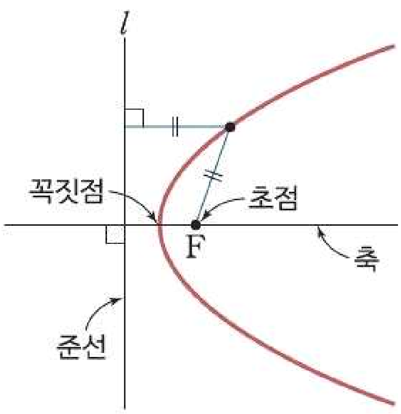
Ⅰ_1. 포물선

[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고,
포물선의 방정식을 구할 수 있다.
[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고,
접선의 방정식을 구할 수 있다.

1 포물선(parabola)의 뜻 ❶



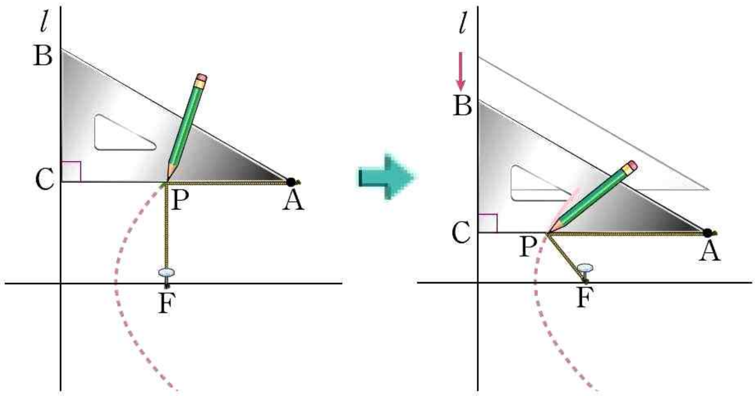
(1) 평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F에 이르는 거리와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 '포물선'이라 한다.

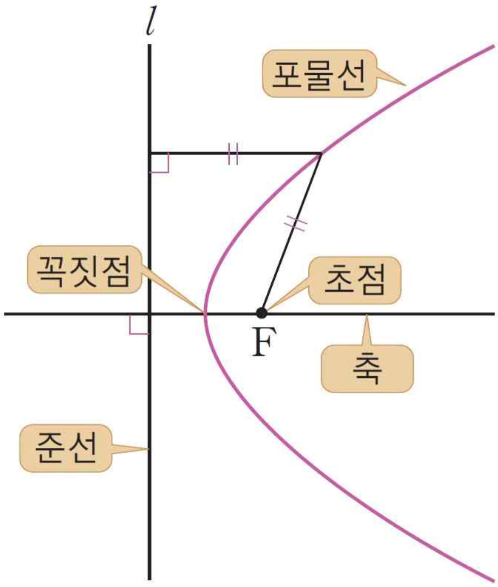
(2) 점 F를 포물선의 '초점', 직선 l을 포물선의 '준선'이라 한다. 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 '축', 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 '꼭짓점'이라 한다.

☑ 포물선(抛物線)의 '포'는 '던지다', '물'은 '물체'라는 뜻으로 포물선은 물건을 위로 비스듬히 던질 때 물체가 그리는 곡선을 뜻한다.

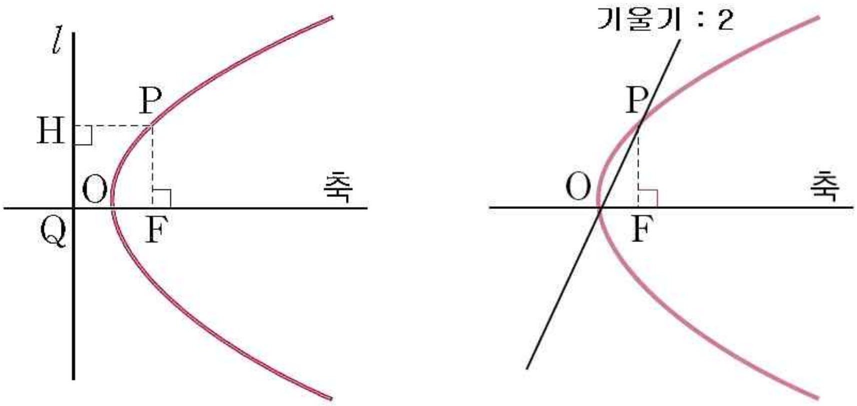
1 포물선(parabola)의 뜻 ❷

(3)





(4) 포물선에서 초점의 작도



$$\frac{\overline{PF}}{\overline{OF}} = 2$$

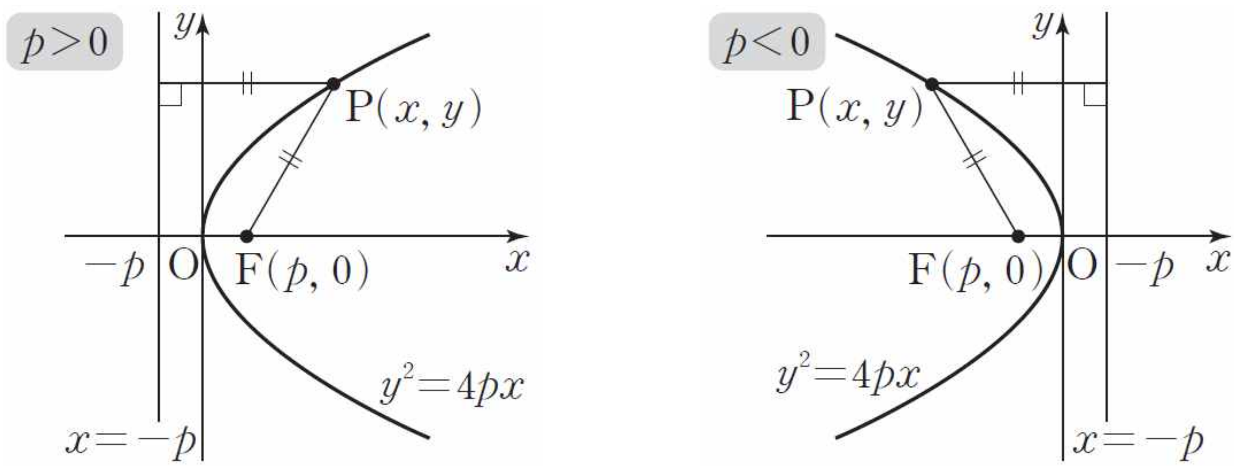
$$\overline{OF} : \overline{PF} = 1 : 2$$

2 포물선의 방정식 ❶

(1) 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $F(p,\ 0)$, 준선이 $x = -p$인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \ (\text{단, } p \neq 0)$$

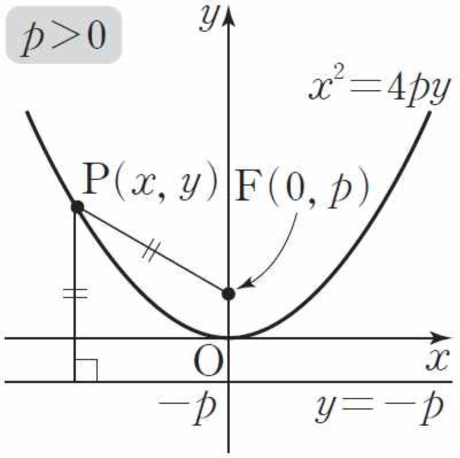


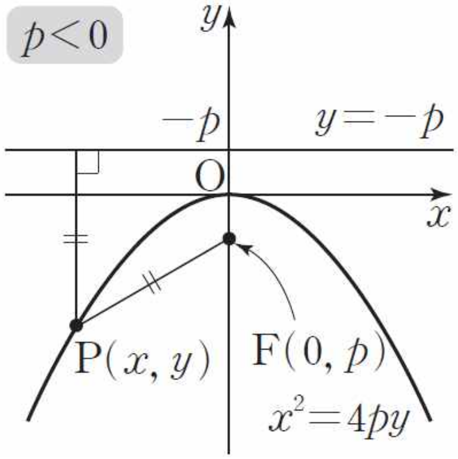
2 포물선의 방정식 ❷

(2) 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

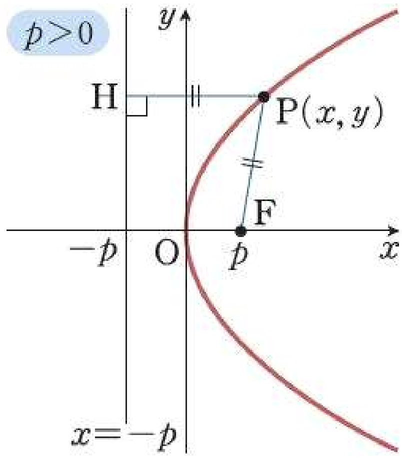
$$x^2=4py \text{ (단, } p\neq 0\text{)}$$





2 포물선의 방정식 ❸

☑ 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$를 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해보자. 그림과 같이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로



$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2=4px$$

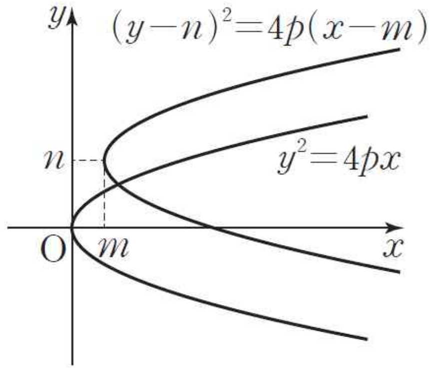
3 포물선의 평행이동 ❶

(1) 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 두 포물선 $y^2=4px$, $(y-n)^2=4p(x-m)$의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.

방정식	$y^2=4px$	$(y-n)^2=4p(x-m)$
초점의 좌표	$(p, 0)$	$(p+m, n)$
준선의 방정식	$x=-p$	$x=-p+m$
꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	(m, n)



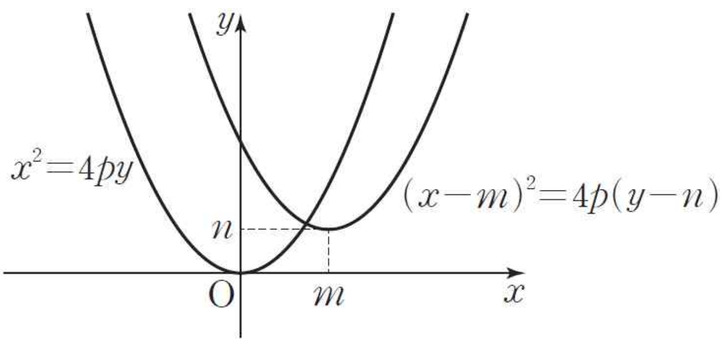
3 포물선의 평행이동 ❷

(2) 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n)$$

이다. 이때 두 포물선 $x^2=4py$, $(x-m)^2=4p(y-n)$의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.

방정식	$x^2=4py$	$(x-m)^2=4p(y-n)$
초점의 좌표	$(0, p)$	$(m, p+n)$
준선의 방정식	$y=-p$	$y=-p+n$
꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	(m, n)



✡ 포물선의 방정식 구하기 ❶

초점 $\mathrm{F}(a,\ b)$, 준선 : $x=c$ (y축에 평행)

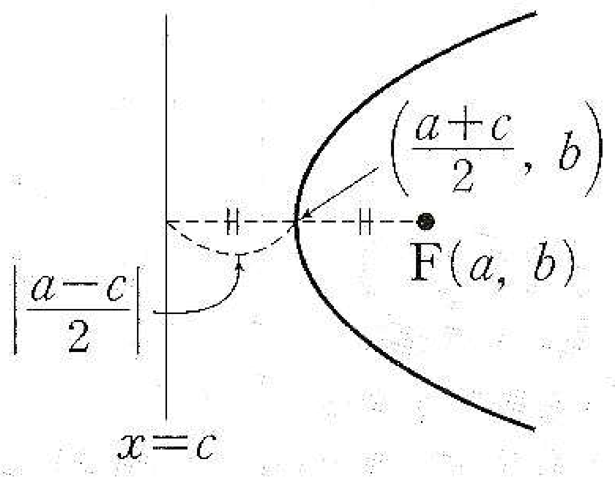
⇨ 꼭짓점 : $\left(\dfrac{a+c}{2},\ b\right)$

$$p=a-\frac{a+c}{2}=\frac{a-c}{2}$$

$y^2=4px$을 x축 방향으로

$\dfrac{a+c}{2}$만큼, y축 방향으로

b만큼 평행이동



$$\therefore\ (y-b)^2=4p\left(x-\frac{a+c}{2}\right)$$

✡ 포물선의 방정식 구하기 ❷

초점 $\mathrm{F}(a,\ b)$, 준선 : $y=c$ (x축에 평행)

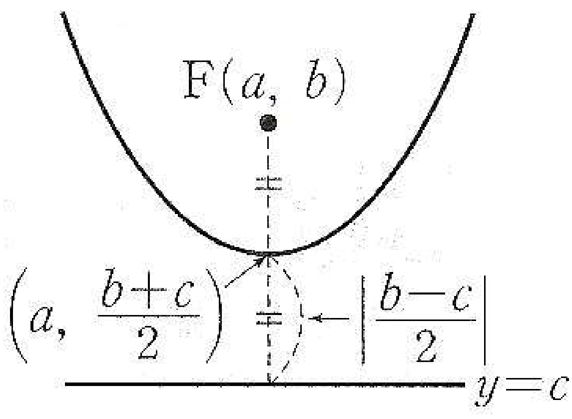
⇨ 꼭짓점 : $\left(a,\ \dfrac{b+c}{2}\right)$

$$p=b-\frac{b+c}{2}=\frac{b-c}{2}$$

$x^2=4py$를 x축 방향으로

a만큼, y축 방향으로

$\dfrac{b+c}{2}$만큼 평행이동

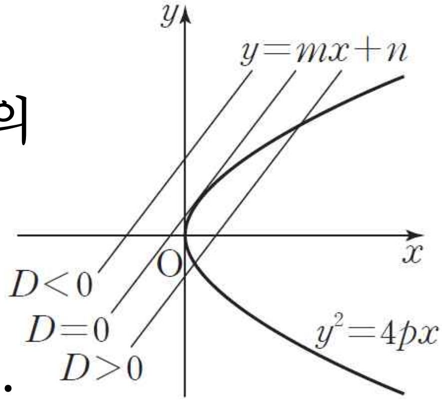


$$\therefore\ (x-a)^2=4p\left(y-\frac{b+c}{2}\right)$$

4 포물선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 방정식을 각각 $y^2=4px$, $y=mx+n$ $(m \neq 0)$이라 할 때, $y=mx+n$을 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면 $m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$ …… ㉠

포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면,



(1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.

5 포물선의 접선 ❶

(1) 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad (\text{단, } m \neq 0)$$

☑ 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자. 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m \neq 0)$인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이를 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

$\boxed{5}$ 포물선의 접선 ❷

의 판별식을 D라 하면

$$D/4=(mn-2p)^2-m^2n^2=4p(p-mn)=0$$

이때 $p\neq 0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\dfrac{p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$이다.

✡ 기울기가 m ($m\neq 0$)인 포물선의 접선의 방정식

① $y^2=4px \Rightarrow y=mx+\dfrac{p}{m}$

② $x^2=4py \Rightarrow y=mx-m^2p$

$\boxed{5}$ 포물선의 접선 ❸

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

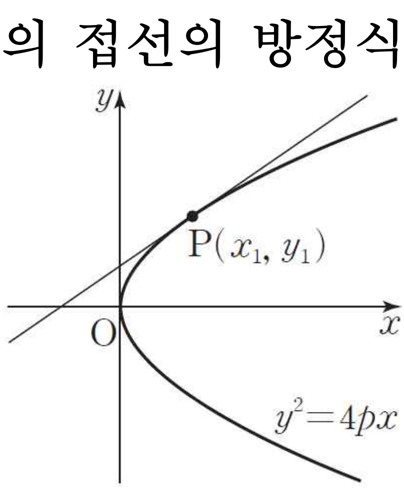
$$y_1y=2p(x+x_1)$$

☑ 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

[그림 1]과 같이 $x_1\neq 0$일 때 접선의 기울기를 m ($m\neq 0$)이라 하면

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$



[그림 1]

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$\boxed{5}$ 포물선의 접선 ❹

$$y = mx + \frac{p}{m} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡은 같은 직선이므로 $-mx_1 + y_1 = \frac{p}{m}$

양변에 m을 곱해 얻은 m에 대한 이차방정식

$x_1 m^2 - y_1 m + p = 0$에서

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{(-y_1)^2 - 4px_1}}{2x_1}$$

이때 ${y_1}^2 = 4px_1$, 즉 $x_1 = \frac{{y_1}^2}{4p}$이므로

$\boxed{5}$ 포물선의 접선 ❺

$$m = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{2p}{y_1} \quad (y_1 \neq 0)$$

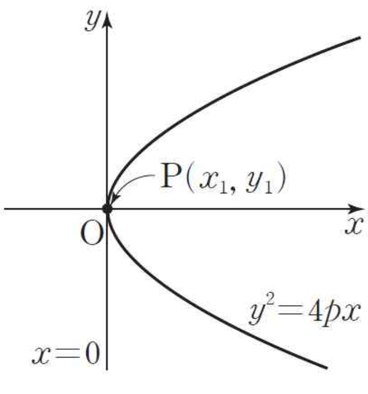
이것을 ㉠에 대입하면 $y = \frac{2p}{y_1}x - \frac{2p}{y_1}x_1 + y_1$이고,

${y_1}^2 = 4px_1$이므로 정리하면

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$x_1 = 0$일 때 $y_1 = 0$이므로 ㉢에 대입

하면 접선의 방정식은 $x = 0$이고,



[그림 2]

[그림 2]와 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선이 y축($x = 0$)이므로 $x_1 = 0$일 때에도 ㉢은 성립한다.

✡ 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

② 포물선 $x^2 = 4py$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

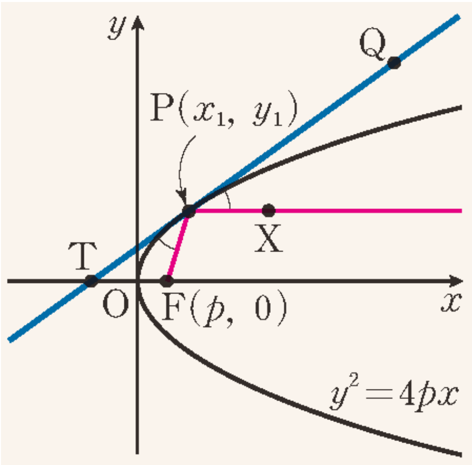
$$x_1 x = 2p(y + y_1)$$

✡ 곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

① x^2대신에 $x_1 x$를 대입, x대신에 $\dfrac{x_1 + x}{2}$를 대입

② y^2대신에 $y_1 y$를 대입, y대신에 $\dfrac{y_1 + y}{2}$를 대입

✡ 포물선의 성질 ❶



(1) 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ $(p > 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 $\overleftrightarrow{\mathrm{PX}}$라 하자.

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

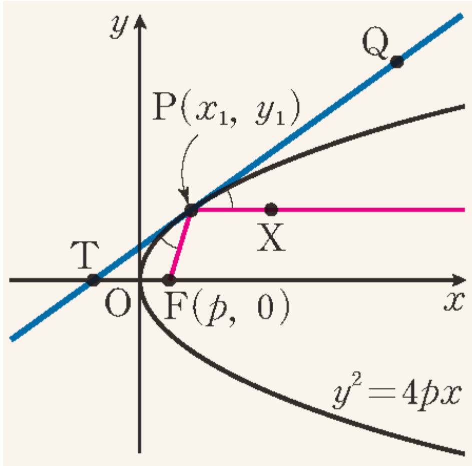
이고, 이 접선과 x축의 교점을 T라 하면

$$\mathrm{T}(-x_1, 0)$$

이다. 또, ${y_1}^2 = 4px_1$이고 $p > 0$, $x_1 > 0$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{(x_1 - p)^2 + {y_1}^2} = \sqrt{(x_1 - p)^2 + 4px_1}$$

✡ 포물선의 성질 ❷



$$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{(x_1+p)^2} = x_1 + p = \overline{\mathrm{TF}}$$

따라서 삼각형 FPT는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{TPF} = \angle\mathrm{PTF}$이다.

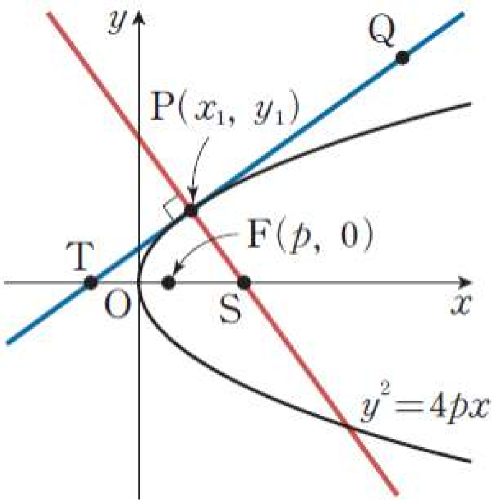
한편, $\overleftrightarrow{\mathrm{TF}} \,/\!/\, \overleftrightarrow{\mathrm{PX}}$ 이므로

$$\angle\mathrm{PTF} = \angle\mathrm{QPX}$$

그러므로 $\angle\mathrm{TPF} = \angle\mathrm{QPX}$이다.

그런데 전파가 곡선 위의 한 점에서 반사된다는 것은, 그 점을 지나는 곡선의 접선에 대하여 입사각과 반사각의 크기가 같게 된다는 뜻이다. 따라서 포물선의 축에 평행하게 들어온 전파는 포물선에 반사되어 초점에 모이게 됨을 알 수 있다.

✡ 포물선의 성질 ❸



(2) 점 P를 지나고 접선 TQ에 수직인 직선과 x축의 교점을 S라 할 때,

$$\overline{\mathrm{TF}} = \overline{\mathrm{FS}}$$

$\because$ TQ에 수직인 직기 : $-\dfrac{y_1}{2p}$ $(p>0)$

$\overline{\mathrm{PS}}$의 방 : $y - y_1 = -\dfrac{y_1}{2p}(x - x_1)$

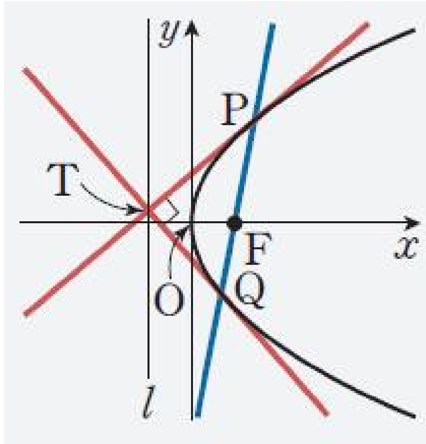
$y=0$을 대입 : $x = x_1 + 2p$ $\therefore$ $\mathrm{S}(x_1+2p,\ 0)$

$\overline{\mathrm{TF}} = |p - (-x_1)| = x_1 + p$

$\overline{\mathrm{FS}} = |x_1 + 2p - p| = x_1 + p$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{TF}} = \overline{\mathrm{FS}}$

✡ 포물선의 성질 ❹

(3) 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 두 점 P, Q에서의 접선은 수직으로 만나고 두 접선의 교점 T는 이 포물선의 준선 l 위의 점이다.



(4) 초점이 F인 포물선 위의 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P에서의 접선은 $\angle$FPH를 이등분한다.