p.070 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

1. 수열의 뜻과 일반항

(1) 자연수 중에서 홀수를 작은 수부터 차례로 나열하면

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

(2) 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다. 이때 n의 식으로 나타낸 제n항 a_n을 수열의 일반항이라고 하며, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

p.070 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

2. 등차수열의 뜻과 일반항

(1) 등차수열의 뜻

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1+d=a+d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$$

✡ $a_{n+1}-a_n=d$

$\Rightarrow\ a_{n+k}-a_n=k\times d$

$\therefore\ a_{n+k}=a_n+k\times d$

p.070 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

3. 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.
이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로

$$2b=a+c,\ 즉\ b=\frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b=\frac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

예 세 수 2, x, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 2와 10의 등차중항이므로

$$x=\frac{2+10}{2}=6$$

✡ $a_p+a_q=2\times a_{\frac{p+q}{2}}$ (단, $p+q$는 짝수)

p.071 [예제 1] ❶ 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

❷ $a_3+a_5=4$, ❸ $|a_4|=|a_6|$일 때, ❹ a_2의 값은?

⇨ ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 : d (단, $d\neq 0$)

❷ $\div 2$: ㉠ $a_4=a_1+3d=2$

❸ : $a_4=-a_6$ ∴ ㉡ $a_6=a_1+5d=-2$

㉡ − ㉠ : $2d=-4$ ∴ $d=-2$ ⇒ ㉠ : $a_1=2+6=8$

∴ ❹ $=a_1+d=8+(-2)=6$

p.071 [유제 1] ❶ 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 ❷ $a_4 = 5$,

❸ $a_8 - a_5 = 6$일 때, ❹ a_7의 값은?

⇨ ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 : d

❸ $= (a_1 + 7d) - (a_1 + 4d) = 3d = 6 \quad \therefore \ d = 2$

$\boxed{1}$ ❷ $= a_1 + 3d = a_1 + 6 = 5 \quad \therefore \ a_1 = -1$

$\therefore$ ❹ $= a_1 + 6d = (-1) + 6 \times 2 = 11$

$\boxed{2}$ ❷ $\Rightarrow$ $\therefore$ ❹ $= a_4 + 3d = 5 + 3 \times 2 = 11$

p.071 [유제 2] ❶ 첫째항이 자연수이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 ❷ 세 수 6, ${a_2}^2$, $2{a_3}^2$이 이 순서대로

등차수열을 이루도록 하는 ❸ 모든 a_1의 값의 합은?

⇨ ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 : d

❷ : $2 \times {a_2}^2 = 6 + 2{a_3}^2 \Rightarrow \div 2$: $(a_1 + d)^2 = 3 + (a_1 + 2d)^2$

$2a_1d + d^2 = 3 + 4a_1d + 4d^2 \quad \therefore \ d(2a_1 + 3d) = -3$

㉠ $d = 1$: $2a_1 + 3 = -3$, $a_1 = -3$ $\therefore$ ❶에 모순

㉡ $d = -1$: $2a_1 - 3 = 3 \quad \therefore \ a_1 = 3$

㉢ $d = 3$: $2a_1 + 9 = -1$, $a_1 = -5$ $\therefore$ ❶에 모순

㉣ $d = -3$: $2a_1 - 9 = 1 \quad \therefore \ a_1 = 5$ $\therefore$ ❸ $= 3 + 5 = 8$

p.072 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

4. 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

p.072 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

설명 (1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

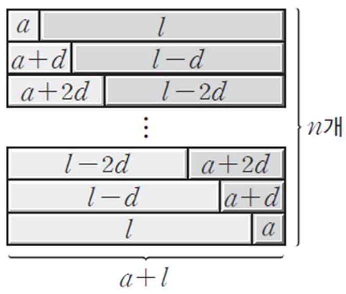
$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 우변의 합의 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \\ +)\ S_n= & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \\ \hline 2S_n= & \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}} \\ = & n(a+l) \end{array}$$



따라서 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) (1)에서 $l=a+(n-1)d$이므로

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

p.072 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

예 (1) 첫째항이 3이고 제10항이 17인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10\times(3+17)}{2}=100$$

(2) 첫째항이 4이고 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합 S_8은

$$S_8=\frac{8\times\{2\times4+(8-1)\times(-2)\}}{2}=-24$$

참고 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이다. 이때 $\frac{d}{2}=A$, $\frac{2a-d}{2}=B$라 하면 $S_n=An^2+Bn$이므로 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 n에 대한 이차식이고, 이때 상수항은 0이다.

✡ 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$: 공차가 n^2d인 등차수열

$\Rightarrow$ $S_{2n}-S_n=S_n+n^2d$, $S_{3n}-S_{2n}=(S_{2n}-S_n)+n^2d$

p.072 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

5. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_1=a_1$이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$$

이므로 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$이다.

✡ 수열의 합과 일반항의 관계 ⇨ 모든 수열에서 성립

수열 $\{a_n\}$의 합 S_n에 대하여

❶ $S_0=0 \Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, 첫째항부터 성립)

❷ $S_0\neq0 \Rightarrow \begin{cases} a_n=S_n-S_{n-1} \ (\text{단, } n\geq2) \\ a_1 \Leftarrow S_1 \end{cases}$

p.073 [예제 2] ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. ❷ $a_9 = a_3 + a_6$, ❸ $-a_9 + S_9 = 72$일 때, ❹ a_1의 값은?

⇨ ❶ Let 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 : d

❷ : $a_9 - a_6 = a_3 \Rightarrow 3d = a_1 + 2d \quad \therefore \ d = a_1$

❸ $= S_8 = \dfrac{8 \times \{2a_1 + (8-1) \times d\}}{2}$

$= 4(2a_1 + 7a_1) = 36a_1 = 72$

$\therefore$ ❹ $= a_1 = 2$

p.073 [유제 3] ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. ❷ $a_2 = 5$, ❸ $S_8 = 12$일 때, ❹ $a_7 - a_2$의 값은?

⇨ ❶ Let 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 : d

❷ : ㉠ $a_1 + d = 5$

❸ $= \dfrac{8(2a_1 + 7d)}{2} = 12 \Rightarrow \div 4$: ㉡ $2a_1 + 7d = 3$

㉡ $- 2 \times$ ㉠ : $5d = -7 \quad \therefore \ d = -\dfrac{7}{5} \Rightarrow$ ㉠ : $a_1 = \dfrac{32}{5}$

$\therefore$ ❹ $= 5d = -7$

p.073 [유제 4] ❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = 4n - 7$ 일 때, 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

❷ $S_{20} - S_8$의 값은?

⇨ ❶ : $a_9 = 4 \times 9 - 7 = 29$, $a_{20} = 4 \times 20 - 7 = 73$

∴ ❷ $= a_9 + a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{20}$ $\Rightarrow$ 항수 : $20 - 8 = 12$

$$= \frac{12(a_9 + a_{20})}{2} = \frac{12(29 + 73)}{2} = 6 \times 102 = 612$$

p.074 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

6. 등비수열의 뜻과 일반항

(1) 등비수열의 뜻

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱해 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_1 = a$

$a_2 = a_1 r = ar$

$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$

$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$

$\vdots$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

✡ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+k}}{a_n} = r^k$

$\Rightarrow a_{n+k} = a_n \times r^k$

p.074 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

예 ① 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=2\times3^{n-1}$$

② 등비수열 $\{a_n\}$이

$$1,\ -5,\ 25,\ -125,\ \cdots$$

일 때, 첫째항이 1이고 공비가 -5이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1\times(-5)^{n-1}=(-5)^{n-1}$$

p.074 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

7. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로

$$b^2=ac$$

가 성립한다.

역으로 0이 아닌 세 수 a, b, c에 대하여 $b^2=ac$이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

예 세 수 2, x, 8이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 2와 8의 등비중항이므로

$$x^2=2\times8=16$$

즉, $x=-4$ 또는 $x=4$

✡ $a_p\times a_q=\left(a_{\frac{p+q}{2}}\right)^2$ (단, $p+q$는 짝수)

p.075 [예제 3] ❶ 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

❷ $a_1 a_3 = 4$, ❸ $\dfrac{a_5}{a_4 - 3a_6} = \dfrac{1}{2}$일 때, ❹ a_4의 값은?

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : $r \Rightarrow a_1 > 0,\ r > 0$

❷ $= a_1 \times (a_1 r^2) = (a_1 r)^2 = 4 \quad \therefore$ ㉠ $a_1 r = 2$ ($\because$ ❶)

❸ : $2 \times a_1 r^4 = a_1 r^3 - 3a_1 r^5 \Rightarrow \div (a_1 r^3)$: $2r = 1 - 3r^2$

$3r^2 + 2r - 1 = (r+1)(3r-1) = 0 \quad \therefore r = \dfrac{1}{3}$ ($\because$ ❶)

㉠ : $a_1 = 2 \times 3 = 6 \quad \therefore$ ❹ $= a_1 r^3 = 6 \times \dfrac{1}{27} = \dfrac{2}{9}$

p.075 [유제 5] ❶ 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 ❷ $a_2 = 12$,

❸ $a_4 = 2a_5$일 때, ❹ a_3의 값은?

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : r

❷ $= a_1 r = 12 \Rightarrow a_1 \neq 0,\ r \neq 0$

❸ : $r = \dfrac{a_5}{a_4} = \dfrac{1}{2} \quad \therefore$ ❹ $= a_2 \times r = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$

p.075 [유제 6] 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2 a_4 = \frac{4}{3}$, $a_8 a_{10} = 27$일 때, $a_6{}^2$의 값은?

$\boxed{1}$ 세 수 a_2, a_6, a_{10}이 이 순서대로 등비수열 : $a_2 a_{10} = a_6{}^2$

세 수 a_4, a_6, a_8이 이 순서대로 등비수열 : $a_4 a_8 = a_6{}^2$

$\therefore\ a_6{}^4 = a_2 a_{10} \times a_4 a_8 = a_2 a_4 \times a_8 a_{10} = \frac{4}{3} \times 27 = 36$

$\therefore\ a_6{}^2 = 6$ $(\because\ a_6{}^2 \geq 0)$

$\boxed{2}$ $a_2 a_4 = a_3{}^2 = \frac{4}{3}$, $a_8 a_{10} = a_9{}^2 = 27$

$a_3{}^2 \times a_9{}^2 = a_6{}^4 = \frac{4}{3} \times 27 = 36$ $\therefore\ a_6{}^2 = 6$ $(\because\ a_6{}^2 \geq 0)$

p.076 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

8. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r \neq 1$일 때, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n = na$

✡ 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$: 공비가 r^n인 등비수열

$\Rightarrow$ $S_{2n} - S_n = S_n \times r^n$, $S_{3n} - S_{2n} = \left(S_{2n} - S_n\right) \times r^n$

p.076 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

설명 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 공비 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ -) & rS_n= & \phantom{a+{}}ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline & (1-r)S_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

따라서

$r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

p.076 $\boxed{5}$ 등차수열과 등비수열

예 첫째항이 2이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}=3-\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

참고 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$$

이다. 이때 $\dfrac{a}{r-1}=A$라 하면

$$S_n=Ar^n-A$$

예를 들어 첫째항이 5, 공비가 4인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{5\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{5}{3}\times4^n-\frac{5}{3}$$

p.077 [예제 4] ❶ 공비가 음수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

❷ $a_1 + a_4 = 1$, ❸ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 7$일 때,

❹ $a_1 + a_2 = (q/p)$이다. ❺ $p+q$의 값은?

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : r (단, $r < 0$)

㉠ ❷ $= a_1 + a_1 r^3 = a_1\left(1 + r^3\right) = 1$

❸ $= \dfrac{a_1\left(1 - r^6\right)}{1 - r} = \dfrac{❷ \times (1 - r)\left(1 + r + r^2\right)}{1 - r}$

$= 1 + r + r^2 = 7$, $r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) = 0$

$\therefore$ $r = -3$ ($\because$ $r < 0$) $\Rightarrow$ ㉠ : $-26a_1 = 1$

p.077 [예제 4] ❹ $a_1 + a_2 = (q/p)$이다. ❺ $p+q$의 값은?

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : r (단, $r < 0$)

$r = -3$, $-26a_1 = 1$

❹ $= -\dfrac{1}{26} + \left(-\dfrac{1}{26}\right) \times (-3) = \dfrac{2}{26} = \dfrac{1}{13} = \dfrac{q}{p}$

$\therefore$ ❺ $= 13 + 1 = 14$

p.077 [유제 7] ❶ 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 ❷ $a_2=\sqrt{2}\,a_1$,

❸ $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=93\sqrt{2}$ 일 때, a_1의 값은?

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : r $\Rightarrow$ ❷ : $r=\sqrt{2}$

❸ $=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+a_1r^7+a_1r^9$

$=a_1\times\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}+16\sqrt{2}\right)$

$=31\sqrt{2}\,a_1=93\sqrt{2}$

$\therefore\ a_1=3$

p.077 [유제 8] ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. ❷ $S_2=2$, ❸ $S_8-S_4=300$일 때,

❹ S_6의 값은?

⇨ ❶ Let 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 : r $\Rightarrow$ ❷&❸ : $r\neq1$

㉠ ❷ $=\dfrac{a_1\left(r^2-1\right)}{r-1}=2$

❸ $=a_5+a_6+a_7+a_8=\dfrac{a_5\left(r^4-1\right)}{r-1}=$ ❷ $\times\, r^4\left(r^2+1\right)$

$=2\times r^4\left(r^2+1\right)=300\ \Rightarrow\ \div 2\ :\ r^6+r^4-150=0$

Let $r^2=t\ \Rightarrow\ t^3+t^2-150=(t-5)\left(t^2+6t+30\right)=0$

$t^2+6t+30=(t+3)^2+21>0\ :\ t=r^2=5$

p.077 [유제 8] ❹ S_6의 값은?

⇨ ㉠ $\dfrac{a_1(r^2-1)}{r-1}=2$, $r^2=5$

㉠ : $\dfrac{a_1}{r-1}\times(5-1)=2$ $\therefore$ $\dfrac{a_1}{r-1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ ❹ $=\dfrac{a_1(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a_1}{r-1}\times\left\{(r^2)^3-1\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\times(5^3-1)=62$