1+\frac{\pi}{2}C=2$$

따라서 $C=\dfrac{2}{\pi}$이므로

$f(x)=\cos x+\dfrac{2}{\pi}$

즉, $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\cos\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

답 ②

3 $x^2=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=2$이고

$\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} xe^{x^2}dx=\int_1^2 \frac{1}{2}e^t dt=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-e)=\frac{e(e-1)}{2}$$

답 ①

4 $x^2+1=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때

$t=a^2+1$이고 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int_0^a 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^{a^2+1}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{a^2+1}$$
$$=\frac{2}{3}(a^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

따라서 $(a^2+1)^{\frac{3}{2}}=3$이므로

$(a^2+1)^3=3^2=9$

답 ④

5 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_0^\pi x\cos 2x\,dx$$
$$=\left[x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{4}\cos 2\pi-\frac{1}{4}\cos 0$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

답 ③

6 $|\ln x-1|=\begin{cases}1-\ln x & (1\le x<e)\\ \ln x-1 & (e\le x\le e^2)\end{cases}$ 이므로

$$\int_1^{e^2}|\ln x-1|\,dx$$
$$=\int_1^e(1-\ln x)\,dx+\int_e^{e^2}(\ln x-1)\,dx$$
$$=\int_1^e 1\,dx-\int_1^e \ln x\,dx+\int_e^{e^2}\ln x\,dx-\int_e^{e^2}1\,dx$$
$$=\Big[x\Big]_1^e-\Big[x\ln x-x\Big]_1^e+\Big[x\ln x-x\Big]_e^{e^2}-\Big[x\Big]_e^{e^2}$$
$$=(e-1)-\{(e-e)-(0-1)\}+\{(2e^2-e^2)-(e-e)\}-(e^2-e)$$
$$=(e-1)-1+e^2-(e^2-e)=2e-2$$

답 ②

7 $xf(x)=3x+\int_a^x f(t)\,dt$의 양변에 $x=a$ $(a>0)$를 대입하면

$$af(a)=3a+\int_a^a f(t)\,dt=3a$$

따라서 $f(a)=3$

또한 $xf(x)=3x+\int_a^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3+f(x)$

$xf'(x)=3$, $f'(x)=\frac{3}{x}$

따라서

$f(x)=\int \frac{3}{x}dx=3\ln x+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(1)=C=0$이므로 $f(x)=3\ln x$

즉, $f(a)=3\ln a=3$에서 $\ln a=1$이므로

$a=e$

답 ③

8 $F'(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x \sin\frac{\pi}{2}t\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x F'(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=F'(1)\times\frac{1}{2}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 92쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 ① 5 ①

1 $$\int_0^1\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int_0^1\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx$$
$$=\int_0^1(\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$=\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

답 ②

2 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx$에서 $2x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{2}{3}\pi$이고

$\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}\sin t\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$에서 $3x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\pi$이고

$\frac{dt}{dx}=3$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx=\int_0^{\pi} \frac{1}{3}\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sin t\right]_0^{\pi}=0$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x+\cos 3x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx=\frac{3}{4}$$

답 ③

3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}dx$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이고

$\frac{dt}{dx}=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 \cos t\,dt=\left[\sin t\right]_0^1$$

$$=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

답 ②

4 $\int_{\frac{e}{2}}^{e} \ln 2x\,dx$에서 $f(x)=\ln 2x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2x}\times 2=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_{\frac{e}{2}}^{e} \ln 2x\,dx=\left[x\ln 2x\right]_{\frac{e}{2}}^{e}-\int_{\frac{e}{2}}^{e} 1\,dx$$

$$=\left(e\ln 2e-\frac{e}{2}\ln e\right)-\left[x\right]_{\frac{e}{2}}^{e}$$

$$=\left\{e(\ln 2+\ln e)-\frac{e}{2}\right\}-\left(e-\frac{e}{2}\right)$$

$$=e\ln 2+\frac{e}{2}-\frac{e}{2}=e\ln 2$$

답 ①

5 $f(x)=-x+e+2+\int_1^x f(t)\,dt$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=e+1$

또한 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-1+f(x)$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=-1+f(1)=-1+(e+1)=e$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 93쪽

1 ① 2 ③ 3 ② 4 ②

1 $\sin x<0$이면

$f(x)=\sin x-\sin x=0$

이므로 방정식 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 $\sin x\geq 0$일 때이다.

즉, $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x=1$에서

$\sin x=\frac{1}{2}$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 양수 x의 값을 작은 값부터 차례대로 나열해 보면

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\cdots$

즉, $\alpha_2=\frac{5}{6}\pi$, $\alpha_3=\frac{13}{6}\pi$이므로

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{13}{6}\pi}(\sin x+|\sin x|)\,dx$$
$$=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} 2\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} 0\,dx+\int_{2\pi}^{\frac{13}{6}\pi} 2\sin x\,dx$$
$$=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} 2\sin x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin x\,dx$$
$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx$$
$$=4\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$
$$=4-2\sqrt{3}$$

답 ①

2 $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x+a)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{e^{3x}+2}dx$

이때 $e^{3x}=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=e^3$

이고 $\frac{dt}{dx}=3e^{3x}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{3x}+2}dx$$
$$=\int_1^{e^3}\left(\frac{1}{t+2}\times\frac{1}{3t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{6}\int_1^{e^3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{6}\Big[\ln|t|-\ln|t+2|\Big]_1^{e^3}$$
$$=\frac{1}{6}\{3-\ln(e^3+2)-(-\ln 3)\}$$
$$=\frac{1}{6}\left(3+\ln\frac{3}{e^3+2}\right)$$

답 ③

3 $\displaystyle\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt$에서 $1-t^2=y$로 놓으면

$t=0$일 때 $y=1$, $t=1$일 때 $y=0$이고

$\frac{dy}{dt}=-2t$이므로

$$\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt=\int_1^0\left\{-\frac{1}{2}f(y)\,dy\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\,dy$$

따라서

$$f(x)=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+4x\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt$$
$$=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+2x\int_0^1 f(y)\,dy$$
$$=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+2x\int_0^1 f(t)\,dt$$
$$=xe^{-x}$$

이고 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$이라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 xe^{-x}dx$$
$$=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$
$$=(-e^{-1})+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-e^{-1}+(-e^{-1}+1)$$
$$=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$$

답 ②

4 $\displaystyle f(x)=\int_1^x (x-1)\ln t\,dt=(x-1)\int_1^x \ln t\,dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_1^x \ln t\,dt+(x-1)\ln x$$
$$=\Big[t\ln t-t\Big]_1^x+(x-1)\ln x$$
$$=(x\ln x-x)-(-1)+(x-1)\ln x$$
$$=(2x-1)\ln x-x+1$$

따라서 점 $(e,\ f(e))$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=(2e-1)\ln e-e+1=(2e-1)-e+1=e$

또한

$$f(e)=(e-1)\int_1^e \ln t\,dt=(e-1)\Big[t\ln t-t\Big]_1^e$$
$$=(e-1)\{(e\ln e-e)-(-1)\}=e-1$$

이므로 접선의 방정식은

$y-(e-1)=e(x-e)$

$y=ex-e^2+e-1$

따라서 접선의 y절편은 $-e^2+e-1$이다.

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 94쪽

1 ⑤　　2 ①　　3 ③　　4 ①

1 ㄱ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}dx=\Big[\ln x\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}=\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{1}{n}$

$=\ln\dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\ln 2$ (참)

ㄴ. $f(x)=\ln(x+1)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

$=\ln(x+1)+\frac{x^2}{2}-x$

라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1$

$=\frac{1+(x-1)(x+1)}{x+1}$

$=\frac{x^2}{x+1}>0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하는 함수이고

$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$

즉, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)$

$g(x)=x-\ln(x+1)$이라 하면

$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$

이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 증가하는 함수이고

$g(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $g(x)>0$

즉, $\ln(x+1)<x$

따라서 $x>0$일 때, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $x>0$일 때 $\ln(x+1)<x$이므로

$x+\ln(x+1)<2x$

따라서 $\frac{1}{2x}<\frac{1}{x+\ln(x+1)}$이므로

$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(x+1)}dx$

이때 ㄱ에서 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}dx=\ln 2$이므로

$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(x+1)}dx>\frac{1}{2}\ln 2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $f(x)=(ax-2)e^{a(-x+2)}$에서

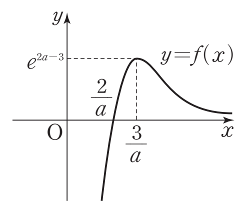
$f'(x)=ae^{a(-x+2)}+(ax-2)e^{a(-x+2)}\times(-a)$

$=\{a-a(ax-2)\}e^{a(-x+2)}$

$=a(3-ax)e^{a(-x+2)}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{a}$에서 극대이면서 최댓값을 가지므로 $b=\frac{3}{a}$

또한 $f(x)=0$에서 $x=\frac{2}{a}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$g(a)=\int_0^{\frac{3}{a}} |f(x)|dx$

$=\int_0^{\frac{2}{a}} \{-f(x)\}dx+\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} f(x)dx$ …… ㉠

이때 $\int (ax-2)e^{a(-x+2)}dx$에서

$u(x)=ax-2$, $v'(x)=e^{a(-x+2)}$이라 하면

$u'(x)=a$, $v(x)=-\frac{1}{a}e^{a(-x+2)}$이므로

$\int (ax-2)e^{a(-x+2)}dx$

$=-\frac{1}{a}(ax-2)e^{a(-x+2)}+\int e^{a(-x+2)}dx$

$=-\frac{1}{a}(ax-2)e^{a(-x+2)}-\frac{1}{a}e^{a(-x+2)}+C$

$=-\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 ㉠에서

$g(a)=\int_0^{\frac{3}{a}} |f(x)|dx$

$=\int_0^{\frac{2}{a}} \{-f(x)\}dx+\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} f(x)dx$

$=\Big[\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}\Big]_0^{\frac{2}{a}}$

$+\Big[-\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}\Big]_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}}$

$=\frac{1}{a}e^{2a-2}+\frac{1}{a}e^{2a}-\frac{2}{a}e^{2a-3}+\frac{1}{a}e^{2a-2}$

$=\frac{e^{2a}}{a}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$

이므로

$$g'(a)=\frac{2e^{2a}\times a-e^{2a}}{a^2}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$$

$$=\frac{e^{2a}(2a-1)}{a^2}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$$

즉, 함수 $g(a)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최솟값을 가지므로

$k=\frac{1}{2}$

답 ①

3 $\sin(t-x)-\sin 2t=0$에서

$\sin(t-x)=\sin 2t$

따라서

$t-x=2t,\ 2t\pm2\pi,\ 2t\pm4\pi,\ \cdots$

또는

$(t-x)+2t=\pi,\ \pm2\pi+\pi,\ \pm4\pi+\pi,\ \cdots$

인데 주어진 범위에 의하여

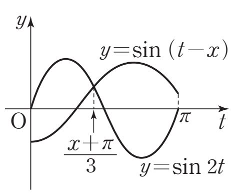
$t-x=2t$ 또는 $t-x=\pi-2t$

즉, $t=-x$ 또는 $t=\frac{x+\pi}{3}$

그런데 $0\le x\le\pi$이고 $0\le t\le\pi$이므로 $t=-x$는 주어진 범위를 만족시키지 못한다.

즉, $t=\frac{x+\pi}{3}$

따라서 $0\le t\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin(t-x)$, $y=\sin 2t$는 그림과 같다.



그러므로

$$f(x)=\int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{x+\pi}{3}}\{\sin 2t-\sin(t-x)\}\,dt+\int_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}\{\sin(t-x)-\sin 2t\}\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos(t-x)\right]_0^{\frac{x+\pi}{3}}+\left[-\cos(t-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}-\cos(-x)\right\}$$

$$+\left\{-\cos(\pi-x)+\frac{1}{2}\cos 2\pi+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2x}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1$$

$$=2\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)+1$$

$$=3\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

그런데 $0\le x\le\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$이므로

최댓값은 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=0$일 때, 즉 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $M=4$,

최솟값은 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$일 때, 즉

$x=0$ 또는 $x=\pi$일 때 $m=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $M+m=\frac{13}{2}$

답 ③

4 $F(x)=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|\,dt$라 하면

$0<x<1$이므로

$$F(x)=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|\,dt$$

$$=\int_x^1\pi\sin(\pi t)\,dt-\int_1^{x+1}\pi\sin(\pi t)\,dt$$

$$=\Big[-\cos(\pi t)\Big]_x^1-\Big[-\cos(\pi t)\Big]_1^{x+1}$$

$$=1+\cos(\pi x)-\{-\cos(\pi x+\pi)-1\}$$

$$=1+\cos(\pi x)-\cos(\pi x)+1=2$$

$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}\,dt$라 하면 $0<x<1$이므로

$$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}\,dt$$

$$=\int_x^1(1-t)e^{1-t}\,dt-\int_1^{x+1}(1-t)e^{1-t}\,dt$$

이때 $\int(1-t)e^{1-t}\,dt$에서 $u(t)=1-t$, $v'(t)=e^{1-t}$이라 하면

$u'(t)=-1,\ v(t)=-e^{1-t}$이므로

$$\int(1-t)e^{1-t}dt=-(1-t)e^{1-t}-\int e^{1-t}dt$$
$$=-(1-t)e^{1-t}+e^{1-t}+C$$
$$=te^{1-t}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$$
$$=\Big[te^{1-t}\Big]_x^1-\Big[te^{1-t}\Big]_1^{x+1}$$
$$=1-xe^{1-x}-\{(x+1)e^{-x}-1\}$$
$$=2-xe^{1-x}-(x+1)e^{-x}$$

따라서

$$f(x)=\int_x^{x+1}\{\pi|\sin(\pi t)|-|1-t|e^{1-t}\}dt$$
$$=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|dt-\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$$
$$=F(x)-G(x)$$
$$=2-\{2-xe^{1-x}-(x+1)e^{-x}\}$$
$$=xe^{1-x}+(x+1)e^{-x}$$
$$=\{(e+1)x+1\}e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(e+1)e^{-x}-\{(e+1)x+1\}e^{-x}$$
$$=\{e-(e+1)x\}e^{-x}$$

이고 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{e}{e+1}$

이때 $f'(x)$의 부호는 $x=\dfrac{e}{e+1}$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{e}{e+1}$에서 극대이고 극댓값은

$$f\left(\frac{e}{e+1}\right)=(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}$$

따라서 $a=\dfrac{e}{e+1},\ b=(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}$이므로

$$ab=\frac{e}{e+1}\times(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}=e^{1-\frac{e}{e+1}}=e^{\frac{1}{e+1}}$$

답 ①

다른 풀이

함수 $y=|\sin(\pi t)|$는 주기가 1인 주기함수이고 함수 $y=|\sin(\pi t)|$의 그래프는 직선 $t=\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$F(x)=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|dt$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\pi|\sin(\pi t)|dt$$
$$=2\Big[-\cos(\pi t)\Big]_0^{\frac{1}{2}}=2$$

08 정적분의 활용

유제 본문 97~105쪽

1 ③	2 ②	3 ①	4 ④	5 ②
6 ①	7 ⑤	8 ③	9 ①	

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+2k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{2k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\sqrt{1+2x}\,dx$$

이때 $1+2x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$,

$x=1$일 때 $t=3$이고 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+2k}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+2x}\,dx=\int_1^3\frac{\sqrt{t}}{2}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

답 ③

다른 풀이

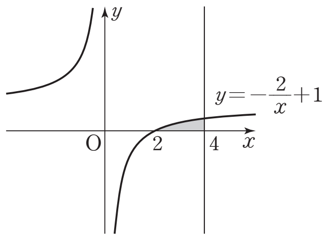
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+2k}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\sqrt{1+\frac{2k}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\int_1^2\ln x\,dx$$
$$=\Big[x\ln x-x\Big]_1^2=(2\ln 2-2)-(-1)$$
$$=2\ln 2-1$$

답 ②

3 $y=\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+1$이므로 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}+1$과 직선 $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.

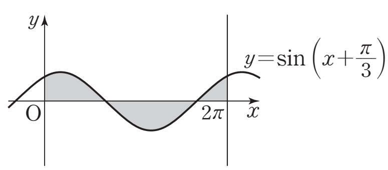


따라서 구하는 넓이는

$$\int_2^4\left(-\frac{2}{x}+1\right)dx=\Big[-2\ln x+x\Big]_2^4$$
$$=(-2\ln 4+4)-(-2\ln 2+2)$$
$$=2-2\ln 2$$

답 ①

4 곡선 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$는 곡선 $y=\sin x$를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$와 두 직선 $x=0$, $x=2\pi$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



그런데 곡선 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$는 주기가 2π이므로

$$\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2(1+1)=4$$

답 ④

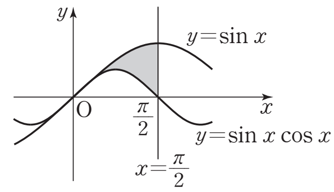
5 $\sin x=\sin x\cos x$에서 $\sin x(\cos x-1)=0$

즉, $\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$이므로 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서

$x=0$

또한 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin x\ge\sin\cos x$이므로

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin x\cos x$ 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



이때 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin x\cos x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$$

그런데 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

따라서

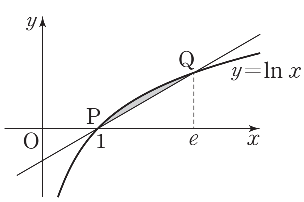
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin x\cos x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

6 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(e,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{e-1}(x-1)$

따라서 곡선 $y=\ln x$와 직선 PQ로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^e\left\{\ln x-\frac{1}{e-1}(x-1)\right\}dx$$
$$=\int_1^e\ln x\,dx-\frac{1}{e-1}\int_1^e(x-1)\,dx$$
$$=\Big[x\ln x-x\Big]_1^e-\frac{1}{e-1}\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^e$$

$=1-\dfrac{1}{e-1}\left\{\left(\dfrac{1}{2}e^2-e\right)-\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\right\}$

$=1-\dfrac{1}{e-1}\times\dfrac{(e-1)^2}{2}$

$=1-\dfrac{e-1}{2}=\dfrac{3-e}{2}$

답 ①

7 $x=t$ $(0\le t\le \ln 2)$일 때, x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(e^{2t})^2=e^{4t}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{4t}\,dt=\left[\frac{1}{4}e^{4t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{4}(e^{4\ln 2}-1)=\frac{1}{4}(e^{\ln 16}-1)$

$=\dfrac{1}{4}(16-1)=\dfrac{15}{4}$

답 ⑤

8 $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2$이므로

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(e^t-e^{-t})^2+2^2$

$=(e^{2t}-2+e^{-2t})+4$

$=e^{2t}+2+e^{-2t}$

$=(e^t+e^{-t})^2$

따라서 $t=0$에서 $t=\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\ln 2}\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\,dt$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 2}(e^t+e^{-t})\,dt$

$=\left[e^t-e^{-t}\right]_0^{\ln 2}$

$=e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}$

$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

답 ③

9 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}-1$이므로

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2$

$=\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1$

$=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}+1=\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2$

따라서 $1\le t\le e$에서 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+1\right)dt$

$=\left[\ln|t|+t\right]_1^e$

$=(1+e)-1=e$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 106~107쪽

1 ①	2 ②	3 ②	4 ②	5 ①
6 ①	7 ②	8 ③	9 ④	

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\times\sqrt[n]{e^k}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\times e^{\frac{k}{n}}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1 xe^x\,dx$

따라서 $f'(x)=e^x$, $g(x)=x$라 하면 $f(x)=e^x$, $g'(x)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\times\sqrt[n]{e^k}}{n^2}=\int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$

답 ①

2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n}{2n+1}}+\sqrt{\frac{n}{2n+2}}+\sqrt{\frac{n}{2n+3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2n+n}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{2n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{k}{n}}}$

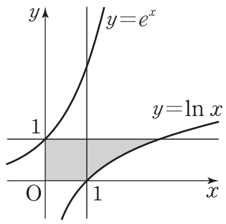
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{2+x}}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(x+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$

$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

답 ②

3 함수 $y=\ln x$의 역함수는 $y=e^x$이므로 곡선 $y=\ln x$와 두 직선 $y=0$, $y=1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=e^x$과 두 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

답 ②

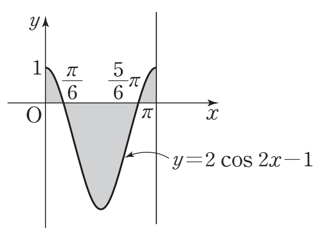
4 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 방정식 $2\cos 2x-1=0$, 즉

$\cos 2x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{5}{3}\pi$에서

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)=2\cos 2x-1$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=\pi$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}|2\cos 2x-1|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(1-2\cos 2x)\,dx+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}(2\cos 2x-1)\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(1-2\cos 2x)\,dx$$
$$=2\left[\sin 2x-x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[x-\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left\{\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

답 ②

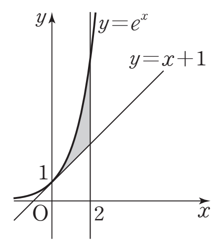
5 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{2}{\pi}x$는 각각 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=2\left[-\cos x-\frac{1}{\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\left(-\frac{\pi}{4}+1\right)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

답 ①

6 $y'=e^x$이므로 접선 l의 방정식은 $y-1=x$, 즉 $y=x+1$

따라서 곡선 $y=e^x$과 접선 l 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



이때 구하는 넓이는

$$\int_0^2(e^x-x-1)\,dx$$
$$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2$$
$$=(e^2-4)-1$$
$$=e^2-5$$

답 ①

7 높이가 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi\left[\sqrt{\ln\{a(x+e)\}}\right]^2=\pi\ln\{a(x+e)\}$$
$$=\pi\{\ln a+\ln(x+e)\}$$

따라서 이 입체도형의 부피가 $\pi(2e+2e\ln 2)$이므로

$$\int_0^e S(x)\,dx$$
$$=\int_0^e \pi\{\ln a+\ln(x+e)\}\,dx$$
$$=\left[\pi\{(\ln a)x+(x+e)\ln(x+e)-(x+e)\}\right]_0^e$$
$$=\pi\{(\ln a)e+2e\ln 2e-2e-e\ln e+e\}$$
$$=\pi\{(\ln a)e+2e(\ln 2+1)-2e\}$$
$$=\pi\{(\ln a)e+2e\ln 2\}=\pi(2e+2e\ln 2)$$

$\ln a=2$이므로 $a=e^2$

답 ②

8 이 입체도형을 x좌표가 $x\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 $\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right\}^2=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 ③

9 $y=x^{\frac{3}{2}}$에서 $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$이므로 $\frac{1}{4}\le x\le\frac{4}{3}$일 때 곡선 $y=x^{\frac{3}{2}}$의 길이는

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$
$$=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{8}{27}\times 8-\frac{8}{27}\times\frac{125}{64}$$
$$=\frac{8}{27}\times\frac{387}{64}=\frac{43}{24}$$

답 ④

Level 2 기본 연습

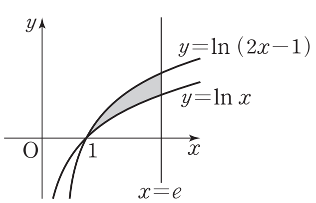
본문 108~109쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 ①	5 ①
6 ①	7 ①	8 ③		

1 두 곡선 $y=\ln x$, $y=\ln(2x-1)$의 교점의 x좌표는

$\ln x=\ln(2x-1)$, $x=2x-1$, 즉 $x=1$

따라서 두 곡선 $y=\ln x$, $y=\ln(2x-1)$ 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



이때 구하는 넓이는

$$\int_1^e\{\ln(2x-1)-\ln x\}\,dx=\int_1^e\ln\frac{2x-1}{x}\,dx$$

그런데 $\int_1^e\ln\frac{2x-1}{x}\,dx$에서 $u'(x)=1$,

$v(x)=\ln\frac{2x-1}{x}$이라 하면 $u(x)=x$,

$v'(x)=\frac{1}{x(2x-1)}$이므로

$$\int_1^e\{\ln(2x-1)-\ln x\}\,dx$$
$$=\int_1^e\ln\frac{2x-1}{x}\,dx$$
$$=\left[x\ln\frac{2x-1}{x}\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2x-1}\,dx$$
$$=e\ln\frac{2e-1}{e}-\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^e$$
$$=e\ln\frac{2e-1}{e}-\frac{1}{2}\ln(2e-1)$$
$$=\ln\left(\frac{2e-1}{e}\right)^e-\ln\sqrt{2e-1}$$
$$=\ln\left\{\left(\frac{2e-1}{e}\right)^e\times\frac{1}{\sqrt{2e-1}}\right\}$$
$$=\ln\frac{(2e-1)^{e-\frac{1}{2}}}{e^e}$$

따라서 $k=e-\frac{1}{2}$

답 ②

2 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=1+1=2$$

또한 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(x-a)$의 교점의 x좌표를 θ라 하면 $0<\theta<\pi$에서

$\sin\theta=\sin(\theta-a)$

$\frac{\theta+(\theta-a)}{2}=\frac{\pi}{2}$, $2\theta-a=\pi$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}$

그런데 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=\sin(x-a)$가 이등분하므로

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}\sin(x-a)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos(x-a)\Big]_a^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}+\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}^{\pi}$$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)+2+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)$

$=2-2\sin\frac{a}{2}$

에서 $\frac{1}{2}\times 2=2-2\sin\frac{a}{2}$, $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$

이때 $0<a<\pi$이므로

$\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6}$에서 $a=\frac{\pi}{3}$

답 ②

3 함수 $f(x)=x^n(1-x)$ $(x\geq 0)$의 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$, $(1, 0)$이고 $0\leq x\leq 1$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$S_n=\int_0^1 x^n(1-x)\,dx=\int_0^1 (x^n-x^{n+1})\,dx$

$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

답 ①

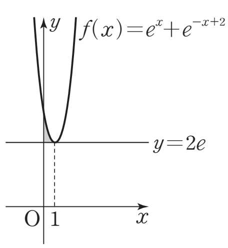
4 $f(1)=ae+be^{-1}=2e$ …… ㉠

또한 $f'(x)=ae^x-be^{-x}$에서

$f'(1)=ae-be^{-1}=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=e^2$이므로 $f(x)=e^x+e^{-x+2}$

따라서 함수 $f(x)=e^x+e^{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=2e$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\int_0^1 f(x)\,dx-2e\times 1=\int_0^1 (e^x+e^{-x+2})\,dx-2e$

$=\left[e^x-e^{-x+2}\right]_0^1-2e$

$=-(1-e^2)-2e$

$=e^2-2e-1$

답 ①

5 $S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2$

답 ①

6 곡선 $y=\sqrt{2x+6}$ 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2t+6})$ $(t>-3)$이라 하면

$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x+6}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x+6}}$

이므로 직선 l의 방정식은

$y-\sqrt{2t+6}=-\sqrt{2t+6}(x-t)$ …… ㉠

이때 ㉠이 원점을 지나므로

$-\sqrt{2t+6}=t\sqrt{2t+6}$, $(t+1)\sqrt{2t+6}=0$

즉, $t=-1$ 또는 $t=-3$

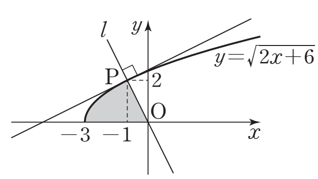
이때 $t=-3$이면 주어진 조건을 만족시키지 못하므로

$t=-1$이다.

즉, 직선 l의 방정식은

$y-2=-2(x+1)$, $y=-2x$

따라서 곡선 $y=\sqrt{2x+6}$과 직선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_{-3}^{-1}\sqrt{2x+6}\,dx+\frac{1}{2}\times1\times2=\left[\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{-1}+1$$
$$=\frac{1}{3}\times8+1=\frac{11}{3}$$

답 ①

7 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 접선 l의 방정식은

$y=x-1$

따라서 곡선 $y=e^x-1$ 및 접선 l과 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가

$(e^x-1)-(x-1)=e^x-x$인 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^x-x)^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}(e^x-x)^2dx$$
$$=\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{2x}-2xe^x+x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2(e^{2x}+x^2)\,dx-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 xe^x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}e^4+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2e^2-\left[e^x\right]_0^2\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}e^4+\frac{13}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}(2e^2-e^2+1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}e^4+\frac{13}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}e^2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}e^4-\frac{\sqrt{3}}{2}e^2+\frac{\sqrt{3}}{24}$$

답 ①

8 $\frac{dx}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

$\frac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

이고 $t=k$일 때 점 P의 속력이 3이므로

$\sqrt{k^2\sin^2 k+k^2\cos^2 k}=3$

$\sqrt{k^2(\sin^2 k+\cos^2 k)}=3$, $\sqrt{k^2}=3$

즉, $k=3$이므로 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_1^3\sqrt{(t\sin t)^2+(t\cos t)^2}dt$$
$$=\int_1^3\sqrt{t^2}dt=\int_1^3 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=4$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 110쪽

1 ③	2 ⑤	3 ①	4 ①

1 $f(x)=x-\frac{1}{x}$에서 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 증가하는 함수이다.

$f(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(1, 0)$이다.

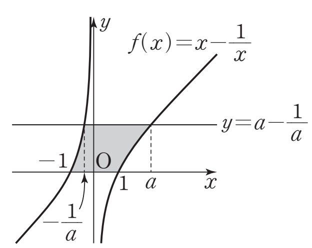
또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=\infty$이고 함수 $f(x)=x-\frac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y=a-\frac{1}{a}$의 교점의 x좌표는

$x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$, $ax^2-(a^2-1)x-a=0$

$(ax+1)(x-a)=0$

즉, $x=-\frac{1}{a}$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)=x-\frac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y=a-\frac{1}{a}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



즉,

$$S(a)=\int_{-1}^{-\frac{1}{a}}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)-\int_1^a\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln|x|\right]_{-1}^{-\frac{1}{a}}+a^2-\frac{1}{a^2}-\left[\frac{1}{2}x^2-\ln|x|\right]_1^a$$

$=\frac{1}{2a^2}+\ln a-\frac{1}{2}+a^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2}a^2+\ln a+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+2\ln a$

이므로

$$\lim_{a\to1+}\frac{S(a)}{a-1}=\lim_{a\to1+}\left\{\frac{a^4-1}{2a^2(a-1)}+\frac{2\ln a}{a-1}\right\}$$
$$=\lim_{a\to1+}\left\{\frac{(a^2+1)(a+1)}{2a^2}+\frac{2\ln a}{a-1}\right\}$$
$$=2+\lim_{a\to1+}\frac{2(\ln a-\ln 1)}{a-1}$$

그런데 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로 $\lim_{a\to1+}\frac{\ln a-\ln 1}{a-1}=1$

따라서

$$\lim_{a\to1+}\frac{S(a)}{a-1}=2+\lim_{a\to1+}\frac{2(\ln a-\ln 1)}{a-1}$$
$$=2+2\times1=4$$

답 ③

2 ㄱ. $h(x)=e^{x-1}-x$라 하면

$h'(x)=e^{x-1}-1$

이므로 $h'(x)=0$에서 $x=1$이고 $x=1$에서 함수 $h(x)$는 극소이면서 최솟값 $h(1)=0$을 가지므로

$h(x)=e^{x-1}-x\geq0$

$\sqrt{e^{x-1}}\geq\sqrt{x}$, $\sqrt{e^{x-1}}-\sqrt{x}\geq0$

이때 $x\geq0$이므로

$x(\sqrt{e^{x-1}}-\sqrt{x})\geq0$, $x\sqrt{e^{x-1}}-x\sqrt{x}\geq0$

즉, 정의역의 모든 원소 x에 대하여

$g(x)-f(x)\geq0$, $g(x)\geq f(x)$ (참)

ㄴ. $f(x)=g(x)$에서 $x\sqrt{x}=x\sqrt{e^{x-1}}$

$x(\sqrt{e^{x-1}}-\sqrt{x})=0$ …… ㉠

이때 $\sqrt{e^{x-1}}-\sqrt{x}=0$에서 $\sqrt{e^{x-1}}=\sqrt{x}$이므로

$e^{x-1}=x$, $e^{x-1}-x=0$

따라서 ㄴ에서 $e^{x-1}-x=0$은 $x=1$의 단 한 개의 실근을 가지므로 ㉠을 만족시키는 실근은 $x=0$ 또는 $x=1$의 2개이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $f(x)\leq g(x)$이고 ㄴ에서 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값이 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^1(x\sqrt{e^{x-1}}-x\sqrt{x})dx$$
$$=\int_0^1\{xe^{\frac{1}{2}(x-1)}-x^{\frac{3}{2}}\}dx$$
$$=\int_0^1 xe^{\frac{1}{2}(x-1)}dx-\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx$$

이때 $\int_0^1 xe^{\frac{1}{2}(x-1)}dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{\frac{1}{2}(x-1)}$이라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=2e^{\frac{1}{2}(x-1)}$이므로

$$\int_0^1 xe^{\frac{1}{2}(x-1)}dx=\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-1)}\right]_0^1-\int_0^1 2e^{\frac{1}{2}(x-1)}dx$$
$$=2-\left[4e^{\frac{1}{2}(x-1)}\right]_0^1$$
$$=2-(4-4e^{-\frac{1}{2}})$$
$$=4e^{-\frac{1}{2}}-2$$

따라서

$$\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^1 xe^{\frac{1}{2}(x-1)}dx-\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=(4e^{-\frac{1}{2}}-2)-\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$=(4e^{-\frac{1}{2}}-2)-\frac{2}{5}$$
$$=4e^{-\frac{1}{2}}-\frac{12}{5}\ (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3 $f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로

점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$라 하면 접선 l의 기울기는

$f'(t)=\sin t+t\cos t$

그런데 접선 l의 기울기는 원점 O와 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\sin t+t\cos t=\frac{t\sin t}{t}$, $t\cos t=0$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$이고 접선 l의 방정식은

$y=x$이다.

그런데 $x\geq0$에서

$x-x\sin x=x(1-\sin x)\geq0$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$
$$= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)\,dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 = \frac{\pi^2-8}{8}$$

답 ①

4 $f(x)=\int_0^x \tan\theta\,d\theta$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\tan x$

따라서 $0\le x\le t$일 때 곡선 $y=f(x)$의 곡선의 길이 $l(t)$는

$$l(t)=\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^t \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$$
$$=\int_0^t \sqrt{\sec^2 x}\,dx=\int_0^t \sec x\,dx$$
$$=\int_0^t \frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^t \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int_0^t \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

이때 $\sin x=s$로 놓으면 $x=0$일 때 $s=0$, $x=t$일 때

$s=\sin t$이고 $\frac{ds}{dx}=\cos x$이므로

$$\int_0^t \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\sin t} \frac{1}{1-s^2}\,ds$$
$$=\int_0^{\sin t} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right)ds$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\ln(1-s)+\ln(1+s)\Big]_0^{\sin t}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln\frac{1+s}{1-s}\Big]_0^{\sin t}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

이므로

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t)+\ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\ln\frac{\sin t}{\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\ln\cos t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+2\ln\cos t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\ln\cos^2 t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\times\cos^2 t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left\{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\times(1-\sin^2 t)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln(1+\sin t)^2$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2^2=\ln 2$$

답 ①

다른 풀이

$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$ (C는 적분상수)이고

$0<t<\frac{\pi}{2}$이므로

$$l(t)=\int_0^t \sec x\,dx$$
$$=\Big[\ln(\sec x+\tan x)\Big]_0^t$$
$$=\ln(\sec t+\tan t)$$
$$=\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t)+\ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}+\ln\frac{\sin t}{\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}+\ln\cos t\right)$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\times\cos t\right)$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln(1+\sin t)$$
$$=\ln 2$$