Ⅳ_1. 행렬의 뜻

[10공수1-04-01] 행렬의 뜻을 알고,
실생활 상황을 행렬로 표현할 수 있다.

A, B : 행렬의 뜻을 설명하고,
실생활 상황을 행렬로 표현할 수 있다

C, D : 행렬의 뜻을 이해하고,
간단한 실생활 상황을 행렬로 표현할 수 있다.

E : 행렬의 뜻을 안다.

Ⅳ_2. 행렬의 연산

[10공수1-04-02] 행렬의 연산을 수행하고,
관련된 문제를 해결할 수 있다.

A : 행렬의 연산을 수행하고,
관련된 다양한 문제를 해결할 수 있다.

B : 행렬의 연산을 수행하고, 관련된 문제를 해결할 수 있다.

C : 행렬의 연산을 수행하고,
관련된 간단한 문제를 해결할 수 있다.

D : 행렬의 연산을 수행할 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 행렬의 연산을 수행할 수 있다.

$\boxed{1}$ 행렬의 뜻

$$\begin{array}{r c} \text{제1 행} \rightarrow & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$} \\ \text{제2 행} \rightarrow & \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{제1열} & \text{제2열} & \text{제3열} \end{array} \end{array}$$

(1) 행렬 : 몇 개의 수 또는 문자를
직사각형 모양으로배열하여
괄호 (   )안에 묶어 나타낸 것

(2) 성분 : 행렬을 구성하는 각각의 수나 문자

(3) 행 : 성분을 가로로 배열한 것
위에서부터 차례로 제1행, 제2행, …

(4) 열 : 성분을 세로로 배열한 것
왼쪽에서부터 차례로 제1열, 제2열, …

✡ $m \times n$ 행렬

$$\overset{\text{행의 개수}}{\overset{\downarrow}{m}} \times \underset{\text{열의 개수}}{\underset{\uparrow}{n}} \text{ 행렬}$$

(1) $m \times n$ 행렬 : m개의 행과 n개의 열로 이루어진
행렬 ⇒ 'm행 n열의 행렬', 'm by n matrix'
☑ → 행, ↓열

(2) n차 정사각행렬 : (행의 수) = (열의 수) = n

① $1 \times n$행렬 ⇒ n차원 행벡터
$m \times 1$행렬 ⇒ m차원 열벡터

② 1×1행렬 (a)는 괄호를 생략하고 a로 쓴다.

✡ 행렬의 $(i,\ j)$성분

(1) 행렬은 대문자 A, B, C, $\cdots$ 를 사용하여

표현하고 그 성분은 소문자 a, b, c, $\cdots$ 를 사용하여 표현

(2) $(i,\ j)$성분 : 제 i행과 제 j열이 만나는 위치에 있는

행렬의 성분 ⇨ (기호) a_{ij}

✡ 행렬의 상등

두 행렬 A, B에 대하여

(1) 같은 꼴 : 행의 수와 열의 수가 각각 같다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & & \text{제 } j \text{ 열} & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \text{제 } i \text{ 행} \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) 행렬의 상등

① 같은 꼴

② 대응하는 성분끼리 서로 같다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22} \end{cases}$$

☑ 같은 위치에 있는 성분들끼리 같다.

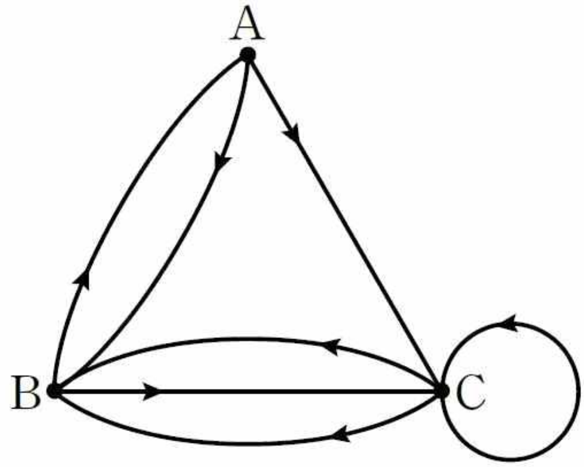
(3) 행렬의 상등의 성질 : A, B, C를 행렬이라 할 때,

① $A = A$ ② $A = B \Rightarrow B = A$

③ $A = B$, $B = C \Rightarrow A = C$

✡ 행렬의 활용

세 지점 A, B, C을 연결하는 길의 수를 행렬로



$$\begin{array}{cc} \text{출발}\backslash\text{도착} & \begin{array}{ccc} \text{A로} & \text{B로} & \text{C로} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A에서} \\ \text{B에서} \\ \text{C에서} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배 ❶

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

(1) 덧셈 $A+B$: ① 같은 꼴일 때만 가능

② 대응하는 성분의 합

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

(2) 뺄셈 $A-B$: ① 같은 꼴일 때만 가능

② 대응하는 성분의 차

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

☐2 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배 ❷

(3) 실수배 kA : A의 각 성분을 k배 (단, k는 실수)

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

✡ 행렬의 덧셈에 대한 성질

같은 꼴의 행렬 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙 : $A+B=B+A$

(2) 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

✡ 영행렬 O

(1) 영행렬 : 모든 성분이 0인 행렬 ⇒ (기호) O

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 행렬 A와 영행렬 O이 같은 꼴일 때

$A+O=O+A=A$

☑ O : 같은 꼴인 행렬의 집합에서 덧셈에 대한 항등원

✡ $-A$

(1) $-A$: 모든 성분의 부호를 바꾼 것

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{일 때, } -A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

(2) 행렬 A와 영행렬 O가 같은 꼴일 때

$$A+(-A)=(-A)+A=O$$

☑ $-A$: 행렬 A의 덧셈에 대한 역원

✡ 행렬의 뺄셈

같은 꼴의 행렬 A와 B에 대하여

(1) $A+(-B)=A-B$

(2) $A-B$: 행렬 A에서 행렬 B를 뺀 차

⇨ A의 각 성분에 대응하는 B의 성분을 뺀 차

(3) 같은 꼴의 행렬 A, B, X에 대하여

$$X+B=A \Leftrightarrow X=A-B$$

✡ 행렬의 실수배

행렬 A의 k배 : 각 성분에 실수 k를 곱한 것 ⇒ (기호) kA

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{일 때, } kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \text{ (단, } k\text{는 실수)}$$

✡ 행렬의 실수배에 대한 성질

두 행렬 A, B가 같은 꼴의 행렬이고, k와 l이 실수일 때,

(1) $1 \times A = A$, $(-1) \times A = -A$

(2) $0 \times A = O$, $k \times O = O$

(3) 결합법칙 : $(kl)A = k(lA)$

(4) 분배법칙 : $(k+l)A = kA + lA$

$$k(A+B) = kA + kB$$

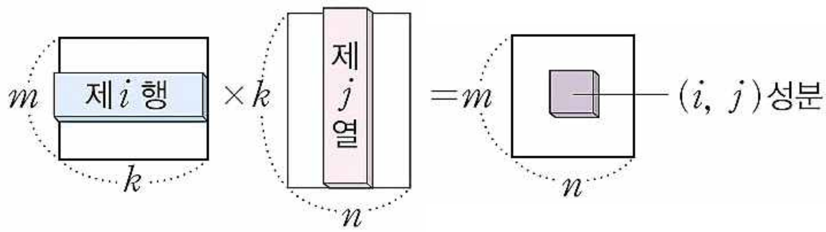
✡ 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

수와 식에서처럼 간단히 정리한 다음 계산한다.

$\boxed{3}$ 행렬의 곱셈

두 행렬 A, B에 대하여

(1) 행렬 A와 B의 곱 : A의 제 i행의 각 성분과 B의 제 j열의 각 성분을 그 순서대로 곱하여 더한 것을 $(i,\ j)$성분으로 하는 행렬



(2) 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때만 두 행렬 A, B의 곱 AB가 정의된다.

(3) $m \times k$행렬 A와 $k \times n$행렬 B의 곱 AB는 $m \times n$ 행렬

(4) $(m \times k$ 행렬$)(k \times n$ 행렬$) \rightarrow (m \times n$ 행렬$)$

3 행렬의 곱셈 ❶

(5) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$일 때,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$$

✡ 행렬의 거듭제곱

행렬 A가 정사각행렬이고 m과 n이 자연수일 때,

(1) $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$, $\cdots$, $A^{n+1} = A^nA$

(2) $A^m \times A^n = A^{m+n}$, $(A^m)^n = A^{mn}$

✡ 행렬 곱셈의 성질

합과 곱이 정의되는 행렬 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙은 성립은 성립하지 않는다. : $AB \neq BA$

($\because$ $g \circ f \neq f \circ g$)

(2) 결합법칙이 성립 : $(AB)C = A(BC) = ABC$

(3) 분배법칙이 성립 : $A(B+C) = AB + AC$,

$(A+B)C = AC + BC$

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (단, k는 실수)

(5) $AO = OA = O$

✡ 행렬의 곱셈과 실수의 곱셈의 비교

실수	행렬
$ab = ba$	$AB \neq BA$
$ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$이 성립한다.	$AB = O$이면 $A = O$ 또는 $B = O$는 일반적으로 성립하지 않는다.
$a \neq 0$, $ab = ac$이면 $b = c$가 성립한다.	$A \neq O$, $AB = AC$이면 $B = C$는 일반적으로 성립하지 않는다.

✡ 단위행렬 E ❶

(1) 단위행렬 : 정사각행렬 중에서 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로의 대각선(주대각선) 위의 성분이 모두 1이고,
그 외의 성분은 모두 0인 행렬 ⇨ (기호) E

$$(1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) n차 정사각행렬 $A\,(\neq O)$와 n차의 단위행렬 E

$$AE = EA = A$$

(3) 단위행렬 E는 곱셈에 대한 항등원

✡ 단위행렬 E ❷

(4) 단위행렬의 성질

① $E^2 = E$, $E^3 = E$, $\cdots$, $E^n = E$

② $(AE)^2 = A^2E^2 = A^2$

③ $(A \pm E)^2 = A^2 \pm 2A + E$

④ $(A+E)(A-E) = A^2 - E$

✡ $AB \neq BA$의 유의 사항

정사각행렬 A, B에 대하여

(1) $(AB)^2 = (AB)(AB) \neq A^2B^2$

(2) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = \neq A^2 - B^2$

(4) $AB \neq BA$의 예외

① $AO = OA = O$ ㉠ $(AE)^2 = A^2E^2 = A^2$

② $AE = EA = A \Rightarrow$ ㉡ $(A \pm E)^2 = A^2 \pm 2A + E$

③ $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ㉢ $(A+E)(A-E) = A^2 - E$

④ $A^nA = AA^n = A^{n+1}$

☑ $B = pE + qA^{-1} + rA^n$ (p, q, r은 실수) $\Rightarrow AB = BA$

✡ 영인자(Zero Divisor)

(1) 영인자 : $A \neq O$, $B \neq O$이지만 $AB = O$이 되는 행렬 A, B

(2) $A \neq O$, $AB = O$ $\Leftarrow\!\!\not\Rightarrow$ $B = O$

(3) $A \neq O$, $AB = AC$ $\Leftarrow\!\!\not\Rightarrow$ $B = C$

(4) $A^2 = O$ $\Leftarrow\!\!\not\Rightarrow$ $A = O$

$\boxed{4}$ 케일리-해밀턴(Cayley-Hamilton)의 정리

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\not\Leftarrow\!\!\Longrightarrow$ $\underline{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O}$

(2) 역은 성립하지 않는다.(∵ $\Rightarrow \begin{cases} ① \ A = kE \\ ② \ A \neq kE \end{cases}$)

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2 + pA + qE = 0$일 때

① $A \neq kE \Rightarrow p = a + d$, $q = ad - bc$

② $A = kE \Rightarrow k^2 - pk + q = 0$ (단, k는 실수)

(4) ① '역'이 반드시 성립하는 경우 : $A \neq kE$

② '역'이 성립 or 성립하지 않는 경우 : $A = kE$

✡ A^n을 구하는 방법

(1) $A^2,\ A^3,\ A^4,\ \cdots$ 을 구하여 A^n을 추론

(2) 케일리–해밀턴의 정리를 이용 ⇒ A^n의 차수를 줄여 나간다.

① $\begin{cases} A^2+A+E=O \Rightarrow A^3=E \\ A^2-A+E=O \Rightarrow A^3=-E \end{cases}$ 를 이용

② $a+d=0 \Rightarrow \begin{cases} A^{2n}=(bc-ad)^n\times E \\ A^{2n+1}=(bc-ad)^n\times A \end{cases}$

③ $ad-bc=0 \Rightarrow A^2=(a+d)A$

$$\therefore\ A^n=(a+d)^{n-1}A$$

✡ A^n을 구하는 방법

④ $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=0 \end{cases} \Rightarrow A^2=0$

$A^2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} ad-bc=0 \\ a+d=0 \text{ or } A=O \end{cases}$

(3) $A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E=O$

① $\alpha\neq\beta$: $\begin{cases} A^{n+1}-\alpha A^n=\beta^n(A-\alpha E) \cdots ㉠ \\ A^{n+1}-\beta A^n=\alpha^n(A-\beta E) \cdots ㉡ \end{cases}$

⇒ ㉠ − ㉡을 계산

② $\alpha=\beta$: $(A-\alpha E)^2=O$이므로 $A-\alpha E=B$라 하면

$B^2=O$이므로 이항정리를 이용.

✡ A^n을 구하는 방법

③ $B^2 = O$인 행렬 B에 대하여

$$A = B + kE \Rightarrow A^n = (B + kE)^n = nk^{n-1}B + k^nE$$

(4) $A = PBP^{-1}$이면 $A^n = PB^nP^{-1}$임을 이용

(5) $A^n = E$를 만족하는 최소의 자연수 n의 값이 k

$\Rightarrow$ A^n 은 k를 주기로 순환

(6) 행렬에 대한 고차식이 주어지는 경우

$\Rightarrow$ 케일리-해밀턴의 정리를 이용 ⇨ 차수↓

✡ A^n을 구하는 방법

(7) n이 자연수일 때,

① $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 + d + \cdots + d^n \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + d + \cdots + d^n & d^n \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n - b^n & b^n \end{pmatrix}$

✡ 역행렬 구하기

$$(ad-bc)E = A\{-A+(a+d)E\}$$

$$E = A \times \frac{-A+(a+d)E}{ad-bc}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\{-A+(a+d)E\}$$

✡ 행렬 곱셈의 응용

다음은 지난해 어느 회사에서 생산한 두 제품 ㈎와 ㈏의 제품 한 개당 제조 원가와 판매 가격 및 1년 동안의 판매량을 나타낸 표이다.

	제품㈎	제품㈏		상 판매량	하 판매량
제조 원가	a_{11}	a_{12}	제품㈎	b_{11}	b_{12}
판매 가격	a_{21}	a_{22}	제품㈏	b_{21}	b_{22}

위의 표를 각각 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 이 두 행렬의 곱 AB를 $AB = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라고 하자.

제품 한 개당 판매 이익금을

(판매 이익금) $=$ (판매 가격) $-$ (제조 원가)로 정의할 때,

(1) (상반기에 판매된 제품의 제조 원가) $= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = p$

(하반기에 판매된 제품의 제조 원가) $= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = q$

$\therefore$ (1년 동안 판매된 제품의 제조 원가의 총액) $= p + q$

(2) (상반기에 판매된 제품의 판매 금액) $= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = r$

(하반기에 판매된 제품의 판매 금액) $= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = s$

$\therefore$ (1년 동안 판매된 제품의 판매 금액의 총액) $= r + s$

(3) (1년 동안 판매된 제품의 판매 이익금의 총액)

$= r + s - (p + q)$

✡ 행렬의 ○, × 문제 - $AB \neq BA$와 관련

(1) $AB = O \not\Leftarrow\not\Rightarrow BA = O$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $(AB)^2 = A^2B^2 \Longleftarrow\not\Rightarrow AB = BA$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^2B^2 = B^2A^2 \Longleftarrow\not\Rightarrow AB = BA$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = kB^n \not\Leftarrow\Longrightarrow AB = BA$

[증명] $AB = kB^n \times B = B \times kB^n = BA$

(5) $B = pA + qE \not\Longleftarrow\Longrightarrow AB = BA$

[증명] $A(pA + qE) = pA^2 + qA = (pA + qE)A = BA$

☑ $AB \neq BA$의 예외 : O, E, 역행렬, 자기 자신

$AB = kE$, $A + B = kE$

(6) $A^2B = A + E \not\Longleftarrow\Longrightarrow AB = BA$

[증명] $E = A(AB - E) = (AB - E)A$

$\Rightarrow A^2B = ABA$ & $\exists A^{-1}$

(7) $AB = A + B \Rightarrow (A - E)(B - E) = E$

$\Rightarrow (B - E)(A - E) = E$

$\Rightarrow BA = A + B = AB$

(8) $AB = E \Longleftrightarrow BA = E$ ($\because$ 역행렬의 교환법칙)

$A^2B^2 = E \Longleftrightarrow B^2A^2 = E$

[증명] $A^2B^2 = (AAB)B = B(AAB)$

$= (BAA)B = B(BAA) = B^2A^2$

(9) $AB + xA + yB + zE = 0$

$\Rightarrow (A + pE)(B + qE) = kE$로 만들 수 있는 경우에만 교환법칙($AB = BA$)가 성립한다.

✡ 행렬의 ○, × 문제 - 영인자와 관련

(1) $A \neq O$일 때, $AB = O \not\Leftrightarrow B = O$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A \neq O$일 때, $AB = AC \not\Leftrightarrow B = C$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A \neq O$일 때, $A^2 = A \not\Leftrightarrow A = E$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $A^2 = O \not\Leftrightarrow A = O$

(대우) $A \neq O \not\Leftrightarrow A^2 \neq O$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

☑ $A^n = O \not\Leftrightarrow A = O$ (단, $n \geq 2$인 자연수)

(5) $A^3 = O \iff A^2 = O$

[증명] $A = O$ or $A \neq O$ / $\exists A^{-1}$ or $\nexists A^{-1}$

☑ $A^n = O \iff A^2 = O$ (단, $n \geq 3$인 자연수)

(6) $A^2 = E \not\Leftrightarrow A = E$ or $A = -E$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $A^3 = E \;\not\Longleftrightarrow\; A = E$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

☑ $A^3 = E \iff A = E$ or $A^2 + A + E = O$

(8) $A^2 = B^2 \;\not\rightarrow\; A = B$ or $A = -B$

[반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

✡ 행렬의 ○, × 문제 - 복합적인 문제

(1) $AB = A,\; BA = B \Rightarrow A^2 = A$

[증명] $A^2 = (AB)A = A(BA) = AB = A$

(2) $A^m = A^n = E$를 만족하는 서로 다른 자연수 $m,\, n$이 존재

$\not\rightarrow A = E$

[반례] $A^6 = A^4 = E \Rightarrow A^2 = E$

(3) $A^m = A^n = E$를 만족하는 서로소인 자연수 $m,\, n$이 존재

$\Rightarrow A = E$

[좋은 예] $A^3 = A^5 = E \Rightarrow A = E$

(4) m과 n의 최대공약수가 d일 때, $A^m = A^n = E$

$\Rightarrow A^d = E$