수능특강 수학영역 기하

정답과 풀이

한눈에 보는 정답

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ② 4 ⑤ 5 ③
6 ②

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 ④ 5 ③
6 ③ 7 ① 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ① 4 ⑤ 5 ③
6 ① 7 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③ 2 ② 3 ④

02 타원

유제 본문 17~21쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 ④ 5 ①
6 ③

Level 1 기초 연습 본문 22~23쪽

1 ② 2 ① 3 ③ 4 ⑤ 5 20
6 ② 7 ③ 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 24~25쪽

1 ① 2 128 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ③

Level 3 실력 완성 본문 26쪽

1 ③ 2 ③ 3 250

03 쌍곡선

유제 본문 29~33쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ① 4 ② 5 ①
6 ②

Level 1 기초 연습 본문 34~35쪽

1 ④ 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ①
6 ② 7 ③ 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 36~37쪽

1 56 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 24
6 ④ 7 ③

Level 3 실력 완성 본문 38쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ⑤

04 벡터의 연산

유제 본문 41~45쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ②

Level 1 기초 연습 본문 46~47쪽

1 ⑤ 2 6 3 ② 4 ③ 5 ④
6 ⑤ 7 ④ 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 48~49쪽

1 ③ 2 ④ 3 ② 4 ④ 5 ②
6 ① 7 9 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 50~51쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 30 4 18 5 ①
6 ④

05 평면벡터의 성분과 내적

유제 본문 55~63쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ① 4 ② 5 ④
6 ⑤ 7 ① 8 ④ 9 ③ 10 ②

Level 1 기초 연습 본문 64~65쪽

1 ③ 2 ② 3 ⑤ 4 27 5 ⑤
6 84 7 ④ 8 ② 9 ② 10 ③

Level 2 기본 연습 본문 66~67쪽

1 18 2 ④ 3 ① 4 ③ 5 ⑤
6 ④ 7 ④ 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 68쪽

1 ④ 2 ② 3 ④

06 공간도형

유제 본문 71~77쪽

1 32 2 11 3 ② 4 ③

Level 1 기초 연습 본문 78~79쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ② 4 ⑤ 5 ①
6 ③ 7 ④

Level 2 기본 연습 본문 80~81쪽

1 ① 2 ③ 3 ② 4 ② 5 ④
6 ③ 7 ③

Level 3 실력 완성 본문 82~83쪽

1 ⑤ 2 ① 3 98 4 ⑤ 5 ③
6 ⑤

07 공간좌표

유제 본문 87~93쪽

1 ① 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 22
6 ② 7 ② 8 10

Level 1 기초 연습 본문 94~95쪽

1 ③ 2 ④ 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ① 7 ④ 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 96~97쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ② 4 6 5 ③
6 199

Level 3 실력 완성 본문 98~99쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 6 4 ④ 5 ④
6 ②

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ② 4 ⑤ 5 ③
6 ②

1 사각형 OQPR가 정사각형이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$ $(a>0)$이라 하면

$a^2=4a$

$a(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서 점 P의 좌표는 $(4,\ 4)$이고 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로

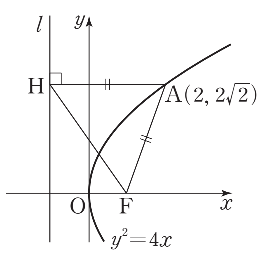
$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$

답 ④

2 점 $\mathrm{A}(2,\ 2\sqrt{2})$가 포물선 $y^2=ax$ 위의 점이므로

$(2\sqrt{2})^2=2a$

$a=4$



따라서 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 $\mathrm{H}(-1,\ 2\sqrt{2})$이고

$\overline{\mathrm{HF}}=\sqrt{(1+1)^2+(0-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}=3$

이므로 삼각형 AHF의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HF}}+\overline{\mathrm{AF}}=3+2\sqrt{3}+3=6+2\sqrt{3}$

답 ⑤

3 $y^2+4y=4x-10$에서 $(y+2)^2=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

포물선 $(y+2)^2=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 $(y+2)^2=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$의 초점의 좌표는

$\left(1+\dfrac{3}{2},\ 0-2\right)$, 즉 $\left(\dfrac{5}{2},\ -2\right)$

준선의 방정식은

$x-\dfrac{3}{2}=-1$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-2$, $c=\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b+c=\dfrac{5}{2}+(-2)+\dfrac{1}{2}=1$

답 ②

4 $y=\dfrac{1}{4}x+n$에서 $x=4y-4n$을 $y^2=6x$에 대입하면

$y^2=6(4y-4n)$, $y^2-24y+24n=0$ …… ㉠

직선과 포물선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 y에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-12)^2-24n>0$

$n<6$

따라서 구하는 모든 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 ⑤

5 $y^2=8x=4\times2\times x$이므로 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x+\dfrac{2}{3}$

$9x-3y+2=0$

따라서 $a=9$, $b=-3$이므로

$a+b=9+(-3)=6$

답 ③

6 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x-2)-1$ …… ㉠

㉠을 $x^2=4y$에 대입하면

$x^2=4\{m(x-2)-1\}$

$x^2-4mx+8m+4=0$ …… ㉡

직선과 포물선이 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=4m^2-8m-4=0,\ m^2-2m-1=0$

이때 m_1, m_2는 이차방정식 $m^2-2m-1=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1\times m_2=-1$

답 ②

다른 풀이

$x^2=4y=4\times1\times y$이므로 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx-m^2\times1$, 즉 $y=mx-m^2$

이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2m-m^2,\ m^2-2m-1=0$

이때 m_1, m_2는 이차방정식 $m^2-2m-1=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1\times m_2=-1$

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ④	5 ③
6 ③	7 ①	8 ④		

1 $y^2=4px$에서 $p=-2$이므로

$y^2=-8x$

포물선 $y^2=-8x$가 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$36=-8a$

따라서 $a=-\frac{9}{2}$

답 ②

2 포물선 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하고, 점 P에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-3,\ y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+3|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+1+y^2=x^2+6x+9$

$y^2-8x-8=0$

따라서 $a=-8,\ b=-8$이므로

$ab=(-8)\times(-8)=64$

답 ⑤

다른 풀이

포물선의 초점이 $F(1,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1-3}{2},\ 0\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$이고, 꼭짓점 $(-1,\ 0)$과 준선 $x=-3$ 사이의 거리가 2이므로 구하는 포물선의 방정식은

$y^2=4\times2(x+1)$

$y^2-8x-8=0$

따라서 $a=-8,\ b=-8$이므로

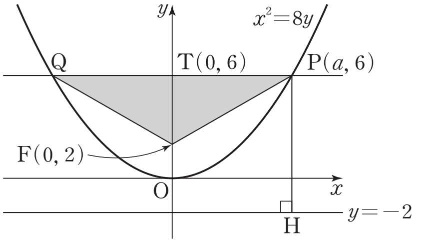
$ab=(-8)\times(-8)=64$

3 $x^2=8y=4\times2\times y$이므로 포물선 $x^2=8y$의 초점 F의 좌표는 $(0,\ 2)$이고 준선의 방정식은 $y=-2$이다.

점 P에서 준선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}=8$

이므로 점 P의 y좌표는 6이다.



직선 QP가 y축과 만나는 점을 T라 하면 점 T의 좌표는 $(0,\ 6)$이고 $\overline{TF}=4$

점 P는 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ 6)\ (a>0)$이라 하면

$a^2=48,\ a=4\sqrt{3}$

즉, $\overline{QP}=2\times\overline{TP}=2\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

따라서 삼각형 FPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{QP}\times\overline{TF}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times4$$
$$=16\sqrt{3}$$

답 ④

4 $y^2=12x=4\times3\times x$이므로 포물선 $y^2=12x$의 준선의 방정식은

$x=-3$ …… ㉠

$y^2-2y=4x+k$에서 $(y-1)^2=4\left(x+\frac{k+1}{4}\right)$

포물선 $(y-1)^2=4\left(x+\frac{k+1}{4}\right)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 $-\frac{k+1}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $(y-1)^2=4\left(x+\frac{k+1}{4}\right)$의 준선의 방정식은

$x+\frac{k+1}{4}=-1$

즉, $x=-\frac{k+5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$-\frac{k+5}{4}=-3$

따라서 $k=7$

답 ④

5 $y^2=8x=4\times2\times x$이므로 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x+\frac{2}{3}$ …… ㉠

직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=3(x-m)+2$

즉, $y=3x-3m+2$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$\frac{2}{3}=-3m+2$, $3m=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

따라서 $m=\frac{4}{9}$

답 ③

6 $2x-y+3=0$에서 $y=2x+3$

직선 $y=2x+3$과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

$y^2=12x=4\times3\times x$이므로 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{3}{2}$

따라서 $a=2$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

답 ③

7 $x^2=8y=4\times2\times y$이므로 포물선 $x^2=8y$의 초점 F의 좌표는 $(0, 2)$이다.

포물선 $x^2=8y$ 위의 점 $\mathrm{P}(4\sqrt{3}, 6)$에서의 접선의 방정식은

$4\sqrt{3}x=2\times2(y+6)$

$\sqrt{3}x-y-6=0$

따라서 이 접선과 초점 $\mathrm{F}(0, 2)$ 사이의 거리는

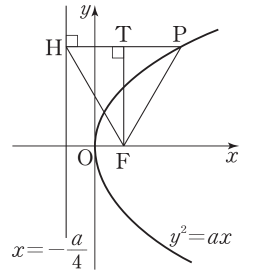
$\frac{|0-2-6|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{8}{2}=4$

답 ①

8 $y^2=ax=4\times\frac{a}{4}\times x$이므로 포물선 $y^2=ax$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}$이다.

이때 점 H의 x좌표는 $-\frac{a}{4}$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이고 $\angle\mathrm{HPF}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 PHF는 정삼각형이다.



$\overline{\mathrm{PH}}=k\ (k>0)$이라 하면 정삼각형 PHF의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}k^2=4\sqrt{3}$, $k^2=16$

$k>0$이므로 $k=4$

즉, 정삼각형 PHF의 한 변의 길이가 4이다.

이때 점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 T라 하면 선분 HT의 길이는 초점 F와 준선 사이의 거리와 같으므로

$\frac{a}{4}-\left(-\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}=2$

따라서 $a=4$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ②	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ③
6 ①	7 ⑤			

1 $y^2=4x$에 $y=2x+k$를 대입하면

$(2x+k)^2=4x$

$4x^2+4(k-1)x+k^2=0$ …… ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하고

P$(\alpha, 2\alpha+k)$, Q$(\beta, 2\beta+k)$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{5}(\alpha-\beta)=10$

$\alpha-\beta=2\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-k$, $\alpha\beta=\dfrac{k^2}{4}$

$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(1-k)^2-k^2}$

$=\sqrt{1-2k}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$2\sqrt{5}=\sqrt{1-2k}$

양변을 제곱하면

$20=1-2k$, $2k=-19$

따라서 $k=-\dfrac{19}{2}$

답 ②

2 초점이 F$_1(2, 0)$이고 꼭짓점이 원점 O인 포물선 P_1의 방정식은

$y^2=4\times2\times x$, 즉 $y^2=8x$ …… ㉠

초점이 F$_2(1, 0)$이고 꼭짓점이 F$_1(2, 0)$인 포물선 P_2의 방정식은

$y^2=4\times(-1)\times(x-2)$, 즉 $y^2=-4(x-2)$ …… ㉡

이때 포물선 P_2의 준선의 방정식은 $x=3$이다.

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$y^2=24$, 즉 $y=\pm2\sqrt{6}$

이므로 C$(3, 2\sqrt{6})$, D$(3, -2\sqrt{6})$

$x=0$을 ㉡에 대입하면

$y^2=8$, 즉 $y=\pm2\sqrt{2}$

이므로 A$(0, 2\sqrt{2})$, B$(0, -2\sqrt{2})$

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

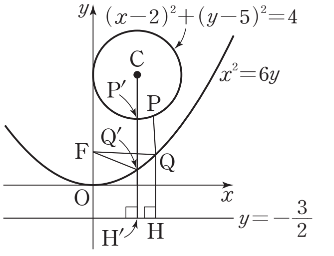
$\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}+4\sqrt{6})\times3=6(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

답 ⑤

3 $x^2=6y=4\times\dfrac{3}{2}\times y$이므로 포물선 $x^2=6y$의 초점 F의 좌표는 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$이고 준선의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{2}$이다.

원 $(x-2)^2+(y-5)^2=4$의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(2, 5)$이고 반지름의 길이는 2이다.

그림과 같이 두 점 Q, C에서 준선 $y=-\dfrac{3}{2}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고 선분 CH′이 원, 포물선과 만나는 점을 각각 P′, Q′이라 하자.



이때 포물선의 정의에 의하여

$\overline{FQ}=\overline{QH}$, $\overline{FQ'}=\overline{Q'H'}$

이고

$\overline{PQ}\ge\overline{CQ}-\overline{CP}=\overline{CQ}-\overline{CP'}$

원의 반지름의 길이가 2, 즉 $\overline{CP'}=2$이므로

$\overline{PQ}+\overline{FQ}\ge\overline{CQ}-\overline{CP'}+\overline{QH}$

$=(\overline{CQ}+\overline{QH})-\overline{CP'}$

$\ge\overline{CH'}-\overline{CP'}$

$=\left\{5-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right\}-2$

$=\dfrac{9}{2}$

따라서 점 P가 점 P′의 위치에 있고 점 Q가 점 Q′의 위치에 있을 때 $\overline{PQ}+\overline{FQ}$의 값이 최소이고, 이때의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

답 ①

4 초점이 F$(a, 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선이 점 A$(2, 4)$를 지나므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=|2-(-3)|=5$

$\sqrt{(a-2)^2+(0-4)^2}=5$

$(a-2)^2+16=25$, $(a-2)^2=9$

$a>0$이므로 $a=5$

즉, F$(5, 0)$

따라서 이 포물선 위의 한 점을 P(x, y)라 하고 점 P에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-3, y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=|x+3|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-10x+25+y^2=x^2+6x+9$

$y^2=16(x-1)$

점 $P_n(x_n, y_n)$에 대하여 $\overline{P_nF}=4^n+4$이므로

점 P_n에서 준선 $x=-3$에 이르는 거리는 4^n+4이다.

따라서 $x_n=(4^n+4)-3=4^n+1$이므로

$y_n{}^2=16(4^n+1-1)$

$\quad=4^{n+2}=2^{2n+4}=(2^{n+2})^2$

점 P_n은 제1사분면에 있으므로 $y_n>0$

즉, $y_n=2^{n+2}$이므로

$\sum_{n=1}^{6} y_n=\sum_{n=1}^{6} 2^{n+2}$

$=2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8$

$=\frac{2^3\times(2^6-1)}{2-1}$

$=2^9-8$

$=504$

답 ⑤

참고

주어진 포물선의 초점 $F(a, 0)$의 x좌표가 a이고 준선이 $x=-3$이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2}, 0\right)$이고, 꼭짓점과 준선 사이의 거리는

$\frac{a-3}{2}-(-3)=\frac{a+3}{2}$

이므로 이 포물선의 방정식은

$y^2=4\times\frac{a+3}{2}\left(x-\frac{a-3}{2}\right)$

$y^2=2(a+3)\left(x-\frac{a-3}{2}\right)$ …… ㉠

포물선 ㉠이 점 $A(2, 4)$를 지나므로

$16=2(a+3)\left(2-\frac{a-3}{2}\right)$

$16=(a+3)(7-a)$

$a^2-4a-5=0$

$(a-5)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=5$

따라서 포물선의 방정식은

$y^2=16(x-1)$

5 직선 $y=mx+n$이 두 포물선 $y^2=8x$, $x^2=4y$에 동시에 접하므로

$y=mx+n$과 $y^2=8x$를 연립하면

$(mx+n)^2=8x$

$m^2x^2+2(mn-4)x+n^2=0$ …… ㉠

직선이 포물선에 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이므로

$\frac{D_1}{4}=(mn-4)^2-m^2n^2=0$

$-8mn+16=0$

$mn=2$ …… ㉡

$y=mx+n$과 $x^2=4y$를 연립하면

$x^2=4(mx+n)$

$x^2-4mx-4n=0$ …… ㉢

직선이 포물선에 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=0$이므로

$\frac{D_2}{4}=(-2m)^2+4n=0$

$m^2+n=0$ …… ㉣

㉣에서 $n=-m^2$을 ㉡에 대입하면

$-m^3=2$

즉, $m^3=-2$이고

$n^3=(-m^2)^3=-m^6=-4$

따라서 $m^3+n^3=(-2)+(-4)=-6$

답 ③

다른 풀이

$y^2=8x=4\times2\times x$이므로 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{2}{m}$ …… ㉠

$x^2=4y=4\times1\times y$이므로 포물선 $x^2=4y$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx-m^2$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$\frac{2}{m}=-m^2$

즉, $m^3=-2$이고 $n=\frac{2}{m}$

따라서

$m^3+n^3=-2+\left(\frac{2}{m}\right)^3=-2+\frac{8}{m^3}$

$=-2+(-4)=-6$

6 $y^2=4x=4\times1\times x$이므로 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이다.

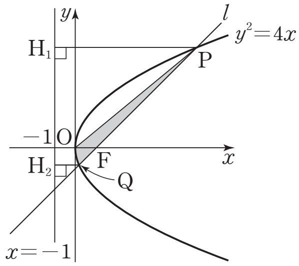
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2(x+1)$, 즉 $y=x+1$

이때 직선 l은 기울기가 1이고 초점 $F(1, 0)$을 지나므로

직선 l의 방정식은

$y=x-1$



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 방정식 $(x-1)^2=4x$, 즉 $x^2-6x+1=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$

두 점 P, Q에서 포물선 $y^2=4x$의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\overline{PF}+\overline{FQ}\\&=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}\\&=(\alpha+1)+(\beta+1)\\&=\alpha+\beta+2\\&=6+2=8\end{aligned}$$

원점 O와 직선 l : $x-y-1=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times d=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

답 ①

7 두 점 A$(-2, 6)$, B$(2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\dfrac{2-6}{2-(-2)}(x+2)$, 즉 $y=-x+4$

점 P가 포물선 $y^2=-4x$에 접하고 기울기가 -1인 직선과 포물선 $y^2=-4x$의 접점일 때, 삼각형 APB의 넓이가 최소가 된다.

$y^2=-4x=4\times(-1)\times x$이므로 포물선 $y^2=-4x$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x+\dfrac{-1}{-1}$, 즉 $y=-x+1$

점 A$(-2, 6)$과 직선 $y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+6-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(2-6)^2}=4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

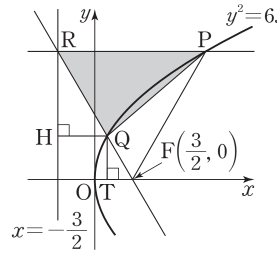
$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=6$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③　**2** ②　**3** ④

1 $y^2=6x=4\times\dfrac{3}{2}\times x$이므로 포물선 $y^2=6x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{3}{2}$이다.



점 Q에서 준선 $x=-\dfrac{3}{2}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{QF}=\overline{HQ}=2$

이므로 점 Q의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}$이다.

점 Q는 포물선 위의 제1사분면에 있는 점이므로

$y^2=6\times\dfrac{1}{2}=3$에서 $y=\sqrt{3}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$이다.

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 T라 하면 직각삼각형 QTF에서

$\overline{QT}=\sqrt{3}$, $\overline{TF}=1$, $\overline{FQ}=2$

이므로 $\angle QFT=\dfrac{\pi}{3}$이다.

직선 RP는 x축과 평행하므로 $\angle PRF=\angle QFT=\dfrac{\pi}{3}$

또 $\overline{FP}=\overline{FR}$이므로 $\angle RPF=\angle PRF=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 FPR는 정삼각형이다.

정삼각형 FPR에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}$이므로 점 R는 준선 위에 있고 초점 F에서 변 RP에 내린 수선의 발은 선분 RP를 이등분한다.

이때 초점 $\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$과 준선 $x=-\frac{3}{2}$ 사이의 거리가 3이므로

$\overline{\mathrm{RP}}=2\times3=6$

따라서 한 변의 길이가 6인 정삼각형 FPR의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$

이고

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{RF}}-\overline{\mathrm{QF}}=6-2=4$

이므로 삼각형 PRQ의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{4}{6}S_1=\frac{2}{3}\times9\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

답 ③

다른 풀이

위의 풀이에서 삼각형 FPR가 정삼각형임을 알 때, 다음과 같이 점 P의 좌표를 구하여 삼각형 PRQ의 넓이를 구할 수도 있다.

직선 PF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 직선 PF의 방정식은

$y=\tan\frac{\pi}{3}\times\left(x-\frac{3}{2}\right)$, 즉 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

이 식을 $y^2=6x$에 대입하면

$3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=6x$

$x^2-3x+\frac{9}{4}=2x$

$4x^2-20x+9=0$

$(2x-1)(2x-9)=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ 3\sqrt{3}\right)$이므로 정삼각형 FPR의 한 변의 길이는

$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}=6$

그러므로 삼각형 PRQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RP}}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{RF}}-\overline{\mathrm{QF}})\times\overline{\mathrm{RP}}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times(6-2)\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

2 $y^2-2y=4x-5$에서

$(y-1)^2=4(x-1)$

포물선 $(y-1)^2=4(x-1)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-1$이므로 포물선 $(y-1)^2=4(x-1)$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 1)$이고 준선의 방정식은 $x=0$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=5$이고 점 H의 좌표는 $(0,\ 5)$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$

$\angle\mathrm{HPF}=\theta$라 하면 삼각형 PHF에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{HF}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{5^2+5^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times5\times5}=\frac{3}{5}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

이때 삼각형 PHF의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{\mathrm{HF}}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$R=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

따라서 삼각형 PHF의 외접원의 넓이는

$\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2\pi=\frac{125}{16}\pi$

답 ②

3 $y^2=3x=4\times\frac{3}{4}\times x$이므로 포물선 $y^2=3x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$이고, 포물선 위의 점 P$(3,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$3y=2\times\frac{3}{4}(x+3)$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

이 접선이 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로

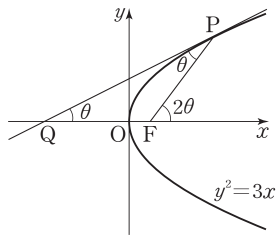
$\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{3}{4}-(-3)=\frac{15}{4}$

또한 $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-3\right)^2+(0-3)^2}=\frac{15}{4}$

즉, 삼각형 FPQ는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{QPF}=\angle\mathrm{PQF}=\theta$

이고 $\angle\mathrm{QFP}=\pi-2\theta$



이때 $\tan\theta$는 점 P에서의 접선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기와 같으므로

$\tan\theta=\frac{1}{2}$

이고 $\tan 2\theta$는 직선 PF의 기울기와 같으므로

$\tan 2\theta=\frac{0-3}{\frac{3}{4}-3}=\frac{4}{3}$

따라서 $\tan\theta+\tan 2\theta=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$

답 ④

02 타원

유제				본문 17~21쪽
1 ⑤	2 ④	3 ②	4 ④	5 ①
6 ③				

1 직선 $y=\frac{2}{3}x+2$의 x절편은 -3, y절편은 2이므로

F$(-3, 0)$, A$(0, 2)$

타원의 장축의 길이를 $2a$ $(a>0)$이라 하면

$(-3)^2=a^2-2^2$, $a^2=13$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{13}$

따라서 타원의 장축의 길이는

$2a=2\sqrt{13}$

답 ⑤

2 두 점 A$(2, 0)$, B$(-2, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 두 초점이 A, B이고 장축의 길이가 10인 타원이다.

이때 두 초점 A, B가 x축 위에 있으므로 이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.

$2a=10$에서 $a=5$

$2^2=a^2-b^2=5^2-b^2$에서 $b^2=21$

이므로 구하는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

따라서 $k=\frac{1}{25}$, $l=\frac{1}{21}$이므로

$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=25+21=46$

답 ④

3 $3x^2+2y^2-6x+12y+9=0$에서

$3(x^2-2x+1)+2(y^2+6y+9)=12$

$3(x-1)^2+2(y+3)^2=12$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{6}=1$ …… ㉠

타원 ㉠은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축

의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 타원 ㉠의 두 초점 사이의 거리는 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점 사이의 거리와 같다.

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표가

$(0, \sqrt{6-4})$, $(0, -\sqrt{6-4})$, 즉 $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$이므로 타원 ㉠의 두 초점 사이의 거리는

$\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

답 ②

4 $y=\sqrt{3}x+k$를 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{10}+\frac{(\sqrt{3}x+k)^2}{5}=1$

$x^2+2(\sqrt{3}x+k)^2=10$

$7x^2+4\sqrt{3}kx+2k^2-10=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

타원과 직선이 서로 만나지 않으려면 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\sqrt{3}k)^2-7(2k^2-10)<0$

$12k^2-14k^2+70<0$

$k^2-35>0$

$(k+\sqrt{35})(k-\sqrt{35})>0$

$k<-\sqrt{35}$ 또는 $k>\sqrt{35}$

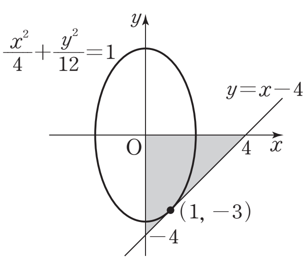
따라서 양의 정수 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

5 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{1\times x}{4}+\frac{(-3)\times y}{12}=1$

$y=x-4$



직선 $y=x-4$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4, 0)$, $(0, -4)$이므로 직선 $y=x-4$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

답 ①

6 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{5\times1+3}$, 즉 $y=x\pm2\sqrt{2}$

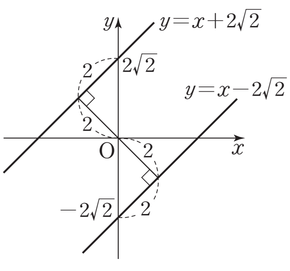
두 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, $y=x-2\sqrt{2}$ 사이의 거리 d는 직선 $y=x+2\sqrt{2}$ 위의 한 점 $(0, 2\sqrt{2})$와 직선 $y=x-2\sqrt{2}$, 즉 $x-y-2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{|0-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

답 ③

참고

그림에서 직각이등변삼각형의 변의 길이의 비를 이용하면 두 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, $y=x-2\sqrt{2}$ 사이의 거리가 4임을 알 수 있다.



Level 1 기초 연습 본문 22~23쪽

1 ②	2 ①	3 ③	4 ⑤	5 20
6 ②	7 ③	8 ①		

1 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$이므로 이 타원의

장축의 길이는 $2\times6=12$

단축의 길이는 $2\times4=8$

따라서 장축의 길이와 단축의 길이의 합은 20이다.

답 ②

2 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면

$k=2a$, $l=2b$ (단, $k>l>0$) $\cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$이 타원의 초점이므로

$4^2=a^2-b^2$ …… ㉡

㉠에서 $a=\frac{k}{2}$, $b=\frac{l}{2}$을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2=16$

$k^2-l^2=64$

$(k+l)(k-l)=64$

이때 $k+l=20$이므로

$k-l=\frac{64}{20}=\frac{16}{5}$

답 ①

3 타원 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{25}=1$에서 두 초점 F, F′은 y축 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=2\times5=10$

삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}+\overline{\text{FF}'}=10+\overline{\text{FF}'}=16$

$\overline{\text{FF}'}=6$

즉, $\text{F}(0,\ 3)$, $\text{F}'(0,\ -3)$이므로

$25-k=9$

따라서 $k=16$

답 ③

4 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{10}=1$의 두 초점을

$\text{F}(c,\ 0)$, $\text{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-10=15$에서 $c=\sqrt{15}$이므로

$\text{F}(\sqrt{15},\ 0)$, $\text{F}'(-\sqrt{15},\ 0)$

$\overline{\text{PF}}=p$, $\overline{\text{PF}'}=q$ $(p>q>0)$이라 하면

타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times5=10$ …… ㉠

$\overline{\text{FF}'}=2\sqrt{15}$, $\angle\text{FPF}'=90°$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$p^2+q^2=60$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)$

$=10^2-60=40$

$pq=20$

$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$

$=100-80=20$

$p>q$이므로

$p-q=2\sqrt{5}$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉢에서

$\overline{\text{PF}}^2-\overline{\text{PF}'}^2=p^2-q^2$

$=(p+q)(p-q)$

$=10\times2\sqrt{5}$

$=20\sqrt{5}$

답 ⑤

5 타원과 원의 교점 A, B, C, D에 대하여 두 점 A와 D, 두 점 B와 C는 각각 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\text{FC}}=\overline{\text{BF}'}$, $\overline{\text{FD}}=\overline{\text{AF}'}$

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$의 장축의 길이는 $2\times5=10$이므로

타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{FA}}+\overline{\text{FB}}+\overline{\text{FC}}+\overline{\text{FD}}=(\overline{\text{FA}}+\overline{\text{FD}})+(\overline{\text{FB}}+\overline{\text{FC}})$

$=(\overline{\text{FA}}+\overline{\text{AF}'})+(\overline{\text{FB}}+\overline{\text{BF}'})$

$=10+10$

$=20$

답 20

6 직선 $y=mx+5$가 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하므로

$y=mx+5$를 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면

$5x^2+4(mx+5)^2=20$

$(4m^2+5)x^2+40mx+80=0$ …… ㉠

직선이 타원에 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(20m)^2-(4m^2+5)\times80=0$

$5m^2-(4m^2+5)=0$

$m^2=5$

$m>0$이므로 $m=\sqrt{5}$

답 ②

다른 풀이

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{4m^2+5}$

직선 $y=mx+5$가 한 접선이므로

$\sqrt{4m^2+5}=5$

$4m^2+5=25$

$m^2=5$

$m>0$이므로 $m=\sqrt{5}$

7 (i) $y=x$를 $\frac{(x-a)^2}{4}+(y-b)^2=1$에 대입하면

$(x-a)^2+4(x-b)^2=4$

$5x^2-2(a+4b)x+a^2+4b^2-4=0$ …… ㉠

타원과 직선이 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이므로

$\frac{D_1}{4}=\{-(a+4b)\}^2-5(a^2+4b^2-4)=0$

$a^2-2ab+b^2=5$ …… ㉡

(ii) $y=-x$를 $\frac{(x-a)^2}{4}+(y-b)^2=1$에 대입하면

$(x-a)^2+4(-x-b)^2=4$

$5x^2-2(a-4b)x+a^2+4b^2-4=0$ …… ㉢

타원과 직선이 접할 때, x에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=0$이므로

$\frac{D_2}{4}=\{-(a-4b)\}^2-5(a^2+4b^2-4)=0$

$a^2+2ab+b^2=5$ …… ㉣

㉡+㉣을 하면

$2(a^2+b^2)=10$

따라서 $a^2+b^2=5$

답 ③

8 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\times x}{6}+\frac{1\times y}{3}=1$

$y=-x+3$

이 접선이 점 $(-5, k)$를 지나므로

$k=-(-5)+3=8$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 24~25쪽

1 ①	**2** 128	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** ②
6 ②	**7** ③			

1 타원 $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{10}=1$의 두 초점의 좌표를 각각

$(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=14-10=4$에서 $c=2$

이므로 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$은 타원의 초점이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{PA}+\overline{PB}=2\times\sqrt{14}=2\sqrt{14}$

이고 $\sqrt{14}-2\le\overline{PA}\le\sqrt{14}+2$이다.

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PA}\times(2\sqrt{14}-\overline{PA})$

$=-(\overline{PA}-\sqrt{14})^2+14$

이므로 $\sqrt{14}-2\le\overline{PA}\le\sqrt{14}+2$에서 $\overline{PA}\times\overline{PB}$는

$\overline{PA}=\sqrt{14}$일 때 최댓값 $M=14$,

$\overline{PA}=\sqrt{14}-2$ 또는 $\overline{PA}=\sqrt{14}+2$일 때 최솟값 $m=10$

을 갖는다.

따라서 $M+m=14+10=24$

답 ①

2 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점이므로

$c^2=a^2-4$ …… ㉠

직선 $y=\frac{1}{2}x$가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$과 만나는 점 P의 좌표를 $(2k, k)$ $(k>0)$이라 하면

$\frac{4k^2}{a^2}+\frac{k^2}{4}=1$ …… ㉡

두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로 사각형 $PF'QF$는 평행사변형이다.

이때 이 사각형의 넓이가 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이므로

$2\times\frac{1}{2}\times 2c\times k=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$k=\frac{4\sqrt{3}}{3c}$

$k^2=\frac{16}{3c^2}$이므로 ㉡에 대입하면

$\frac{64}{3a^2c^2}+\frac{4}{3c^2}=1$

$c^2=\frac{64}{3a^2}+\frac{4}{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{64}{3a^2}+\frac{4}{3}=a^2-4$

$3a^4-16a^2-64=0$

$(3a^2+8)(a^2-8)=0$

$a>2$이므로 $a^2=8$, $a=2\sqrt{2}$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$이고 장축의 길이는

$2a=4\sqrt{2}$

두 점 P, Q는 타원 위의 점이므로 평행사변형 $PF'QF$의 둘레의 길이 l은 타원의 정의에 의하여

$l=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{FP}}$

$=(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}})$

$=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}$

따라서 $l^2=128$

답 128

참고

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 두 초점 F, F′도 원점에 대하여 대칭이므로

$\triangle\mathrm{POF}\equiv\triangle\mathrm{QOF'}$ (SAS 합동)이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$이고 두 직선 PF, QF′은 평행하므로 사각형 PF′QF는 평행사변형이다.

3 주어진 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ ······ ㉠

이라 하면 사각형 AF′BF가 정사각형이므로

$\mathrm{A}(0, b)$, $\mathrm{B}(0, -b)$, $\mathrm{F'}(-b, 0)$, $\mathrm{F}(b, 0)$

따라서 $b^2=a^2-b^2$에서

$a^2=2b^2$

이므로 ㉠에 대입하면

$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

이 타원이 점 P(3, 2)를 지나므로

$\frac{9}{2b^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$2b^2=17$

따라서 장축의 길이는

$2a=2\sqrt{2b^2}=2\sqrt{17}$

답 ⑤

4 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을

$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=36-20=16$에서 $c=4$이므로

$\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F'}(-4, 0)$이고

$\overline{\mathrm{F'F}}=8$

초점 F에서 선분 F′P에 내린 수선의 발 H가 선분 F′P의 중점이므로 삼각형 FPF′은 $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 이등변삼각형이다.

즉, $\overline{\mathrm{PF}}=8$

또한 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times6=12$

이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=12-\overline{\mathrm{PF}}=12-8=4$

직각삼각형 FHF′에서

$\overline{\mathrm{F'H}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'P}}=\frac{1}{2}\times4=2$

이므로

$\overline{\mathrm{FH}}^2=\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{F'H}}^2=8^2-2^2=60$

$\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{15}$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'P}}\times\overline{\mathrm{FH}}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{15}=4\sqrt{15}$

답 ⑤

5 점 P$(-3, 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m인 타원의 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{5m^2+1}$

이 접선이 점 P$(-3, 0)$을 지나므로

$0=-3m\pm\sqrt{5m^2+1}$

$3m=\pm\sqrt{5m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2=5m^2+1$

$4m^2=1$

즉, $m=\pm\frac{1}{2}$

따라서 두 접선 l_1, l_2의 방정식은

l_1: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, l_2: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

한편, 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$의 두 초점을

$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=5-1=4$에서 $c=2$

즉, F(2, 0)이므로 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l_1과 만나는 점 A의 좌표는 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$이고, 직선 l_2와 만나는 점 B의 좌표는 $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$이다.

따라서 삼각형 APB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$

답 ②

6 (i) 직선 $y=mx+4$와 원 $x^2+y^2=1$이 만나지 않을 때

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx+4$, 즉 $mx-y+4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 커야 하므로

$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1$

$\sqrt{m^2+1}<4$

$m^2+1<16$

$m^2-15<0$

$(m+\sqrt{15})(m-\sqrt{15})<0$

$-\sqrt{15}<m<\sqrt{15}$

(ii) 직선 $y=mx+4$와 타원 $x^2+2y^2=4$가 서로 다른 두 점에서 만날 때

$y=mx+4$를 $x^2+2y^2=4$에 대입하여 정리하면

$x^2+2(mx+4)^2=4$

$(2m^2+1)x^2+16mx+28=0$ ⋯⋯ ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=64m^2-28(2m^2+1)>0$

$8m^2-28>0$

$\left(m+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\left(m-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)>0$

$m<-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{14}}{2}$

(i), (ii)에서

$-\sqrt{15}<m<-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $\frac{\sqrt{14}}{2}<m<\sqrt{15}$

따라서 구하는 정수 m은 -3, -2, 2, 3이고, 그 개수는 4이다.

답 ②

다른 풀이

위의 풀이에서 (i)의 경우에 m의 값의 범위를 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) 직선 $y=mx+4$와 원 $x^2+y^2=1$이 만나지 않을 때

$y=mx+4$를 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2+(mx+4)^2=1$

$(m^2+1)x^2+8mx+15=0$ ⋯⋯ ㉡

x에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=16m^2-15(m^2+1)<0$

$m^2-15<0$

$(m+\sqrt{15})(m-\sqrt{15})<0$

$-\sqrt{15}<m<\sqrt{15}$

7 타원 $ax^2+by^2=24$ $(a>0,\ b>0)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$ax+2by=24$

접선의 기울기가 -2이므로

$-\frac{a}{2b}=-2$

즉, $a=4b$ ⋯⋯ ㉠

점 $(1,\ 2)$는 타원 $ax^2+by^2=24$ 위의 점이므로

$a+4b=24$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=12$, $b=3$

따라서 타원 $12x^2+3y^2=24$, 즉 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표는 $(0,\ -\sqrt{6})$, $(0,\ \sqrt{6})$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 ③ **2** ③ **3** 250

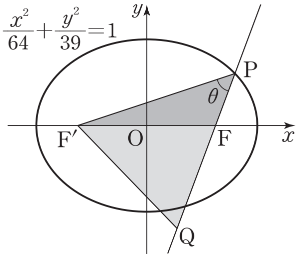
1 $S_1 : S_2=1 : 2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{FQ}}=1 : 2$

$\overline{\mathrm{PF}}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{FQ}}=2k$이고

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}}$

$=k+2k=3k$



타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=3k+k=4k$

$=2\sqrt{64}=16$

이므로 $k=4$

타원의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=64-39=25$에서 $c=5$이므로

$F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$이고

$\overline{F'F}=10$

삼각형 $PF'F$에서 $\angle F'PF=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2-\overline{F'F}^2}{2\times\overline{PF'}\times\overline{PF}}$$

$$=\frac{12^2+4^2-10^2}{2\times12\times4}=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{39}}{8}$$

따라서 S_1+S_2는 삼각형 $PF'Q$의 넓이와 같으므로

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{PQ}\times\sin\theta$$

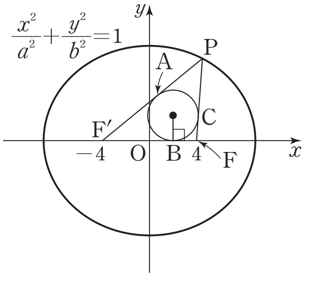
$$=\frac{1}{2}\times12\times12\times\frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$=9\sqrt{39}$$

답 ③

2 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$이므로

$a^2-b^2=16$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠



그림과 같이 삼각형 $PF'F$에 내접하는 원과 세 변의 접점을 각각 A, B, C라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=2a$이므로

$(\overline{PA}+\overline{AF'})+(\overline{PC}+\overline{CF})=2a$

이때 $\overline{PA}=\overline{PC}$, $\overline{AF'}=\overline{F'B}$, $\overline{CF}=\overline{BF}$이므로

$(\overline{PC}+\overline{F'B})+(\overline{PC}+\overline{BF})=2a$

$2\overline{PC}+\overline{F'F}=2a$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

삼각형 $PF'F$에 내접하는 원의 중심의 x좌표가 2이므로 점 B의 x좌표도 2이다.

$\overline{BF}=\overline{OF}-\overline{OB}=4-2=2$

$\overline{PC}=\overline{PF}-\overline{CF}$이고 $\overline{CF}=\overline{BF}$이므로 ㉡에서

$2a=2\overline{PC}+\overline{F'F}$

$\quad=2(\overline{PF}-\overline{CF})+\overline{F'F}$

$\quad=2\times(7-2)+8=18$

$a=9$

㉠에서

$b^2=a^2-16=81-16=65$

따라서 $a^2+b^2=81+65=146$

답 ③

3 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이고,

두 초점은 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$이다.

$y^2=8x=4\times2\times x$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

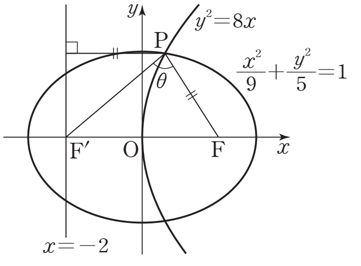
$y^2=8x$를 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{9}+\frac{8x}{5}=1$

$5x^2+72x-45=0$

$(5x-3)(x+15)=0$

점 P는 제1사분면에 있는 점이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{3}{5}$이다.



포물선의 정의에 의하여 점 P에서 준선 $x=-2$에 이르는 거리는 선분 PF의 길이와 같으므로

$\overline{PF}=2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF'}+\overline{PF}=6$이므로

$\overline{PF'}+\frac{13}{5}=6$

$\overline{PF'}=\frac{17}{5}$

또한 $\overline{F'F}=4$이므로 삼각형 $PF'F$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2-\overline{F'F}^2}{2\times\overline{PF'}\times\overline{PF}}$$

$$=\frac{\left(\frac{17}{5}\right)^2+\left(\frac{13}{5}\right)^2-4^2}{2\times\frac{17}{5}\times\frac{13}{5}}=\frac{29}{221}$$

따라서 $p=221$, $q=29$이므로

$p+q=221+29=250$

답 250

다른 풀이

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이고,
두 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이다.
$y^2=8x=4\times2\times x$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
$y^2=8x$를 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면

$$\frac{x^2}{9}+\frac{8x}{5}=1$$

$$5x^2+72x-45=0$$

$$(5x-3)(x+15)=0$$

점 P는 제1사분면에 있는 점이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{3}{5}$이다.
즉, $\mathrm{P}\left(\frac{3}{5},\ \sqrt{\frac{24}{5}}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{5}\right)^2+\left(0-\sqrt{\frac{24}{5}}\right)^2}=\frac{13}{5}$$

$$\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{\left(-2-\frac{3}{5}\right)^2+\left(0-\sqrt{\frac{24}{5}}\right)^2}=\frac{17}{5}$$

또한 $\overline{\mathrm{F'F}}=4$이므로 삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PF}'}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{F'F}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PF}'}\times\overline{\mathrm{PF}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{17}{5}\right)^2+\left(\frac{13}{5}\right)^2-4^2}{2\times\frac{17}{5}\times\frac{13}{5}}=\frac{29}{221}$$

따라서 $p=221$, $q=29$이므로
$p+q=221+29=250$

03 쌍곡선

유제				본문 29~33쪽
1 ⑤	2 ③	3 ①	4 ②	5 ①
6 ②				

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을
$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면
$c^2=11+5=16$에서 $c=4$이므로
$\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이다.
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 두 초점 F, F′으로부터의 거리의 차가 4이므로
$2a=4$
$a=2$
한편, $b^2=c^2-a^2=4^2-2^2=12$
$b>0$이므로 $b=2\sqrt{3}$
따라서 $ab=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

답 ⑤

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 P에서 두 초점 F, F′까지의 거리의 차가 $2\times3=6$으로 일정하므로
$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=6$ …… ㉠
$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF}'}=1:2$에서
$\overline{\mathrm{PF}'}=2\overline{\mathrm{PF}}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\overline{\mathrm{PF}}=6$, $\overline{\mathrm{PF}'}=12$
$\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면
$c^2=10+9=19$에서 $c=\sqrt{19}$이므로
$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{19})$, $\mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{19})$이고
$\overline{\mathrm{FF}'}=2\sqrt{19}$
따라서 삼각형 PFF'에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{FF}'}^2}{2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF}'}}$$

$$=\frac{36+144-76}{2\times6\times12}$$

$$=\frac{13}{18}$$

답 ③

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$의 한 초점 F의 좌표를 $(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=6+3=9$에서 $c=3$

또한 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x$, 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

이때 기울기가 양수인 한 점근선 l의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$\sqrt{2}x-2y=0$

따라서 점 $\mathrm{F}(3, 0)$과 점근선 l 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{2}\times3-2\times0|}{\sqrt{2+4}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$

답 ①

4 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{5}=1$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$x^2-\frac{(y-k)^2}{5}=1$ …… ㉠

$y=3x+1$에서

$x=\frac{y-1}{3}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(y-k)^2}{5}=1$

$5(y^2-2y+1)-9(y^2-2ky+k^2)=45$

$4y^2+2(5-9k)y+9k^2+40=0$ …… ㉢

직선과 쌍곡선 ㉠이 서로 다른 두 점에서 만나려면 y에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(5-9k)^2-4(9k^2+40)>0$

$25-90k+81k^2-36k^2-160>0$

$45k^2-90k-135>0$

$k^2-2k-3>0$

$(k-3)(k+1)>0$

$k<-1$ 또는 $k>3$

따라서 양의 정수 k의 최솟값은 4이다.

답 ②

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{3}-\frac{2y}{2}=1$

$y=x-1$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -1이다.

답 ①

6 직선 $y=3x+4$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5a^2}=1$에 접하므로

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5a^2}=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{9a^2-5a^2}$, 즉 $y=3x\pm|2a|$

$a>0$이므로 $|2a|=4$에서 $a=2$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times2=4$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 34~35쪽

1 ④	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ①
6 ②	7 ③	8 ④		

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a=6$

$a=3$

두 초점이 $\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F'}(-4, 0)$이므로

$b^2=4^2-3^2=7$

따라서 $3a^2+b^2=3\times9+7=34$

답 ④

2 쌍곡선의 정의에 의하여 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}$와 같으므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}&=\sqrt{(4-0)^2+(5+3)^2}-\sqrt{(4-0)^2+(5-3)^2}\\&=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$이고 점 $\mathrm{P}(4,\ 5)$를 지나는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=3^2$ …… ㉠

쌍곡선이 점 $\mathrm{P}(4,\ 5)$를 지나므로

$\frac{16}{a^2}-\frac{25}{b^2}=-1$

$16b^2-25a^2=-a^2b^2$ …… ㉡

㉠에서 $b^2=9-a^2$이므로 ㉡에 대입하면

$16(9-a^2)-25a^2=-a^2(9-a^2)$

$a^4+32a^2-144=0$

$(a^2-4)(a^2+36)=0$

$a^2>0$이므로 $a^2=4$

이 값을 ㉠에 대입하면

$b^2=9-a^2=5,\ b=\sqrt{5}$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2b=2\sqrt{5}$

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=8,\ \overline{\mathrm{QF}'}-\overline{\mathrm{QF}}=8$이므로

$(\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{QF}'})-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}})=16$ …… ㉠

삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 둘레의 길이가 40이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{QF}'}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=40$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$2(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}})=24$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=12$

답 ①

4 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이는 $2\times5=10$이고

$\overline{\mathrm{PF}}=2k\ (k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}'}:\overline{\mathrm{PF}}=3:2$에서

$\overline{\mathrm{PF}'}=3k$

이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=3k-2k$

$=k=10$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=20,\ \overline{\mathrm{PF}'}=30$이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2=30^2-20^2=500$

답 ⑤

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x,\ y=-\frac{3}{4}x$

두 점 P, Q는 두 점근선과 직선 $y=2$가 만나는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{8}{3},\ 2\right),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{8}{3},\ 2\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times2=\frac{16}{3}$

답 ①

6 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{b}{3}x$

이므로 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{b}{3}(x-a)$ …… ㉠

직선 $2x-3y-4=0$이 한 점근선이므로

$y=\frac{2}{3}(x-2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b>0$이므로

$a=2,\ b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ②

7 직선 $y=2x+3$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a}=1$에 접하므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{4\times2^2-a}$, 즉 $y=2x\pm\sqrt{16-a}$

이때 $\sqrt{16-a}=3$이므로

$16-a=9$

$a=7$

따라서 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{4+7},\ 0),\ (-\sqrt{4+7},\ 0)$, 즉 $(\sqrt{11},\ 0),\ (-\sqrt{11},\ 0)$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{11}$이다.

답 ③

8 쌍곡선 $x^2-y^2=3$의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$ …… ㉠

쌍곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$2x+y=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

두 직선 $y=x$, $y=-2x+3$의 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$

두 직선 $y=-x$, $y=-2x+3$의 교점의 좌표는 $(3,\ -3)$

두 점근선 $y=x$, $y=-x$는 서로 수직이므로 삼각형 AOB는 $\angle\mathrm{AOB}=90°$인 직각삼각형이다.

이때 선분 AB는 원점 O와 두 점 A, B를 지나는 원의 지름이므로 이 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(3-1)^2+(-3-1)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{20}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는 5π이다.

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 36~37쪽

1 56	**2** ②	**3** ③	**4** ⑤	**5** 24
6 ④	**7** ③			

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점은

$\mathrm{F}(\sqrt{16+20},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{16+20},\ 0)$

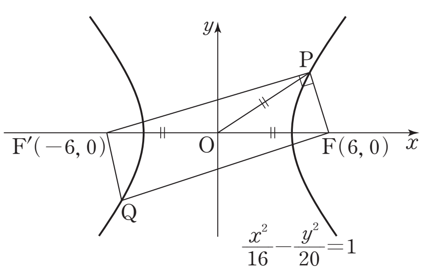
즉, $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=12$

삼각형 OFP가 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OP}}$인 이등변삼각형이고

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF'}}$

이므로 세 점 P, F, F′은 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위에 있다. 즉, 원의 중심각과 원주각의 크기의 관계에 의하여 삼각형 FPF′은 $\angle\mathrm{F'PF}=90°$인 직각삼각형이다.



$\overline{\mathrm{PF'}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}}=b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$a-b=2\times4=8$ …… ㉠

이고 삼각형 FPF′은 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=144$ …… ㉡

㉠에서 $b=a-8$이므로 ㉡에 대입하면

$a^2+(a-8)^2=144$

$a^2-8a-40=0$

$a>0$이므로 $a=4+2\sqrt{14}$

즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=4+2\sqrt{14}$

한편, 삼각형 FF′Q는 $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FQ}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=12$

이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{QF'}}=2\times4=8$

이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}=4$

따라서 $(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{F'Q}})^2=\{(4+2\sqrt{14})-4\}^2=56$

답 56

2 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 초점 F의 x좌표를 c라 하면

$c=\sqrt{1+3}=2$, 즉 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

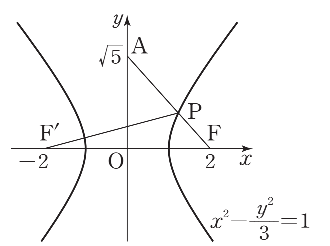
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\times1=2$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PA}}&=(\overline{\mathrm{PF}}+2)+\overline{\mathrm{PA}}=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}})+2\\&\ge\overline{\mathrm{AF}}+2=\sqrt{\overline{\mathrm{OF}}^2+\overline{\mathrm{OA}}^2}+2\\&=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}+2=5\end{aligned}$$

이때 등호는 점 P가 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$과 직선 AF의 교점일 때 성립한다.

그러므로 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소일 때는 세 점 A, P, F가 한 직선 위에 있을 때이다.



그림과 같이 세 점 A, P, F가 한 직선 위에 있을 때, 삼각형 PF′F에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=p$라 하면

$\overline{PF}=p-2$

$\overline{PF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{F'F}^2-2\times\overline{PF}\times\overline{F'F}\times\cos(\angle PFF')$

$p^2=(p-2)^2+4^2-2\times(p-2)\times4\times\cos(\angle AFO)$

$0=-4\left\{p-5+2(p-2)\times\frac{2}{3}\right\}$

$\frac{7}{3}p-\frac{23}{3}=0,\ p=\frac{23}{7}$

따라서 $\overline{PF'}=\frac{23}{7}$

답 ②

3 점 A$(a,\ 0)$은 쌍곡선의 한 꼭짓점이므로 이 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b=\sqrt{c^2-a^2})$

이라 하자.

조건 (가)에서 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2\overline{AF}$이고

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$2\overline{AF}=2a$에서 $\overline{AF}=a$

그러므로 $\overline{OF}=2a,\ \overline{FF'}=4a$

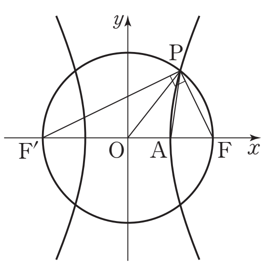
조건 (가)에서 $\overline{OP}=\overline{OF}=\overline{OF'}$이므로 세 점 F, P, F′은 원점 O를 중심으로 하고 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

따라서 $\angle FPF'=90°$이므로

직각삼각형 FPF′에서

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=\overline{FF'}^2$

$=(4a)^2=16a^2$



$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{OF}=\frac{1}{4}\overline{FF'}$이므로

조건 (나)에서

(삼각형 OAP의 넓이)

$=\frac{1}{4}\times$(삼각형 FPF′의 넓이)$=\frac{3}{2}$

즉, 직각삼각형 FPF′의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=6$에서

$\overline{PF}\times\overline{PF'}=12$

$(2a)^2=(\overline{PF'}-\overline{PF})^2=\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2-2\times\overline{PF'}\times\overline{PF}$이므로

$4a^2=16a^2-2\times12$

$12a^2=24,\ a^2=2$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

$c=2a=2\sqrt{2}$

따라서 $a+c=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

답 ③

4 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

직선 l은 기울기가 2이고 점 P를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-b=2(x-a)$, 즉 $y=2x-2a+b$

직선 l과 직선 $x=1$이 만나는 점 Q의 x좌표가 1이므로 y좌표를 구하면

$y=2\times1-2a+b=-2a+b+2$

즉, Q$(1,\ -2a+b+2)$

$2\overline{OP}=\overline{PQ}$에서 $4\overline{OP}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$4a^2+4b^2=(1-a)^2+(-2a+2)^2$

$a^2-4b^2-10a+5=0,\ (a-5)^2-4b^2=20$

$\frac{(a-5)^2}{20}-\frac{b^2}{5}=1$

따라서 점 P$(a,\ b)$는 쌍곡선 $\frac{(x-5)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점이다.

쌍곡선 $\frac{(x-5)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$이므로 쌍곡선 $\frac{(x-5)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-5+5,\ 0)$, $(5+5,\ 0)$, 즉 O$(0,\ 0)$, A$(10,\ 0)$이다.

따라서 점 P는 쌍곡선 $\frac{(x-5)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점이고 두 점 O, A는 이 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{OP}-\overline{AP}|=2\times\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

답 ⑤

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 초점 F의 좌표를 $(c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=4+12=16$에서 $c=\sqrt{16}=4$

즉, F$(4,\ 0)$, F′$(-4,\ 0)$이므로 $\overline{FF'}=8$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{4\times2^2-12}$, 즉 $y=2x\pm2$

이때 점 A는 제1사분면에 있는 점이므로 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=2x-2$

점 A의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$이라 하면

점 A$(a,\ b)$는 직선 $y=2x-2$ 위의 점이므로

$b=2a-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $\mathrm{A}(a, b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{4}-\frac{(2a-2)^2}{12}=1$

$3a^2-4(a-1)^2=12$

$a^2-8a+16=0$

$(a-4)^2=0$, $a=4$

㉠에서 $b=2\times4-2=6$

즉, $\mathrm{A}(4, 6)$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=6$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2\times2$에서

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+4=6+4=10$

따라서 삼각형 $\mathrm{AF'F}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{AF}}=10+8+6=24$

답 24

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$

이때 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$이므로 이 점근선에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.

기울기가 $\frac{3}{4}$이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x\pm\sqrt{4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2}$, 즉 $y=\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{2}$

(i) 점 $(a, 0)$과 직선 $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$, 즉 $3x-4y+2=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3a+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

$|3a+2|=5$

$3a+2=5$에서 $a=1$, $3a+2=-5$에서 $a=-\frac{7}{3}$

(ii) 점 $(a, 0)$과 직선 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$, 즉 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3a-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

$|3a-2|=5$

$3a-2=5$에서 $a=\frac{7}{3}$, $3a-2=-5$에서 $a=-1$

(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은

$1+\frac{7}{3}=\frac{10}{3}$

답 ④

7 점 P는 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$이 제2사분면에서 만나는 점이므로

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$에서 $y^2=x^2-2$ …… ㉠

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$에서 $y^2=-\frac{1}{2}x^2+4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x^2-2=-\frac{1}{2}x^2+4$

$x^2=4$, $x=\pm2$

㉠에 대입하면

$y^2=x^2-2=2$, $y=\pm\sqrt{2}$

이때 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 $\mathrm{P}(-2, \sqrt{2})$

그러므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(-2, \sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{-2x}{2}-\frac{\sqrt{2}y}{2}=1$, $y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$

한편, 쌍곡선 $(x-m)^2-\frac{(y+2\sqrt{2})^2}{n}=1$의 모든 점근선은 쌍곡선의 중심 $(m, -2\sqrt{2})$를 지나고 직선 $y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$가 쌍곡선의 한 점근선이므로

$-\sqrt{2}m-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$에서 $m=1$

쌍곡선 $(x-m)^2-\frac{(y+2\sqrt{2})^2}{n}=1$의 점근선의 기울기는 $\pm\sqrt{n}$이므로

$-\sqrt{n}=-\sqrt{2}$에서 $n=2$

따라서 $m+n=1+2=3$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 38쪽

1 ⑤ **2** ③ **3** ⑤

1 초점 F의 x좌표는 $c=\sqrt{1+24}=5$이므로

$\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F'}(-5, 0)$, $\overline{\mathrm{FF'}}=10$

점 P는 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점이고 주축의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=l+2$이다.

직각삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서

$10^2=l^2+(l+2)^2$

$l^2+2l-48=0$

$(l+8)(l-6)=0$

$l>0$이므로 $l=6$

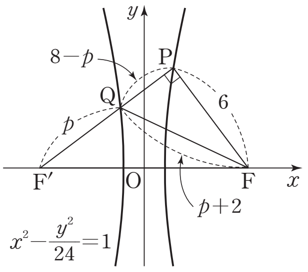
즉, $\overline{PF}=6$, $\overline{PF'}=8$

$\overline{QF'}=p$라 하면

$\overline{QP}=\overline{PF'}-\overline{QF'}=8-p$

점 Q는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$ 위의 제2사분면에 있는 점이므로 $\overline{QF}-\overline{QF'}=2$에서

$\overline{QF}=\overline{QF'}+2=p+2$



직각삼각형 PQF에서

$\overline{QF}^2=\overline{QP}^2+\overline{PF}^2$

$(p+2)^2=(8-p)^2+6^2$

$20p=96$, $p=\dfrac{24}{5}$

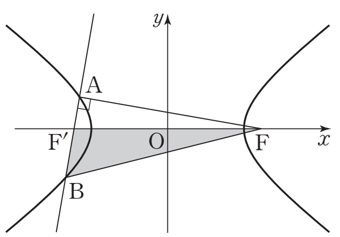
따라서 삼각형 QF′F의 둘레의 길이는

$\overline{QF'}+\overline{FF'}+\overline{QF}=p+10+(p+2)=2p+12$

$=2\times\dfrac{24}{5}+12=\dfrac{108}{5}$

답 ⑤

2



두 초점 $F(\sqrt{3},\ 0)$, $F'(-\sqrt{3},\ 0)$ 사이의 거리는

$\overline{FF'}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{FF'}^2=12$

$\overline{AF'}=2-\sqrt{2}$, $\overline{AF}=2+\sqrt{2}$이므로

$\overline{AF'}^2=(2-\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}$

$\overline{AF}^2=(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$

즉, $\overline{AF'}^2+\overline{AF}^2=\overline{F'F}^2$이므로

삼각형 AF′F는 $\angle FAF'=90°$인 직각삼각형이다.

$\overline{AF}-\overline{AF'}=(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{BF'}=a$라 하면 $\overline{BF}=a+2\sqrt{2}$

이때 삼각형 BAF가 직각삼각형이므로

$\overline{BF}^2=\overline{AB}^2+\overline{AF}^2$

$(a+2\sqrt{2})^2=(a+2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2$

$a^2+4\sqrt{2}a+8=a^2+2(2-\sqrt{2})a+(6-4\sqrt{2})+(6+4\sqrt{2})$

$4\sqrt{2}a=4a-2\sqrt{2}a+4$

$(6\sqrt{2}-4)a=4$

$a=\dfrac{4}{6\sqrt{2}-4}=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{7}$

따라서 삼각형 BFF′의 넓이는

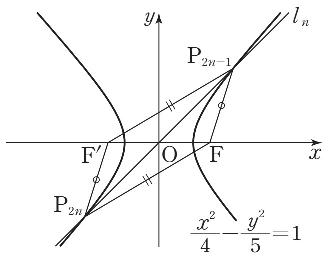
$\dfrac{1}{2}\times\overline{BF'}\times\overline{AF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}+2}{7}\times(2+\sqrt{2})$

$=\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

답 ③

3 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 점에서 두 초점 F, F′에 이르는 거리의 차가 4이므로

$|\overline{P_nF'}-\overline{P_nF}|=4$



두 점 P_{2n-1}, P_{2n}은 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{P_{2n-1}F}=\overline{P_{2n}F'}$, $\overline{P_{2n-1}F'}=\overline{P_{2n}F}$

즉, $\overline{P_{2n-1}F'}=\overline{P_{2n}F}=\overline{P_{2n-1}F}+4$

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\overline{P_nF}=\overline{P_1F}+\overline{P_2F}+\overline{P_3F}+\overline{P_4F}+\cdots+\overline{P_{20}F}$

$=(2\overline{P_1F}+4)+(2\overline{P_3F}+4)+\cdots+(2\overline{P_{19}F}+4)$

$\displaystyle=2\sum_{n=1}^{10}\overline{P_{2n-1}F}+4\times10$

$\displaystyle=2\sum_{n=1}^{10}(n+1)+40$

$=2\times\dfrac{10\times11}{2}+20+40$

$=170$

답 ⑤

참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$은 원점에 대하여 대칭이므로 원점을 지나는 직선 l_n과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 만나는 두 점 P_{2n-1}, P_{2n}은 원점에 대하여 대칭이다.

04 벡터의 연산

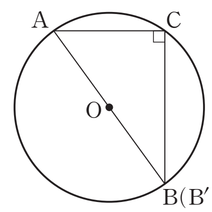
유제 본문 41~45쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 ④ 5 ③ 6 ②

1 직선 AO와 원이 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B′이라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{B'O}$는 서로 같으므로

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{B'O}=-\overrightarrow{OB'}$

이때 $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$이므로 두 점 B, B′은 서로 일치한다.



그림과 같이 세 점 A, O, B는 한 직선 위에 있고 선분 AB는 원의 지름이므로

$\overline{AB}=10$, $\angle ACB=90°$

직각삼각형 ABC에서 $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=6$이므로

$|\overrightarrow{BC}|^2=\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=10^2-6^2=64$

따라서 $|\overrightarrow{BC}|=8$

답 ⑤

2 직각이등변삼각형 ABC에서 $|\overrightarrow{AC}|=x\ (x>0)$이라 하면

$\overline{ED}=\overline{CB}=\overline{AC}=x$

$3|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$에서 $\overline{CE}=|\overrightarrow{BD}|=3x$

직각삼각형 CED에서 $\overline{CD}=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$이므로

$(3x)^2+x^2=(\sqrt{10})^2$

$10x^2=10$, $x^2=1$

$x=1$

따라서 $\overline{AC}=\overline{ED}=1$, $\overline{CE}=3$

직각삼각형 AED에서

$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=1+3=4$, $\overline{ED}=1$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AD}$의 크기는

$|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{ED}^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

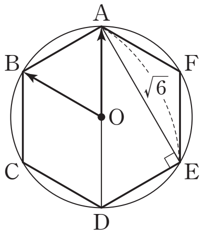
답 ④

3 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EO}$이므로

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{EO}$

$=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EA}$

따라서 $|\overrightarrow{EA}|=\sqrt{6}$



중심이 O인 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면 직각삼각형 ADE에서

$\overline{AD}=2r$, $\overline{DE}=r$, $\overline{EA}=\sqrt{6}$이므로

$(2r)^2=r^2+(\sqrt{6})^2$

$3r^2=6$, $r^2=2$

$r=\sqrt{2}$

따라서 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$

답 ②

4 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BC}|=4$에서

$\overline{BC}=|\overrightarrow{BC}|=2$

직각삼각형 ABC에서

$|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AB}=2x$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$

$\sqrt{3}x=2$에서 $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $|\overrightarrow{AC}|\times|\overrightarrow{BC}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

답 ④

5 두 벡터 $\vec{p}-2\vec{r}$, $\vec{q}$가 서로 평행하려면

$\vec{p}-2\vec{r}=t\vec{q}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재하여야 한다.

$\vec{p}-2\vec{r}=(\vec{a}+2\vec{b})-2(2\vec{a}+m\vec{b})$

$=-3\vec{a}+(2-2m)\vec{b}$

$t\vec{q}=t(3\vec{a}-\vec{b})=3t\vec{a}-t\vec{b}$

즉, $-3\vec{a}+(2-2m)\vec{b}=3t\vec{a}-t\vec{b}$에서

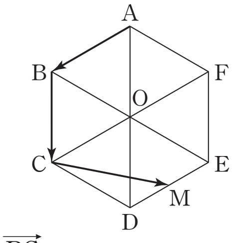
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$-3=3t$, $2-2m=-t$

따라서 $t=-1$, $m=\dfrac{2+t}{2}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

6 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면



$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}$

$=\overrightarrow{BO}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO})+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 서로 평행하지 않으므로

$m=-\dfrac{3}{2}$, $n=1$

따라서 $m+n=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

1 ⑤	2 6	3 ②	4 ③	5 ④
6 ⑤	7 ④	8 ③		

1 삼각형 APC의 넓이가 $\dfrac{7}{4}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AP}\times\sin60^\circ=\dfrac{7}{4}$

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{AP}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7}{4}$

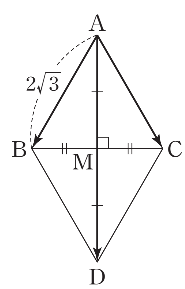
$\overline{AP}=\dfrac{7}{3}$

따라서 벡터 $\overrightarrow{PB}$의 크기는

$|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=3-\dfrac{7}{3}=\dfrac{2}{3}$

답 ⑤

2 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$이므로 그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

삼각형 ABC가 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이므로 평행사변형 ABDC는 마름모이다.

마름모 ABDC의 두 대각선 AD, BC의 교점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$

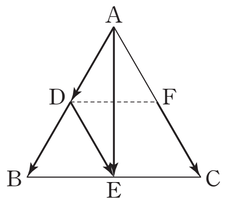
따라서 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=2\overline{AM}=2\times3=6$

답 6

3 $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}|$

$=|(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE})|=6$ …… ㉠

세 점 D, E, F는 각각 세 변 AB, BC, CA의 중점이므로



$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DE}$에서

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BE}$에서

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$

㉠에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{AE}|=6$

$|\overrightarrow{AE}|=\overline{AE}=3$

$\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}=3$

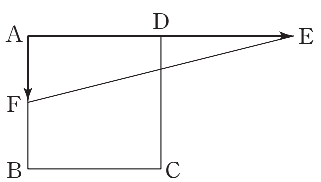
$\overline{AB}=2\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$

답 ②

4



그림과 같이 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}$인 점 E와 선분 AB의 중점 F를 잡으면

$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$

이때 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EF}$이므로

직각삼각형 EAF에서

$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\right|=|\overrightarrow{EF}|=\overline{EF}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AF}^2}$

$=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

답 ③

5 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$에서

$4\vec{a}+2\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})+l(\vec{a}-\vec{b})$

$=(k+l)\vec{a}+(k-l)\vec{b}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$k+l=4$, $k-l=2$에서 $k=3$, $l=1$

따라서 $2k+l=2\times3+1=7$

답 ④

6 $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$

$=3\overrightarrow{AB}+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+2\overrightarrow{AC}$

$=(3-4)\overrightarrow{AB}+(4+2)\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 서로 평행하지 않으므로

$m=-1$, $n=6$

따라서 $m+n=-1+6=5$

답 ⑤

7 $\vec{p}+2\vec{q}=(3\vec{a}-\vec{b})+2(\vec{a}+k\vec{b})=5\vec{a}+(2k-1)\vec{b}$

$\vec{p}-\vec{q}=(3\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+k\vec{b})=2\vec{a}-(1+k)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{p}-\vec{q}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 t에 대하여

$\vec{p}-\vec{q}=t(\vec{p}+2\vec{q})$

가 성립한다.

$2\vec{a}-(1+k)\vec{b}=t\{5\vec{a}+(2k-1)\vec{b}\}$

$=5t\vec{a}+(2k-1)t\vec{b}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$2=5t$, $-(1+k)=(2k-1)t$

두 식을 연립하여 풀면

$t=\frac{2}{5}$, $k=-\frac{1}{3}$

답 ④

8 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 0이 아닌 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$

가 성립하여야 한다.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}+4\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=(k-1)\vec{a}-\vec{b}$

$(k-1)\vec{a}-\vec{b}=t(\vec{a}+4\vec{b})=t\vec{a}+4t\vec{b}$에서

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$k-1=t$, $-1=4t$

따라서 $t=-\frac{1}{4}$, $k=t+1=\frac{3}{4}$

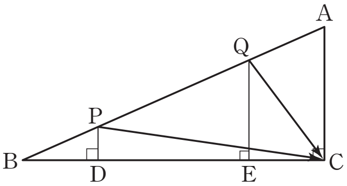
답 ③

Level 2 기본 연습

본문 48~49쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 ④	5 ②
6 ①	7 9	8 ③		

1 조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AB}|=4|\overrightarrow{BP}|$이고
$\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QA}$, 즉 $|\overrightarrow{QA}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로
변 AB 위의 두 점 P, Q는 선분 AB를 각각 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점이다.



두 점 P, Q에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 세 직각삼각형 PBD, QBE, ABC는 닮은 도형이고 닮음비는 1 : 3 : 4이다.
조건 (나)에서 $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=4$이므로

$\overline{PD}=\frac{1}{4}\overline{AC}=1$, $\overline{QE}=\frac{3}{4}\overline{AC}=3$

직각삼각형 QEC에서 $|\overrightarrow{QC}|=\overline{QC}=\sqrt{14}$이므로

$\overline{EC}=\sqrt{\overline{QC}^2-\overline{QE}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2-3^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 PDC에서 $\overline{DC}=3\overline{EC}=3\sqrt{5}$이므로

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PD}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{46}$

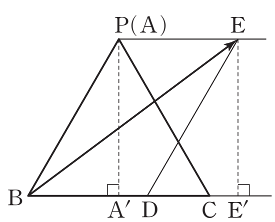
따라서 $|\overrightarrow{PC}|=\overline{PC}=\sqrt{46}$

답 ③

2 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BP}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}$
이므로 벡터 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$의 크기는 변 AB 위의 점 P가 점 A와 일치할 때 최대가 된다.
즉, 사각형 BDEA가 평행사변형이 되도록 점 E를 잡으면
$|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}|\le|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BE}|$
점 D는 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{AE}=\overline{BD}=\frac{2}{3}\overline{BC}=4$

두 점 A, E에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 A′, E′이라 하면



$\overline{BA'}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$

$\overline{A'E'}=\overline{AE}=4$

$\overline{AA'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 EBE′에서

$\overline{BE'}=\overline{BA'}+\overline{A'E'}=3+4=7$

$\overline{EE'}=\overline{AA'}=3\sqrt{3}$

이므로

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{BE'}^2+\overline{EE'}^2}=\sqrt{7^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

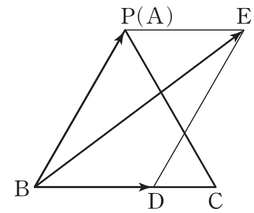
따라서 $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{BE}|=\overline{BE}=2\sqrt{19}$

답 ④

다른 풀이

$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BP}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}$
이므로 벡터 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$의 크기는 변 AB 위의 점 P가 점 A와 일치할 때 최대가 된다.
즉, 사각형 BDEA가 평행사변형이 되도록 점 E를 잡으면



$|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}|\le|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}|$
$=|\overrightarrow{BE}|$

점 D는 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\frac{2}{3}\overline{BC}=4$

$\overline{BP}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로

$\overline{DE}=\overline{AB}=6$, $\angle BDE=180°-\angle EDC=120°$

삼각형 BDE에서 코사인법칙에 의하여

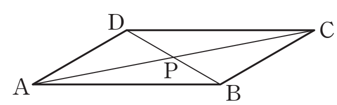
$$\overline{BE}^2=\overline{BD}^2+\overline{DE}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{DE}\times\cos(\angle BDE)$$
$$=4^2+6^2-2\times4\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=76$$

$\overline{BE}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

따라서 $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{BE}|=\overline{BE}=2\sqrt{19}$

3 조건 (가)에서
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$이므로
$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$, 즉 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다.



조건 (나)에서
$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AP}$

세 점 A, P, C는 한 직선 위에 있고 점 P는 선분 AC의 중점이므로 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점이다.

$|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{PC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ …… ㉠

이때 $\angle DAB=30^\circ$이므로

$\angle ABC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 150^\circ$

$=(2\sqrt{3})^2+2^2-2\times2\sqrt{3}\times2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=28$

$\overline{AC}=2\sqrt{7}$

㉠에서

$|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}=\sqrt{7}$

답 ②

4 $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$에서

$2\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{DB}$

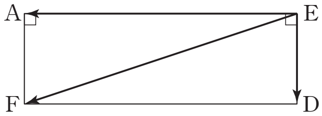
$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$이므로 $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{DB}$이고, 두 직각삼각형 AEC, BED는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 3 : 2이다.

$\overline{AE}:\overline{EB}=3:2$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AE}=\frac{3}{5}\times2=\frac{6}{5}$

$\overline{CE}:\overline{ED}=3:2$이고 $\overline{CD}=1$이므로

$\overline{ED}=\frac{2}{5}\times1=\frac{2}{5}$



사각형 EAFD가 직사각형이 되도록 하는 점을 F라 하면

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EF}$이고 $|\overrightarrow{EF}|=\overline{EF}=\overline{AD}$이므로

$|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}|=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{ED}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

5 점 M이 선분 AC의 중점이므로 정삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 BM 위에 있고 $\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{MB}$이다.

즉, $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$이므로

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MG}$

$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})$

$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{1}{6}\right)\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 서로 평행하지 않으므로

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{6}$

따라서 $a+b=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

답 ②

6 $\overline{AD}:\overline{BC}=3:5$이고 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로

$\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

점 E는 변 DC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$m\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$에서

$m\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}\right)=n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$가 서로 평행하지 않으므로

$\frac{3}{4}m=n$, $\frac{3}{2}m=1$

따라서 $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$mn=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

답 ①

7 조건 (가)에서 $\vec{a}/\!/\vec{b}$이므로 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\vec{b}=t\vec{a}$가 성립한다.

조건 (나)에서 $2\vec{a}+k(2\vec{c}-3\vec{a})+2\vec{b}=8\vec{c}$이므로

$(2-3k)\vec{a}+2\vec{b}+(2k-8)\vec{c}=\vec{0}$

$(2-3k)\vec{a}+2t\vec{a}+(2k-8)\vec{c}=\vec{0}$

$(2-3k+2t)\vec{a}+(2k-8)\vec{c}=\vec{0}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 서로 평행하지 않으므로

$2-3k+2t=0$, $2k-8=0$에서

$k=4$, $t=\frac{3k-2}{2}=5$

따라서 $\vec{b}=5\vec{a}$, $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=5$이므로

$k+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=4+5=9$

답 9

8 $\vec{a}+3\vec{x}=k\vec{a}+\vec{b}$에서

$3\vec{x}=(k-1)\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{x}=\frac{k-1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ …… ㉠

㉠을 $\vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$에 대입하면

$\left(\frac{k-1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+2\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$

$2\vec{y}=\frac{7-k}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$

$\vec{y}=\frac{7-k}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 서로 평행하려면 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\vec{y}=t\vec{x}$가 성립하여야 한다.

$\frac{7-k}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=t\left(\frac{k-1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$\frac{7-k}{6}=\frac{t(k-1)}{3}$, $-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}t$

따라서 두 식을 연립하여 풀면

$t=-2$, $k=-1$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 50~51쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 30 4 18 5 ① 6 ④

1 두 점 P, Q는 직선 AD에 대하여 대칭이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 점 M은 항상 직선 AD 위에 있다.

이때 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AM}$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=|2\overrightarrow{AM}|=2\overline{AM}$

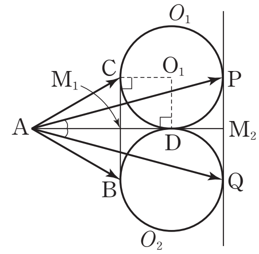
변 BC의 중점을 M_1이라 하면 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 $\overline{AM_1}=\sqrt{3}$이다.

그림과 같이 점 P가 점 C이고 점 Q가 점 B일 때,

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AM_1}|=2\overline{AM_1}=2\sqrt{3}$

$\overline{AM_1}\le\overline{AM}$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.



원 O_1의 중심을 O_1이라 하면 사각형 CM_1DO_1은 정사각형이므로

$\overline{CO_1}=\overline{CM_1}=1$

즉, 원 O_1의 반지름의 길이는 1이고, 마찬가지로 원 O_2의 반지름의 길이도 1이다.

직선 PQ가 두 원 O_1, O_2에 모두 접하고 직선 BC가 아닐 때, 직선 PQ와 직선 AD가 만나는 점을 M_2라 하면 선분 M_1M_2의 길이는 원 O_1, 원 O_2의 지름의 길이와 같으므로

$\overline{M_1M_2}=2$

$\overline{AM}\le\overline{AM_2}=\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}=\sqrt{3}+2$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=2\overline{AM}$의 최댓값은

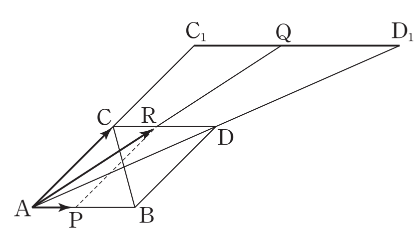
$2(\sqrt{3}+2)=2\sqrt{3}+4$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값과 최솟값의 합은

$(2\sqrt{3}+4)+2\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}$

답 ⑤

2



그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡자.

변 AB 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CR}$가 되도록 점 R를 잡으면

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AR}$

이고, 점 R는 변 CD 위의 점이다.

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$에서 $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AR}$이므로 점 Q는 선분 AR를 2 : 1로 외분하는 점이다.

$\overrightarrow{AC_1}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}=2\overrightarrow{AD}$가 되도록 두 점 C_1, D_1을 잡으면 점 Q가 나타내는 도형은 선분 C_1D_1이다.

$\overline{C_1D_1}=2\sqrt{2}$에서

$\overline{AB}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{C_1D_1}=\sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}$

따라서 $|\overrightarrow{BC}|=\overline{BC}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ③

3 조건 (가)에서

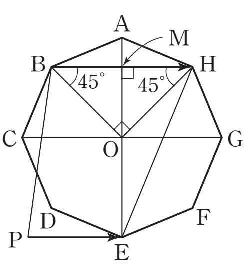
$2\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{CH}+3\overrightarrow{DP}$

$3(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DP})=2(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})$

$3\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{BH}$

$\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BH}$

벡터 $\overrightarrow{PE}$는 벡터 $\overrightarrow{BH}$와 방향이 같고, $|\overrightarrow{PE}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{BH}|$이므로 점 P의 위치는 다음과 같다.



두 대각선 AE, CG가 만나는 점을 O라 하자.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HE}$이므로 조건 (나)에서

$|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{HE}|=|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EH}|$

$=|\overrightarrow{DH}|=2\overline{OH}=6\sqrt{2}$

그러므로 $\overline{OH}=3\sqrt{2}$

직각이등변삼각형 BOH에서 $\angle HBO=45^\circ$이므로

$\overline{BH}=\sqrt{2}\times\overline{OH}=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

$\overline{PE}=\frac{2}{3}\times\overline{BH}=\frac{2}{3}\times6=4$

점 E에서 변 BH에 내린 수선의 발을 M이라 하면 선분 EM은 점 O를 지나므로

$\overline{EM}=\overline{EO}+\overline{OM}=\overline{OH}+\frac{\overline{OH}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+3$

$\overline{PE}\,/\!/\,\overline{BH}$에서 사각형 EHBP는 사다리꼴이므로 사각형 EHBP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{BH}+\overline{PE})\times\overline{EM}=\frac{1}{2}\times(6+4)\times(3+3\sqrt{2})$

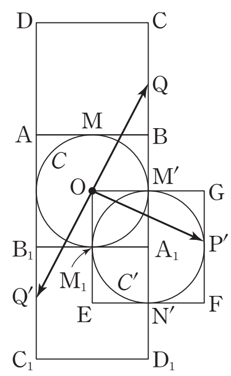
$=15+15\sqrt{2}$

따라서 $p=15$, $q=15$이므로

$p+q=15+15=30$

답 30

4 직선 MO와 원 C가 만나는 점 중에서 점 M이 아닌 점을 M_1이라 하자.



그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1B_1}$이고 원 C와 변 B_1A_1이 변 B_1A_1의 중점 M_1에서 접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린다.

또한 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{OE}$인 정사각형 OEFG에 내접하고 중심이 A_1인 원 C'을 그린다.

원 C 위의 점 P와 변 BC 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값, 최댓값은 각각 원 C' 위의 점 P′과 선분 B_1C_1 위의 점 Q′에 대하여 $|\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}|$의 최솟값, 최댓값과 같다.

평행사변형을 이용한 벡터의 덧셈의 정의로부터 $|\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}|$의 값은 점 P′이 선분 OG의 중점 M′이고, 점 Q′이 점 B_1일 때 최소임을 알 수 있다.

즉, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값은 점 P가 점 M이고, 점 Q가 점 B일 때이므로

$m=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{MB}|=\overline{MB}=1$

마찬가지로 벡터의 덧셈의 정의로부터 $|\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}|$의 값은 점 P′이 선분 EF의 중점 N′이고, 점 Q′이 점 C_1일 때 최대임을 알 수 있다.

즉, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 점 P가 점 M_1이고, 점 Q가 점 C일 때이므로

$M=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{M_1C}|=\overline{M_1C}$

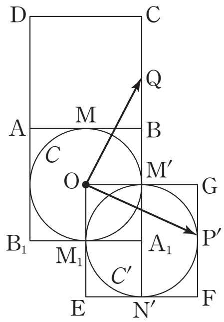
$=\sqrt{\overline{M_1A_1}^2+\overline{A_1C}^2}$

$=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

따라서 $m^2+M^2=1^2+(\sqrt{17})^2=18$

답 18

다른 풀이



직선 MO와 원 C가 만나는 점 중에서 점 M이 아닌 점을 M_1이라 하자.

그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA_1}$인 정사각형 AB_1A_1B를 그린다.

또한 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{OE}$인 정사각형 OEFG에 내접하고 중심이 A_1인 원 C'을 그린다.

원 C 위의 점 P와 변 BC 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값, 최댓값은 각각 원 C' 위의 점 P′에 대하여 $|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QP'}|$의 최솟값, 최댓값과 같다.

이때 $|\overrightarrow{QP'}|$의 값은 점 Q가 점 B이고, 점 P′이 선분 OG의 중점 M′일 때 최소임을 알 수 있다.

즉, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값은 점 P가 점 M이고, 점 Q가 점 B일 때이므로

$m=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{MB}|=\overline{MB}=1$

한편, $|\overrightarrow{QP'}|$의 값은 점 Q가 점 C이고, 점 P′이 선분 EF의 중점 N′일 때 최대임을 알 수 있다.

즉, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 점 P가 점 M_1이고, 점 Q가 점 C일 때이므로

$M=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{M_1C}|$

$=\overline{M_1C}=\sqrt{\overline{M_1A_1}^2+\overline{A_1C}^2}$

$=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

따라서 $m^2+M^2=1^2+(\sqrt{17})^2=18$

5 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}-2\overrightarrow{BP}+3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})+k\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$6\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BC}+(1+k)\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1+k}{6}\overrightarrow{BA}$ ...... ㉠

두 선분 AC, BC의 중점을 각각 M, N이라 하면

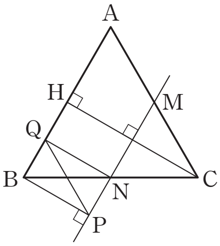
$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

이므로 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BN}+\frac{1+k}{3}\overrightarrow{NM}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NP}$에서 $\overrightarrow{NP}=\frac{1+k}{3}\overrightarrow{NM}$이므로 세 점 P, M, N은 한 직선 위에 있다.

따라서 $|\overrightarrow{BP}|$의 값은 점 P가 점 B에서 직선 MN에 내린 수선의 발일 때 최소이므로 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$|\overrightarrow{BP}|\geq\frac{1}{2}\times\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

즉, $|\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고

이때의 점 P를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{BP}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{PQ}=\frac{1}{2}$

직각삼각형 PQB에서

$\overline{QB}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{BP}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{16}}=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{QB}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

이므로 ㉠에서

$\frac{1+k}{6}=-\frac{1}{4}$

따라서 $k=-\frac{5}{2}$

답 ①

6 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\vec{c}$

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{2+k}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{2+k}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{2}{2+k}(\vec{c}-\vec{a})$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}$

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{2}{2+k}(\vec{c}-\vec{a})$

$=\frac{k}{2+k}\vec{a}+\frac{2}{2+k}\vec{c}$

세 점 O, E, D가 한 직선 위에 있으려면 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$가 성립하여야 한다.

$\frac{k}{2+k}\vec{a}+\frac{2}{2+k}\vec{c}=t\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)$에서

$\frac{k}{2+k}\vec{a}+\frac{2}{2+k}\vec{c}=t\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{c}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 서로 평행하지 않으므로

$\frac{k}{2+k}=t$, $\frac{2}{2+k}=\frac{3}{5}t$

따라서 두 식을 연립하여 풀면

$t=\frac{5}{8}$, $k=\frac{10}{3}$

답 ④

05 평면벡터의 성분과 내적

유제 본문 55~63쪽

1 ⑤	2 ③	3 ①	4 ②	5 ④
6 ⑤	7 ①	8 ④	9 ③	10 ②

1 점 D는 변 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

점 E는 변 BC를 $2:3$으로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2-3}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\frac{13}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

따라서 $m=\frac{13}{5}$, $n=-2$이므로

$m+n=\frac{13}{5}+(-2)=\frac{3}{5}$

답 ⑤

2 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

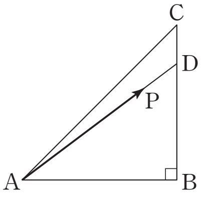
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}$

변 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4}{5}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



직각삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{3}{4}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}\times4=3$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{4}{5}\times|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{4}{5}\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{4}{5}\times5=4$

답 ③

3 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$에서

$(-7, 3)=m(3, 1)+n(-2, 2)$

$=(3m-2n, m+2n)$

$-7=3m-2n$, $3=m+2n$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=-1$, $n=2$

따라서 $m+n=-1+2=1$

답 ①

4 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{OA}=(3, 4)$, $\overrightarrow{OB}=(-2, 1)$, $\overrightarrow{OC}=(0, -2)$,

$\overrightarrow{OD}=(a, b)$라 하면

$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

$=(3, 4)-(-2, 1)+(0, -2)-(a, b)$

$=(-a+5, -b+1)$

$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$에서

$(-a+5, -b+1)=(0, 0)$

$-a+5=0$, $-b+1=0$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a+b=5+1=6$

답 ②

5 $\vec{a}+2\vec{b}=(5, x)+2(-2, 2)=(1, x+4)$이므로

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=(1, x+4)\cdot(-2, 2)$

$=1\times(-2)+(x+4)\times 2$

$=2x+6=7$

따라서 $x=\frac{1}{2}$

답 ④

다른 풀이

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(5, x)\cdot(-2, 2)=-10+2x$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=(-2, 2)\cdot(-2, 2)=4+4=8$

이므로

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=(-10+2x)+2\times 8$

$=2x+6=7$

따라서 $x=\frac{1}{2}$

6 원점을 O, $\overrightarrow{OA}=(4, 0)$, $\overrightarrow{OB}=(0, -2)$, $\overrightarrow{OP}=(x, y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x, y)-(4, 0)=(x-4, y)$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(x, y)-(0, -2)=(x, y+2)$

이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-4)x+y(y+2)$

$=x^2-4x+y^2+2y$

$=(x-2)^2+(y+1)^2-5$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 $(2, -1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이고, $(4-2)^2+(0+1)^2=5$이므로 점 A$(4, 0)$은 이 원 위의 점이다.

따라서 점 P와 점 A$(4, 0)$ 사이의 거리의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같으므로 $2\sqrt{5}$이다.

답 ⑤

7 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$이므로

$3^2=2^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times 1^2$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$

따라서

$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$

$=2^2-2\times\frac{1}{4}-3\times 1^2$

$=\frac{1}{2}$

답 ①

8 $\vec{a}+\vec{b}=(1, 1)+(k, -k)=(1+k, 1-k)$

$\vec{a}-\vec{b}=(1, 1)-(k, -k)=(1-k, 1+k)$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(1+k)(1-k)+(1-k)(1+k)$

$=2(1-k^2)$

$=2-2k^2$ …… ㉠

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}=\sqrt{2+2k^2}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(1-k)^2+(1+k)^2}=\sqrt{2+2k^2}$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=\sqrt{2+2k^2}\times\sqrt{2+2k^2}\times\frac{1}{2}$

$=k^2+1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$2-2k^2=k^2+1$

$3k^2=1$

따라서 $k^2=\frac{1}{3}$

답 ④

9 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$의 방향벡터가 $(2, 3)$이므로 이 직선과 평행한 직선 l의 방향벡터도 $(2, 3)$이다.

직선 l은 점 $(-2, a)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x+2}{2}=\frac{y-a}{3}$

이 직선이 점 $(0, 6)$을 지나므로

$\frac{0+2}{2}=\frac{6-a}{3}$, $6-a=3$

따라서 $a=3$

답 ③

다른 풀이

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$의 방향벡터가 $(2, 3)$이므로 이 직선과 평행한 직선 l의 방향벡터도 $(2, 3)$이고

직선 l은 점 $(0, 6)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{2}=\frac{y-6}{3}$

이 직선이 점 $(-2, a)$를 지나므로

$\frac{-2}{2}=\frac{a-6}{3}$, $a-6=-3$

따라서 $a=3$

10 $\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0$에서

$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{a}|$

즉, 점 P는 점 A$(-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\vec{b}-\vec{a}|=5$인 원 위의 점이다. (단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

따라서 삼각형 OBP의 넓이는 P$(-1, -5)$ 또는 P$(-1, 5)$일 때 최대이고 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times4\times5=10$

답 ②

다른 풀이

$\vec{p}=(x, y)$라 하면

$\vec{p}\cdot\vec{p}=|\vec{p}|^2=x^2+y^2$

$2\vec{p}\cdot\vec{a}=2(x, y)\cdot(-1, 0)=-2x$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=2(-1, 0)\cdot(4, 0)-(4, 0)\cdot(4, 0)$

$=-8-16=-24$

$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0$에서

$x^2+y^2+2x-24=0$

$(x+1)^2+y^2=25$

즉, 점 P는 점 A$(-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다. (단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

따라서 삼각형 OBP의 넓이는 P$(-1, -5)$ 또는 P$(-1, 5)$일 때 최대이고 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times4\times5=10$

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ③	2 ②	3 ⑤	4 27	5 ⑤
6 84	7 ④	8 ②	9 ②	10 ③

1 점 D는 선분 CM을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

세 점 A, D, E는 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 만족시키는 양수 k가 존재한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=k\times\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$=\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ...... ㉠

점 E를 선분 BC를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점이라 하면

$$\overrightarrow{AE}=\frac{m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AB}}{m+n}$$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}\qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{n}{m+n}=\frac{k}{6},\ \frac{m}{m+n}=\frac{2k}{3}$$

이므로

$$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=\frac{2k}{3}+\frac{k}{6}=\frac{5k}{6}$$

즉, $1=\frac{5k}{6}$에서 $k=\frac{6}{5}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{4}{5}$이므로

$$a-b=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

답 ③

2 $\vec{a}+2\vec{b}=(3,\ 1)+2(1,\ -2)=(5,\ -3)$

따라서 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$5+(-3)=2$

답 ②

3 $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 5)-(3,\ 2)=(-4,\ 3)$

평면벡터 $\vec{p}$가 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 반대 방향이므로

$\vec{p}=t\overrightarrow{AB}=t(-4,\ 3)=(-4t,\ 3t)$ $(t<0)$

으로 놓을 수 있다.

$|\vec{p}|=10$에서 $|\vec{p}|^2=100$이므로

$(-4t)^2+(3t)^2=25t^2=100$, $t^2=4$

$t<0$이므로 $t=-2$

따라서 $\vec{p}=(-4t,\ 3t)=(8,\ -6)$이므로 벡터 $\vec{p}$의 모든 성분의 합은

$8+(-6)=2$

답 ⑤

4 세 점 $A(4,\ 1)$, $B(5,\ 0)$, $C(6,\ -4)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$G\left(\frac{4+5+6}{3},\ \frac{1+0+(-4)}{3}\right)$, 즉 $G(5,\ -1)$

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 위의 점 P에 대하여

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3\left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\right|$$

$$=3|\overrightarrow{PG}|=3\overline{PG}$$

이때 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$의 중심을 D라 하면 $D(1,\ 2)$이고 이 원의 반지름의 길이가 4이므로

$$\overline{PG}\le\overline{DG}+4$$

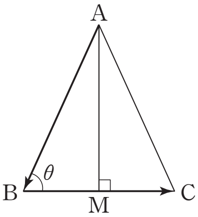
$$=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}+4=9$$

(단, 점 P가 직선 GD와 원이 만나는 두 점 중에서 점 G로부터 거리가 더 먼 점일 때 등호가 성립한다.)

따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$의 최댓값은 $3\times 9=27$이다.

답 27

5 $\angle ABC=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하자.



삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\angle AMC=90^\circ$, $\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 $180^\circ-\theta$이고 $180^\circ-\theta>90^\circ$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\{180^\circ-(180^\circ-\theta)\}$$

$$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$$

$$=-\overline{AB}\times\overline{BC}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}$$

$$=-\overline{BC}\times\frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overline{BC}^2$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$에서

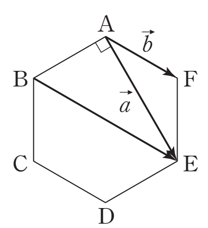
$$-\frac{1}{2}\overline{BC}^2=-3$$

$\overline{BC}^2=6$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{6}$

답 ⑤

6



$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$라 하자.

$\overline{\mathrm{BE}} /\!/ \overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BE}}=2\overline{\mathrm{AF}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AF}}=2\vec{b}$

삼각형 ABE에서

$\angle\mathrm{BAE}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BE}}=2\sqrt{3}$이므로

$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$

$|\vec{b}|=\sqrt{3}$이고 $\angle\mathrm{EAF}=30^\circ$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=\frac{9}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2&=|2\vec{a}+2\vec{b}|^2\\&=4|\vec{a}+\vec{b}|^2\\&=4(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=4(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=4\left\{3^2+2\times\frac{9}{2}+(\sqrt{3})^2\right\}\\&=84\end{aligned}$$

답 84

7 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=0$에서

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=0$

$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\times1^2=0$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{1}{2}}{2\times1}=\frac{1}{4}$

답 ④

8 두 벡터 $\vec{a}=(3, 2x-1)$, $\vec{b}=(-x, 2)$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$3\times(-x)+(2x-1)\times2=0$

$x-2=0$

따라서 $x=2$

답 ②

9 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-3}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(4, -3)$

직선 $\frac{x-3}{2}=y-1$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(2, 1)$

$|\vec{u}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(4, -3)\cdot(2, 1)=8+(-3)=5$

따라서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\\&=\frac{5}{5\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

답 ②

10 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=k$에서

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=k$, $|\vec{p}-\vec{a}|=\sqrt{k}$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A$(2, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원이다.

이 원이 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$과 접하려면 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같아야 하므로

$\frac{|2-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{k}$

따라서 $k=\frac{1}{2}$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 66~67쪽

1 18	2 ④	3 ①	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 ④	8 ③		

1 선분 AB의 중점이 C, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이 D이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

조건 (가)의 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-3\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

이므로 두 삼각형 APD, AQB는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 $1:3$이다.

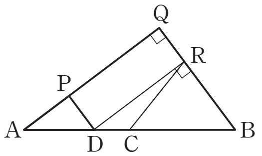
$\overline{\mathrm{AQ}}=3\times\overline{\mathrm{AP}}=3\times4=12$

조건 (가)의 $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DQ}+3\overrightarrow{RD}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{DR}=\dfrac{\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DQ}}{3}$이므로 점 R는 선분 QB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$\overline{BR}=\dfrac{2}{3}\overline{BQ}$이고 $\overline{DB}=\dfrac{2}{3}\overline{AB}$

이므로 두 삼각형 DBR, ABQ는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 2 : 3이다.



조건 (나)의 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{DR}=0$에서 두 직선 QB, DR는 점 R에서 수직으로 만난다.

즉, $\angle DRB=\angle AQB=90^\circ$이므로

직각삼각형 AQB에서

$\overline{QB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AQ}^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$

따라서 삼각형 CBR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{RB}\times\sin(\angle QBA)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\dfrac{2}{3}\overline{QB}\times\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times6\times\dfrac{12}{15}$

$=18$

답 18

2 $|2\vec{a}-t\vec{b}|^2=(2\vec{a}-t\vec{b})\cdot(2\vec{a}-t\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})t+t^2|\vec{b}|^2$

$=4\times1^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})t+t^2\times2^2$

$=4t^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})t+4$

$=4\left\{t-\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\}^2+4-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$|2\vec{a}-t\vec{b}|^2$의 값은 $t=\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})$일 때 최소이므로

$\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\dfrac{1}{2}$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

따라서

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times1^2-4\times1+2^2$

$=4$

답 ④

3 $|\vec{a}+t\vec{b}|\ge1$이므로 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2\ge1$

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})\ge1$

$\vec{a}\cdot\vec{a}+2t(\vec{a}\cdot\vec{b})+t^2(\vec{b}\cdot\vec{b})-1\ge0$

$|\vec{a}|^2+2t(\vec{a}\cdot\vec{b})+t^2|\vec{b}|^2-1\ge0$

이때 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$이므로

$t^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+1\ge0$ …… ㉠

모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립하므로 t에 대한 이차방정식 $t^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-1\le0$에서 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le1$

$-1\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le1$ …… ㉡

또 $-|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$-\sqrt{2}\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le\sqrt{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-1\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le1$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$

$=3-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

이고 $1\le3-2\vec{a}\cdot\vec{b}\le5$이므로

$1\le|\vec{a}-\vec{b}|^2\le5$

$1\le|\vec{a}-\vec{b}|\le\sqrt{5}$

따라서 $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최댓값은 $\sqrt{5}$, 최솟값은 1이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$\sqrt{5}\times1=\sqrt{5}$

답 ①

참고

$|\vec{a}-\vec{b}|$의 값은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$일 때 최대이고, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$일 때 최소이다.

4 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$이고 $-|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$-10\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le10$

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값이 k이므로

$-10\le k\le10$ …… ㉠

$\left|\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\left(\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$=25-\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{4}\times2^2$

$=26-\vec{a}\cdot\vec{b}$

즉, $\left|\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=\sqrt{26-\vec{a}\cdot\vec{b}}$

$\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|$의 값은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값이 최소일 때, 즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=k$일 때 최대이므로

$M=\sqrt{26-k}$

$\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|$의 값은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값이 최대일 때, 즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$일 때 최소이므로

$m=\sqrt{26-10}=4$

$m<x<M$, 즉 $4<x<\sqrt{26-k}$를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되기 위해서는 $5<\sqrt{26-k}\le 6$이어야 한다.

$5<\sqrt{26-k}\le 6$에서

$25<26-k\le 36$

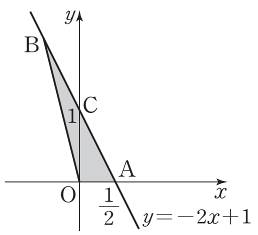
$-10\le k<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-10\le k<1$

따라서 구하는 정수 k는 -10, -9, $\cdots$, 0이고, 그 개수는 11이다.

답 ③

5



y축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 그림과 같이 점 B는 제2사분면에 있어야 한다.

직선 $y=-2x+1$이 y축과 만나는 점을 C라 하면

C$(0, 1)$

두 삼각형 BOC, COA의 넓이가 서로 같으므로 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1}{2}\times1\times(-a)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}$에서

$a=-\frac{1}{2}$

점 B(a, b)는 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로

$b=-2a+1=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2$

즉, B$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$이므로

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{1}{2}, 2\right)-\left(\frac{1}{2}, 0\right)=(-1, 2)$

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}=(-1, 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}, 2\right)=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$

답 ⑤

6 두 점 C, D는 각각 두 선분 OA, OB의 중점이므로

C$(1, 0)$, D$(0, 1)$

점 P의 좌표를 (p, q)라 하자.

두 점 B$(0, 2)$, C$(1, 0)$을 지나는 직선 BC의 방정식은 $2x+y=2$이므로 점 P는

$2p+q=2\ (0\le p\le 1)$

을 만족시킨다.

즉, $\overrightarrow{OP}=(p, q)=(p, 2-2p)\ (0\le p\le 1)$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\\&=(2, 0)-(p, 2-2p)\\&=(-p+2, 2p-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD}&=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP}\\&=(0, 1)-(p, 2-2p)\\&=(-p, 2p-1)\end{aligned}$$

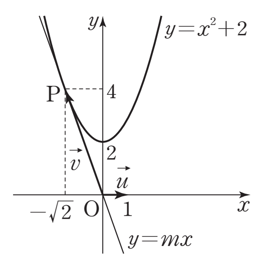
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}&=(-p+2, 2p-2)\cdot(-p, 2p-1)\\&=p^2-2p+4p^2-6p+2\\&=5p^2-8p+2\\&=5\left(p-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{6}{5}\ (0\le p\le 1)\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$는 $p=0$일 때 최댓값 2를 갖고 $p=\frac{4}{5}$일 때 최솟값 $-\frac{6}{5}$을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{4}{5}$

답 ④

7 $0^\circ\le\theta\le180^\circ$일 때 $\cos\theta$의 값이 최소이려면 θ의 값이 최대이어야 한다.



한편, 곡선 $y=x^2+2$ 위의 점 P와 원점을 지나는 직선이 곡선 $y=x^2+2$와 제2사분면에서 접하는 접선일 때 θ의 값이 최대, 즉 $\cos\theta$의 값이 최소가 된다.

곡선 $y=x^2+2$와 제2사분면에 있는 점에서 접하고 원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx\ (m<0)$이라 하자.

이차방정식 $x^2+2=mx$, 즉 $x^2-mx+2=0$이 중근을 가지므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이다.

$D=(-m)^2-4\times1\times2=0$

$m^2=8$

$m<0$이므로 $m=-2\sqrt{2}$

$m=-2\sqrt{2}$일 때,

$x^2+2=-2\sqrt{2}x$에서

$(x+\sqrt{2})^2=0$, $x=-\sqrt{2}$

즉, $\mathrm{P}(-\sqrt{2}, 4)$일 때 θ의 값이 최대이고, 이때

$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-\sqrt{2}, 4)$

$|\vec{v}|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$

$\vec{u}=(1, 0)$이므로 $|\vec{u}|=1$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1, 0)\cdot(-\sqrt{2}, 4)=-\sqrt{2}<0$이므로

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=-\frac{-\sqrt{2}}{1\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

에서 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 $\cos\theta$의 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

답 ④

8 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a, 2)-(-a, 3)=(2a, -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2b, 1)-(b, 2)=(b, -1)$

두 직선 AB, CD가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2a, -1)\cdot(b, -1)=2ab+1=0$

그러므로 $ab=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2b}$

이때 $a<b$이고 $ab=-\frac{1}{2}$이므로 $a<0$, $b>0$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\overline{\mathrm{BC}}=b-a=b+\frac{1}{2b}\ge2\sqrt{b\times\frac{1}{2b}}=\sqrt{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } b=\frac{1}{2b}\text{, 즉 } b=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

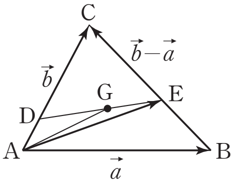
답 ③

Level 3 실력 완성

본문 68쪽

1 ④ **2** ② **3** ④

1 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라 하자.



점 D는 선분 AC를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{4}\vec{b}$

점 E를 선분 BC를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

이때 세 점 D, G, E가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$

인 0이 아닌 실수 t가 존재한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}})-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})-\frac{1}{4}\vec{b}\\&=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\vec{a}+\left(\frac{m}{m+n}-\frac{1}{4}\right)\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t\overrightarrow{\mathrm{DG}}&=t(\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\\&=t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{b}\right)\\&=\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{t}{12}\vec{b}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$1-\frac{m}{m+n}=\frac{t}{3}$, $\frac{m}{m+n}-\frac{1}{4}=\frac{t}{12}$

$1-\frac{m}{m+n}=4\left(\frac{m}{m+n}-\frac{1}{4}\right)$

$5\times\frac{m}{m+n}=2$

$\frac{m}{m+n}=\frac{2}{5}$

즉, 점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

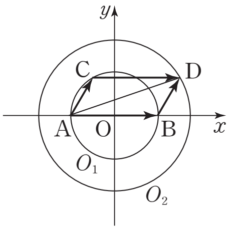
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

따라서 $p=\frac{3}{5}$, $q=\frac{2}{5}$이므로

$p-q=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

답 ④

2



원 O_1: $x^2+y^2=2^2$ 위의 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$ $(b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=4$ ⋯⋯ ㉠

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$에서

사각형 ABDC는 평행사변형이고 $\overline{AB}=4$이므로 점 D는 점 C를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이다.

즉, $D(a+4,\ b)$

이때 점 D가 원 O_2: $x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2$ 위의 점이므로

$(a+4)^2+b^2=12$

$a^2+b^2+8a+4=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8a+8=0$

$a=-1$

$b^2=4-a^2=4-(-1)^2=3$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{3}$

즉, $C(-1,\ \sqrt{3})$, $D(3,\ \sqrt{3})$

$\overrightarrow{AD}=(3,\ \sqrt{3})-(-2,\ 0)=(5,\ \sqrt{3})$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\ \sqrt{3})-(2,\ 0)=(-3,\ \sqrt{3})$

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(5,\ \sqrt{3})\cdot(-3,\ \sqrt{3})=-12$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}<0$이므로

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{-12}{2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

에서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{7}$

답 ②

3 양수 t에 대하여 원 $(x-2t)^2+(y+t)^2=t^2$은 반지름의 길이가 t이고 중심의 좌표가 $(2t,\ -t)$이므로 중심을 C라 하면

$C(2t,\ -t)$, $\overline{CP}=t$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}\\&=(3,\ 4)\cdot(2t,\ -t)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}\\&=6t-4t+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}\\&=2t+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}\quad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 하면

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|\overrightarrow{CP}|=t$이므로

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}=\begin{cases}5\times t\times\cos\theta & (0^\circ\le\theta\le90^\circ)\\-5\times t\times\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ<\theta\le180^\circ)\end{cases}$$

$=5t\cos\theta$ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$

㉠에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2t+5t\cos\theta$

이때 $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$2t-5t\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le2t+5t$

그러므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP}$가 이루는 각의 크기가 180°일 때 최소이고 최솟값은

$f(t)=2t-5t=-3t$

이때의 점 P, 즉 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CQ}$가 이루는 각의 크기가 180°이므로 벡터 $\overrightarrow{CQ}$는 크기가 t이고 방향은 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 반대이다.

$$\overrightarrow{CQ}=-|\overrightarrow{CQ}|\times\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=-\frac{t}{5}(3,\ 4)=\left(-\frac{3}{5}t,\ -\frac{4}{5}t\right)$$

이므로

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}=(2t,\ -t)+\left(-\frac{3}{5}t,\ -\frac{4}{5}t\right)=\left(\frac{7}{5}t,\ -\frac{9}{5}t\right)$$

점 $R(t,\ -3t)$에 대하여

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\left(\frac{7}{5}t,\ -\frac{9}{5}t\right)\cdot(t,\ -3t)=\frac{7}{5}t^2+\frac{27}{5}t^2=\frac{34}{5}t^2$$

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}>340$에서

$\frac{34}{5}t^2>340$, $t^2>50$

$t>0$이므로 $t>5\sqrt{2}=7.\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 t의 최솟값은 8이다.

답 ④

참고

점 P의 좌표를 (x, y)라 하고 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=k$라 하면

$(3, 4)\cdot(x, y)=k$

$3x+4y-k=0$

원 $(x-2t)^2+(y+t)^2=t^2$과 직선 $3x+4y-k=0$이 만나야 하므로 원의 중심 $(2t, -t)$와 직선 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 t보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\dfrac{|3\times 2t+4\times(-t)-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}\le t$이므로

$|2t-k|\le 5t$에서

$-3t\le k\le 7t$

따라서 k의 최솟값 $f(t)$는 $f(t)=-3t$임을 알 수 있다.

06 공간도형

유제 본문 71~77쪽

1 32 2 11 3 ② 4 ③

1 직선 AD와 평행한 직선은 직선 BC, 직선 EF, 직선 HI, 직선 KL이므로

$a=4$

직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BH, 직선 CI, 직선 EK, 직선 FL, 직선 GH, 직선 IJ, 직선 JK, 직선 GL이므로

$b=8$

따라서 $ab=4\times 8=32$

답 32

2 조건 (가)에서 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle ABC=90°$

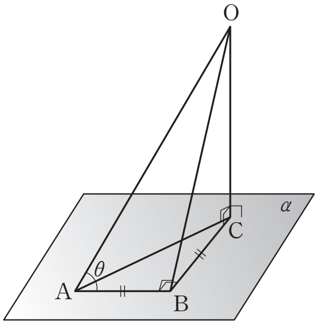
즉, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 직선 OC가 평면 ABC 위의 서로 다른 두 직선 AC, BC와 모두 수직이므로 평면 ABC를 α라 하면

$\overline{OC}\perp\alpha$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OB}\perp\overline{AB}$



따라서 삼각형 OAB는 $\angle ABO=90°$인 직각삼각형이다.

조건 (다)에서 $\overline{OC}=4$이므로 직각삼각형 OBC에서

$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$

이므로

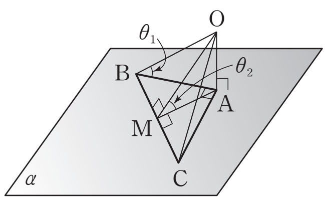
$\sin^2\theta=\left(\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{5}{6}$

따라서 $p=6$, $q=5$이므로

$p+q=6+5=11$

답 11

3



삼각형 ABC가 빗변의 길이가 4이고 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$

이때 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

그러므로

$\cos\theta_1=\cos(\angle OBA)$

$=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

한편, 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}=2$, $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

이때 $\overline{OA}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OM}\perp\overline{BC}$

그러므로

$\cos\theta_2=\cos(\angle OMA)$

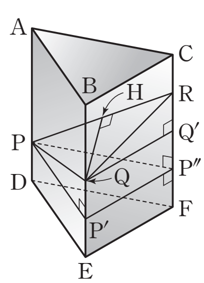
$=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{OM}}=\dfrac{\overline{AM}}{\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AM}^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\cos\theta_1\times\cos\theta_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

4



그림에서 $\overline{PD}=1$, $\overline{QE}=2$, $\overline{RF}=3$

점 P를 지나고 평면 DEF와 평행한 평면이 두 직선 BE, CF와 만나는 점을 각각 P′, P″이라 하면

$\overline{PP'}\perp\overline{BE}$, $\overline{PP''}\perp\overline{CF}$이고

$\overline{PP'}=\overline{PP''}=2$, $\overline{QP'}=1$, $\overline{RP''}=2$

또한 점 Q를 지나고 평면 DEF와 평행한 평면이 직선 CF와 만나는 점을 Q′이라 하면

$\overline{QQ'}\perp\overline{CF}$이고

$\overline{QQ'}=2$, $\overline{RQ'}=1$

직각삼각형 PP′Q에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PP'}^2+\overline{QP'}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 QQ′R에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{QQ'}^2+\overline{RQ'}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 PP″R에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PP''}^2+\overline{RP''}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이므로 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{RH}=\sqrt{2}$

$\overline{QH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

삼각형 PQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{QH}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

한편, 삼각형 PQR의 평면 DEF 위로의 정사영은 정삼각형 DEF이다.

이때 한 변의 길이가 2인 정삼각형 DEF의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

따라서 $\sqrt{6}\cos\theta=\sqrt{3}$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=45^\circ$이고

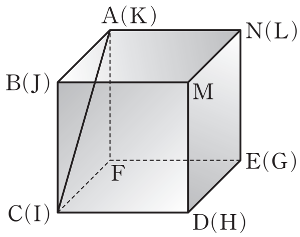
$\tan\theta=\tan45^\circ=1$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 78~79쪽

1 ⑤	2 ③	3 ②	4 ⑤	5 ①
6 ③	7 ④			

1 주어진 전개도에 의해 만들어지는 정육면체는 그림과 같다.



①, ②, ③ 직선 AC는 세 직선 KL, FI, FJ와 각각 한 점에서 만난다.

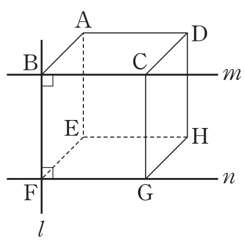
④ 직선 AC는 직선 HL과 평행하다.

⑤ 직선 AC는 직선 GH와 만나지도 않고 평행하지도 않다.

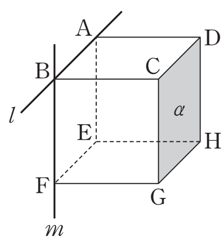
따라서 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 GH이다.

답 ⑤

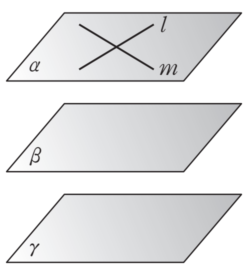
2 ㄱ. (반례) 그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 세 직선 BF, BC, FG를 각각 l, m, n이라 하면 $l\perp m$이고 $l\perp n$이지만 $m /\!/ n$이다. (거짓)



ㄴ. (반례) 그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 두 직선 AB, BF를 각각 l, m이라 하고 평면 CGHD를 α라 하면 $l /\!/ \alpha$이고 $m /\!/ \alpha$이지만 $l\perp m$이다. (거짓)



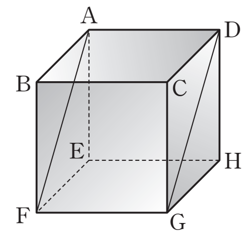
ㄷ. 그림과 같이 평면 α 위에 있고, 한 점에서 만나는 두 직선을 l, m이라 하면 $\alpha /\!/ \beta$이므로 $l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$이다.
두 직선 l, m이 평면 γ와 만난다고 가정하면 $\beta /\!/ \gamma$이므로 두 직선 l, m이 평면 β와도 만난다. 이는 $l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$에 모순이다.
즉, 두 직선 l, m이 평면 γ와 만나지 않는다.
따라서 $l /\!/ \gamma$, $m /\!/ \gamma$이므로 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α는 평면 γ와 평행하다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

3



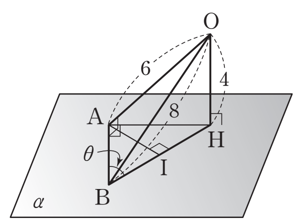
두 직선 AD, EH는 평행하므로 두 직선 AF, EH에 모두 수직인 직선은 두 직선 AF, AD를 포함하는 평면 AFGD에 수직이다.
정육면체 ABCD−EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 평면 AFGD에 수직인 직선은 직선 BE와 직선 CH이다.
따라서 구하는 직선의 개수는 2이다.

답 ②

참고

정육면체 ABCD−EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 직선 EH와 수직인 직선은
직선 AB, 직선 CD, 직선 EF, 직선 GH,
직선 AE, 직선 BF, 직선 CG, 직선 DH,
직선 AF, 직선 BE, 직선 DG, 직선 CH
이고, 이 12개의 직선 중에서 직선 AF와 수직인 직선은 직선 BE와 직선 CH이다.

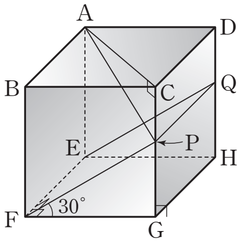
4



$\overline{OH}\perp\alpha$, $\overline{OA}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH}\perp\overline{AB}$이다.
직각삼각형 OAB에서
$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$
직각삼각형 OBH에서
$\overline{BH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$
$\angle ABH=\theta$라 하면 직각삼각형 ABH에서
$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BH}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$
따라서 $\overline{BI}=\overline{AB}\cos\theta=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{6}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

답 ⑤

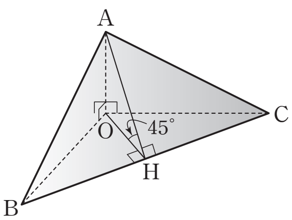
5



$\overline{\text{PG}}\perp$(평면 EFGH), $\overline{\text{FG}}\perp\overline{\text{EF}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\text{PF}}\perp\overline{\text{EF}}$이다.
두 평면 EFPQ, EFGH가 이루는 예각의 크기가 30°이므로
$\angle\text{PFG}=30^\circ$
직각삼각형 PFG에서
$\overline{\text{PG}}=\overline{\text{FG}}\tan 30^\circ=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$
$\overline{\text{CP}}=\overline{\text{CG}}-\overline{\text{PG}}=3-\sqrt{3}$
직각이등변삼각형 ABC에서
$\overline{\text{AC}}=\sqrt{2}\,\overline{\text{AB}}=\sqrt{2}\times3=3\sqrt{2}$
따라서 직각삼각형 ACP에서
$\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{AC}}^2+\overline{\text{CP}}^2=(3\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{3})^2=30-6\sqrt{3}$

답 ①

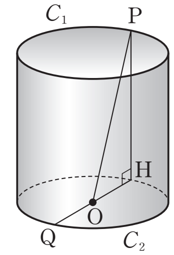
6



$\overline{\text{OA}}\perp\overline{\text{OB}}$, $\overline{\text{OA}}\perp\overline{\text{OC}}$이므로 $\overline{\text{OA}}\perp$(평면 OBC)이다.
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\text{OH}}\perp\overline{\text{BC}}$이다.
이때 두 평면 ABC, OBC가 이루는 예각의 크기가 45°이므로
$\angle\text{AHO}=45^\circ$
$\overline{\text{OA}}\perp\overline{\text{OH}}$이므로 직각삼각형 AOH에서
$\overline{\text{OH}}=\dfrac{\overline{\text{OA}}}{\tan 45^\circ}=\dfrac{1}{1}=1$
삼각형 OBC가 $\overline{\text{OB}}=\overline{\text{OC}}=2$인 이등변삼각형이므로 두 삼각형 OHB, OHC는 서로 합동이고
$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{CH}}=\sqrt{\overline{\text{OB}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BH}}+\overline{\text{CH}}=2\sqrt{3}$
따라서 삼각형 OBC의 넓이를 S라 하면
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{OH}}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

답 ③

7



점 P에서 원 C_2를 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\text{OH}}=a$, $\overline{\text{PH}}=2a$ $(a>0)$이라 하면
$\overline{\text{OP}}=5$이므로 직각삼각형 OPH에서
$\overline{\text{OH}}^2+\overline{\text{PH}}^2=\overline{\text{OP}}^2$
$a^2+(2a)^2=5^2$
$a^2=5$
$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$
한편, 선분 PQ의 원 C_2를 포함하는 평면 위로의 정사영의 길이는 점 Q가 직선 OH와 원 C_2가 만나는 점 중에서 점 H가 아닌 점일 때 최대가 되고, 이때의 정사영의 길이는 원 C_2의 지름의 길이이다.
따라서 구하는 정사영의 길이의 최댓값은
$2a=2\sqrt{5}$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 80~81쪽

1 ①　2 ③　3 ②　4 ②　5 ④
6 ③　7 ③

1 정팔면체 ABCDEF의 모든 꼭짓점 중에서 3개 이상의 꼭짓점을 포함하는 서로 다른 평면은
평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 AEB,
평면 FBC, 평면 FCD, 평면 FDE, 평면 FEB,
평면 ABFD, 평면 ACFE, 평면 BCDE
이므로 $a=11$
위의 11개의 평면 중에서 직선 AB를 포함하는 평면은
평면 ABC, 평면 AEB, 평면 ABFD
이므로 $b=3$
위의 11개의 평면 중에서 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면은
평면 ACD, 평면 ADE, 평면 FBC, 평면 FEB,
평면 ACFE, 평면 BCDE

이므로 $c=6$

정팔면체의 마주보는 두 면은 평행하므로 위의 11개의 평면 중에서 직선 AB와 평행한 평면은

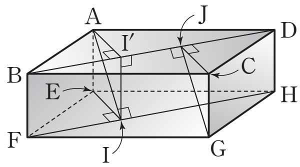
평면 FCD, 평면 FDE

즉, $d=2$

따라서 $ab-cd=11\times3-6\times2=21$

답 ①

2



$\overline{AE}\perp$(평면 EFGH), $\overline{AI}\perp\overline{FH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{EI}\perp\overline{FH}$이다.

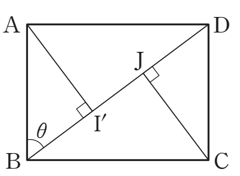
$\overline{CG}\perp$(평면 ABCD), $\overline{GJ}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CJ}\perp\overline{BD}$이다.

직사각형 BFHD에 대하여 점 I에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I′이라 하면

$\overline{II'}\,/\!/\,\overline{AE}$, $\overline{II'}=\overline{AE}=\sqrt{2}$, $\angle AEI=90^\circ$

이므로 사각형 AEII′은 직사각형이고,

$\overline{EI}\perp\overline{FH}$이므로 $\overline{AI'}\perp\overline{BD}$이다.



직사각형 ABCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 ABD에서 $\angle ABD=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{3}{5}$

직각삼각형 ABI′에서

$\overline{BI'}=\overline{AB}\cos\theta=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$

이때 두 삼각형 ABI′, CDJ는 서로 합동이므로

$\overline{JD}=\overline{BI'}=\dfrac{9}{5}$

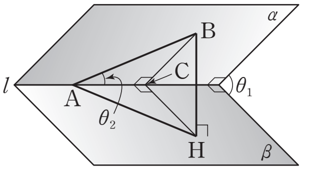
$\overline{I'J}=\overline{BD}-(\overline{BI'}+\overline{JD})=5-\left(\dfrac{9}{5}+\dfrac{9}{5}\right)=\dfrac{7}{5}$

따라서 직각삼각형 IJI′에서

$\overline{IJ}=\sqrt{\overline{II'}^2+\overline{I'J}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{7}{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{5}$

답 ③

3



점 B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 C라 하면

$\overline{BH}\perp\beta$, $\overline{BC}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HC}\perp l$이다.

따라서 $\theta_1=\angle BCH$

$\overline{AB}=12$이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\overline{AB}\sin\theta_2=12\sin\theta_2$

$\theta_2=90^\circ-\theta_1$이므로 직각삼각형 BCH에서

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin\theta_1$

$=12\sin\theta_2\sin\theta_1$

$=12\sin(90^\circ-\theta_1)\sin\theta_1$

$=12\cos\theta_1\sin\theta_1$

이때 $\overline{BH}=3\sqrt{3}$이므로

$12\cos\theta_1\sin\theta_1=3\sqrt{3}$

$4\cos\theta_1\sin\theta_1=\sqrt{3}$

이 식의 양변을 제곱하면

$16\cos^2\theta_1\sin^2\theta_1=3$

$16(1-\sin^2\theta_1)\sin^2\theta_1=3$

$16\sin^4\theta_1-16\sin^2\theta_1+3=0$

$(4\sin^2\theta_1-1)(4\sin^2\theta_1-3)=0$

$\sin^2\theta_1=\dfrac{1}{4}$ 또는 $\sin^2\theta_1=\dfrac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $0^\circ<\theta_1<\theta_2<90^\circ$, $\theta_1+\theta_2=90^\circ$에서 $0^\circ<\theta_1<45^\circ$이므로

$0<\sin\theta_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

즉, ㉠에서 $\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}$이고

$\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

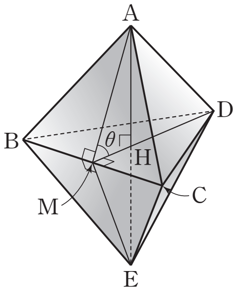
이므로

$\sin\theta_2=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 ②

4 정사면체 ABCD와 면 BCD가 일치하도록 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 BCDE를 놓으면 그림과 같다.



선분 BC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC, BCD가 모두 정삼각형이므로

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta=\angle AMD$이고, 2θ는 두 평면 ABC, EBC가 이루는 둔각의 크기이므로 $2\theta=\angle AME$이다.

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이가 2이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 AMH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MH}^2}$

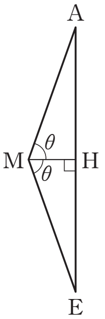
$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

이때 두 정사면체 ABCD, BCDE는 한 면이 일치하고 모든 모서리의 길이가 같으므로

$\overline{EM}=\overline{AM}=\sqrt{3}$

$\overline{EH}=\overline{AH}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{AE}=2\overline{EH}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$



따라서 삼각형 AME에서

$\cos 2\theta=\frac{\overline{AM}^2+\overline{EM}^2-\overline{AE}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{EM}}$

$=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=-\frac{7}{9}$

답 ②

참고

미적분에서 배우는 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 다음과 같이 $\cos 2\theta$의 값을 구할 수도 있다.

직각삼각형 AMH에서

$\cos\theta=\cos(\angle AMH)=\frac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

따라서

$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)$

$=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

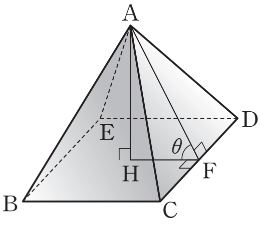
$=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1$

$=-\frac{7}{9}$

5 정사각뿔 A−BCDE의 밑면이 정사각형이고 모든 옆면이 이등변삼각형이므로 삼각형 ACD는 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이다.

선분 AC의 길이를 a, 정사각형 BCDE의 한 변의 길이를 b라 하면 조건 (가)에서 $a^2-\frac{b^2}{4}=8$이다.

꼭짓점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\overline{CF}=\overline{DF}=\frac{b}{2}$

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CF}^2}$

$=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$

$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

정사각뿔 A−BCDE의 겉넓이를 S라 하면

$S=$(정사각형 BCDE의 넓이)$+4\times$(삼각형 ACD의 넓이)

$=b^2+4\times\left(\frac{1}{2}\times b\times 2\sqrt{2}\right)$

$=b^2+4b\sqrt{2}$

이므로 조건 (나)에 의하여

$b^2+4b\sqrt{2}=4+8\sqrt{2}$

이때 b가 유리수이므로

$b^2=4$, $4b=8$

따라서 $b=2$이므로

$a^2=\frac{b^2}{4}+8=\frac{4}{4}+8=9$

$a>0$이므로 $a=3$

한편, 꼭짓점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AF}\perp\overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{FH}\perp\overline{CD}$이고 두 평면 ACD, BCDE가 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta=\angle AFH$이다.
따라서 직각삼각형 AFH에서

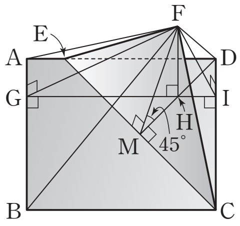
$\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times b=\frac{1}{2}\times 2=1$

이므로

$\cos^2\theta=\left(\frac{\overline{FH}}{\overline{AF}}\right)^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{8}$

답 ④

6



두 직각이등변삼각형 DEC, FEC에 대하여 두 점 D, F에서 선분 CE에 내린 수선의 발은 일치한다. 이 수선의 발을 M이라 하면 두 평면 FEC, ABCD가 이루는 예각의 크기가 45°이므로 $\angle FMD=45°$이다.
이때 $\overline{CD}=\overline{DE}=2$인 직각이등변삼각형 DEC에서

$\overline{DM}=\overline{CD}\sin 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{FM}=\overline{DM}=\sqrt{2}$
점 F에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 DM 위에 있고

$\overline{MH}=\overline{FM}\cos 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\overline{DH}=\overline{DM}-\overline{MH}=\sqrt{2}-1$

$\overline{FH}=\overline{FM}\sin 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

점 H에서 두 선분 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 G, I라 하면 직각이등변삼각형 DHI에서

$\overline{HI}=\overline{DH}\cos 45°=(\sqrt{2}-1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

이때 $\overline{FH}\perp$(평면 ABCD), $\overline{GH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{FG}\perp\overline{AB}$이다.
또한 $\overline{FH}\perp$(평면 ABCD), $\overline{HI}\perp\overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{FI}\perp\overline{CD}$이다.
따라서 $\theta_1=\angle FGH$, $\theta_2=\angle FIH$이므로

$\tan\theta_1=\frac{\overline{FH}}{\overline{GH}}=\frac{1}{\overline{GH}}$

$\tan\theta_2=\frac{\overline{FH}}{\overline{HI}}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$

$\tan\theta_1\tan\theta_2=\frac{2+\sqrt{2}}{\overline{GH}}$

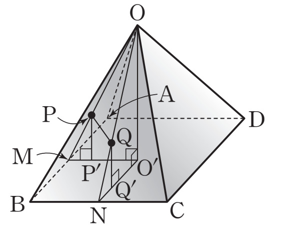
이때 $\tan\theta_1\tan\theta_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{GH}=2$
따라서 삼각형 FAB의 평면 ABCD 위로의 정사영인 삼각형 HAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{GH}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

답 ③

7



세 점 O, P, Q의 평면 ABCD 위로의 정사영을 각각 O′, P′, Q′이라 하고, 두 선분 AB, BC의 중점을 각각 M, N이라 하자.
점 P가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

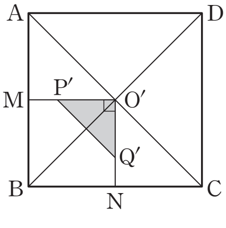
$\overline{OP}:\overline{PM}=2:1$

이때 두 직각삼각형 OMO′, PMP′은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{O'P'}:\overline{P'M}=2:1$

즉, $\overline{O'P'}=\frac{2}{3}\overline{O'M}$

마찬가지 방법으로 $\overline{O'Q'}=\frac{2}{3}\overline{O'N}$



점 O′은 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이고, 삼각형 O′P′Q′은 $\angle P'O'Q'$이 직각인 삼각형이다.
사각형 ABCD는 한 변의 길이가 6인 정사각형이므로

$\overline{O'M}=\overline{O'N}=3$

이고

$\overline{O'P'}=\overline{O'Q'}=\frac{2}{3}\overline{O'M}=\frac{2}{3}\times 3=2$

따라서 삼각형 OPQ의 평면 ABCD 위로의 정사영인 삼각형 O′P′Q′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O'P'}}\times\overline{\mathrm{O'Q'}}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

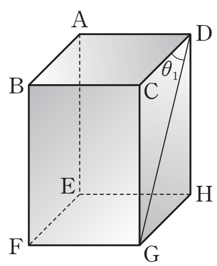
답 ③

Level 3 실력 완성 본문 82~83쪽

1 ⑤ **2** ① **3** 98 **4** ⑤ **5** ③
6 ⑤

1 $\overline{\mathrm{AE}}=a\ (a>1)$이라 하자.

ㄱ. 두 직선 AB, CD가 평행하므로 두 직선 AB, DG가 이루는 예각의 크기는 두 직선 CD, DG가 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, 두 직선 AB, DG가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면 $\theta_1=\angle\mathrm{CDG}$이다.



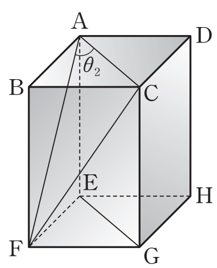
$\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{AE}}=a>1$이고

$\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로 직각삼각형 CDG에서

$\tan\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{CG}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\frac{\overline{\mathrm{CG}}}{1}=\overline{\mathrm{CG}}>1$

이때 $\tan 45^\circ=1$이므로 $\theta_1>45^\circ$이다. (참)

ㄴ. 두 직선 AC, EG가 평행하므로 두 직선 AF, EG가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AF, AC가 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, 두 직선 AF, EG가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면 $\theta_2=\angle\mathrm{CAF}$이다.



$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2}$

$=\sqrt{1^2+a^2}$

삼각형 AFC는 이등변삼각형이고

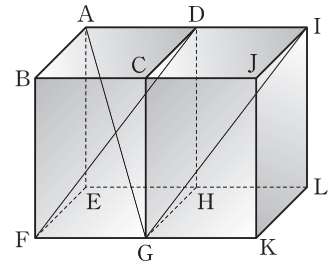
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$\cos\theta_2=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+1}}$

이때 $a>1$이므로 $\cos\theta_2<\frac{1}{2}$이고, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로

$\theta_2>60^\circ$이다. (참)

ㄷ.



직육면체 ABCD−EFGH와 크기가 같은 직육면체 DCJI−HGKL을 면 DCGH가 일치하도록 놓으면 그림과 같고, $\overline{\mathrm{AI}}=2\overline{\mathrm{AD}}=2$이다.

두 직선 DF, IG가 평행하므로 두 직선 AG, DF가 이루는 예각의 크기가 30°이면 두 직선 AG, IG가 이루는 예각의 크기도 30°이다.

즉, $\angle\mathrm{AGI}=30^\circ$이다.

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EG}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{GI}}=\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{EG}}^2}$

$=\sqrt{a^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{a^2+2}$

삼각형 AGI에서

$\overline{\mathrm{AI}}^2=\overline{\mathrm{AG}}^2+\overline{\mathrm{GI}}^2-2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{GI}}\times\cos 30^\circ$

$2^2=(\sqrt{a^2+2})^2+(\sqrt{a^2+2})^2$

$-2\times\sqrt{a^2+2}\times\sqrt{a^2+2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4=(2-\sqrt{3})(a^2+2)$

$a^2+2=\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4(2+\sqrt{3})$

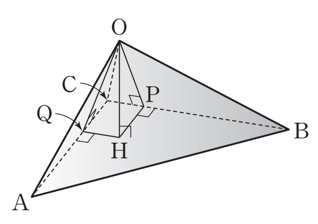
$a^2=6+4\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}^2=a^2+1=(6+4\sqrt{3})+1=7+4\sqrt{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2



사면체 OABC의 꼭짓점 O에서 두 선분 BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.

$\overline{\mathrm{OH}}\perp$(평면 ABC), $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HP}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{OH}\perp$(평면 ABC), $\overline{OQ}\perp\overline{AC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HQ}\perp\overline{AC}$

점 H가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{HP}=\overline{HQ}$, $\overline{CP}=\overline{CQ}$

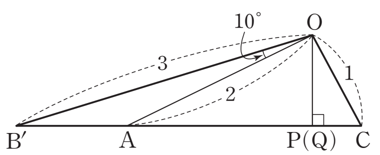
두 삼각형 OHP, OHQ가 서로 합동이므로

$\overline{OP}=\overline{OQ}$

따라서 두 삼각형 OCP, OCQ는 서로 합동이므로

$\angle COP=\angle COQ$

삼각형 OCB를 평면 OCA 위에 변 OC를 공유하고 두 점 P, Q가 일치하도록 놓을 때, 점 B에 해당하는 점을 B′이라 하면 그림과 같다.



이때 $\angle BOC-\angle AOC=10^\circ$이므로 $\angle AOB'=10^\circ$이고

$\overline{BC}-\overline{AC}$의 값은 그림에서 선분 AB′의 길이이다.

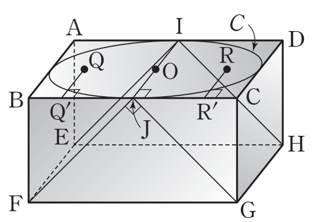
$$\begin{aligned}(\overline{BC}-\overline{AC})^2&=\overline{AB'}^2\\&=\overline{OA}^2+\overline{OB'}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB'}\times\cos 10^\circ\\&=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos 10^\circ\\&=13-12\cos 10^\circ\end{aligned}$$

따라서 $a=13$, $b=-12$이므로

$a+b=13+(-12)=1$

답 ①

3



조건 (가)에 의하여 타원 C의 중심 O는 직사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점이다. 점 O에서 두 선분 AD, BC에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면 세 직선 IJ, EF, GH는 모두 평행하다.

이때 두 평면 OEF, OGH가 서로 수직이므로 $\angle FJG=90^\circ$

점 O가 타원 C의 중심이므로 점 J는 선분 BC의 중점이다.

즉, $\overline{BJ}=\overline{CJ}$에서 $\overline{JF}=\overline{JG}$이므로 $\angle JFG=\angle JGF=45^\circ$

따라서 두 삼각형 JBF, JCG가 서로 합동인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BF}=\overline{BJ}=\overline{CJ}=\overline{CG}=2$

$\overline{BC}=2\overline{BJ}=4$

이때 타원 C는 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2이므로 타원의 두 초점 Q, R 사이의 거리는

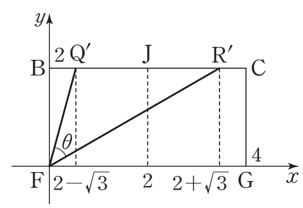
$\overline{QR}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$

이고

$\overline{OQ}=\overline{OR}=\sqrt{3}$

한편, 두 점 Q, R에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 Q′, R′이라 하면 세 직선 QQ′, RR′, EF는 모두 평행하고 두 평면 QEF, REF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 FQ′, FR′이 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, $\theta=\angle Q'FR'$이다.

이때 점 F를 원점, 반직선 FG를 x축의 양의 방향, 반직선 FB를 y축의 양의 방향으로 하여 사각형 FGCB를 xy평면에 놓으면 그림과 같다.



그림에서 $Q'(2-\sqrt{3},\ 2)$, $R'(2+\sqrt{3},\ 2)$이므로

$\overrightarrow{FQ'}=(2-\sqrt{3},\ 2)$, $\overrightarrow{FR'}=(2+\sqrt{3},\ 2)$

$$\begin{aligned}\cos^2\theta&=\cos^2(\angle Q'FR')\\&=\frac{(\overrightarrow{FQ'}\cdot\overrightarrow{FR'})^2}{|\overrightarrow{FQ'}|^2|\overrightarrow{FR'}|^2}\\&=\frac{\{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})+2\times2\}^2}{\{(2-\sqrt{3})^2+2^2\}\{(2+\sqrt{3})^2+2^2\}}=\frac{25}{73}\end{aligned}$$

따라서 $p=73$, $q=25$이므로

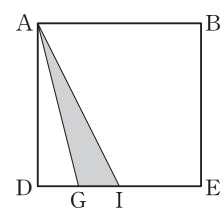
$p+q=73+25=98$

답 98

4 삼각형 AGF의 넓이를 S라 하면 평면 AGF와 삼각기둥 ABC−DEF의 세 개의 옆면이 이루는 예각의 크기에 대한 cos의 값은 다음과 같다.

(i) 두 평면 AGF, ADEB가 이루는 예각의 크기

두 평면 AGF, ADEB가 이루는 예각의 크기를 α_1이라 하자.



정삼각형 DEF의 꼭짓점 F에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 DE의 중점이므로

$\overline{DI}=\overline{IE}=2$

이때 $\overline{DG}=1$이므로

$\overline{GI}=\overline{DI}-\overline{DG}=2-1=1$

삼각형 AGF의 평면 ADEB 위로의 정사영은 삼각형 AGI이고 삼각형 AGI의 넓이는

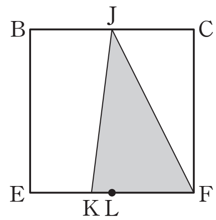
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{GI}}\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times1\times4=2$

따라서 $\cos\alpha_1=\frac{2}{S}$

(ii) 두 평면 AGF, BEFC가 이루는 예각의 크기

두 평면 AGF, BEFC가 이루는 예각의 크기를 α_2라 하자.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J, 점 G에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 K라 하자.



선분 EF의 중점을 L이라 하면

$\overline{\mathrm{EL}}=\overline{\mathrm{LF}}=2$,

$\overline{\mathrm{EK}}:\overline{\mathrm{KL}}=3:1$이므로

$\overline{\mathrm{KL}}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{EL}}=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{KF}}=\overline{\mathrm{KL}}+\overline{\mathrm{LF}}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

이때 삼각형 AGF의 평면 BEFC 위로의 정사영은 삼각형 JKF이고 삼각형 JKF의 넓이는

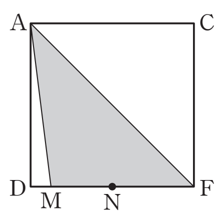
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{KF}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times4=5$

따라서 $\cos\alpha_2=\frac{5}{S}$

(iii) 두 평면 AGF, ADFC가 이루는 예각의 크기

두 평면 AGF, ADFC가 이루는 예각의 크기를 α_3이라 하자.

점 G에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 M, 선분 DF의 중점을 N이라 하면



$\overline{\mathrm{DN}}=\overline{\mathrm{NF}}=2$,

$\overline{\mathrm{DM}}:\overline{\mathrm{MN}}=1:3$이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{DN}}=\frac{3}{4}\times2=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{MF}}=\overline{\mathrm{MN}}+\overline{\mathrm{NF}}=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

이때 삼각형 AGF의 평면 ADFC 위로의 정사영은 삼각형 AMF이고 삼각형 AMF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MF}}\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times4=7$

따라서 $\cos\alpha_3=\frac{7}{S}$

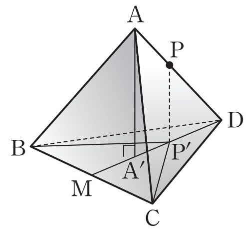
(i)~(iii)에서 $\cos\theta_i$의 최솟값은 $\frac{2}{S}$, 최댓값은 $\frac{7}{S}$이므로

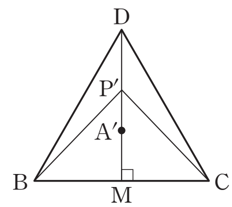
$\frac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i}$의 값은 $\theta_i=\alpha_1$, $\theta_j=\alpha_3$일 때 최댓값을 갖고 그 값은

$$\frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}=\frac{\frac{7}{S}}{\frac{2}{S}}=\frac{7}{2}$$

답 ⑤

5





점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 A′이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하면 사면체 ABCD가 정사면체이므로 점 A′은 삼각형 BCD의 무게중심이고 두 점 A′, P′은 선분 DM 위에 있다.

정삼각형 BCD는 직선 DM에 대하여 대칭이므로 두 삼각형 P′CD, P′DB의 넓이는 같다.

즉, $S_2=S_3$이므로

$S_1=S_2+2S_3=S_2+2S_2=3S_2$

$S_2=S_3=\frac{1}{3}S_1$

삼각형 P′BM의 넓이는 $\frac{1}{2}S_1$이므로 삼각형 DBM에서

두 삼각형 P′BM, P′DB의 넓이의 비는

$\frac{1}{2}S_1:S_3=\frac{1}{2}S_1:\frac{1}{3}S_1=3:2$

따라서 $\overline{\mathrm{P'M}}:\overline{\mathrm{P'D}}=3:2$이므로

$\overline{\mathrm{P'M}}=3a$, $\overline{\mathrm{P'D}}=2a\ (a>0)$이라 하면

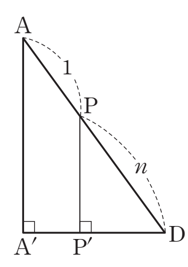
$\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{P'M}}+\overline{\mathrm{P'D}}=5a$

한편, $\overline{\mathrm{DA'}}:\overline{\mathrm{A'M}}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{DA'}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{DM}}=\frac{2}{3}\times5a=\frac{10}{3}a$

$\overline{\mathrm{A'P'}}=\overline{\mathrm{DA'}}-\overline{\mathrm{P'D}}=\frac{10}{3}a-2a=\frac{4}{3}a$

또한 두 직각삼각형 AA′D, PP′D는 서로 닮은 도형이고 점 P가 선분 AD를 $1:n$으로 내분하는 점이므로



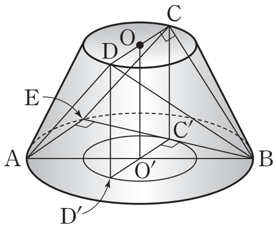
$\overline{\mathrm{A'P'}}:\overline{\mathrm{P'D}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PD}}=1:n$

따라서 $\overline{\mathrm{P'D}}=n\overline{\mathrm{A'P'}}$이므로

$n=\frac{\overline{\mathrm{P'D}}}{\overline{\mathrm{A'P'}}}=\frac{2a}{\frac{4}{3}a}=\frac{3}{2}$

답 ③

6



주어진 원뿔대의 지름의 길이가 2인 밑면의 중심을 O라 하면

$\overline{OC}=\overline{OD}=1$

세 점 O, C, D에서 지름의 길이가 4인 밑면에 내린 수선의 발을 각각 O′, C′, D′이라 하면 주어진 원뿔대의 높이가 2이므로

$\overline{OO'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}=2$

$\overline{O'C'}=\overline{O'D'}=1$

$\overline{O'A}=\overline{O'B}=2$

이때 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°이므로 두 직선 AB, C′D′이 이루는 예각의 크기도 60°이다.

삼각형 O′BC′에서

$\overline{O'B}=2$, $\overline{O'C'}=1$, $\angle BO'C'=60°$

이므로 삼각형 O′BC′은 직각삼각형이고 $\overline{BC'}=\sqrt{3}$이다.

직각삼각형 CC′B에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{CC'}^2+\overline{BC'}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

직각삼각형 OO′B에서

$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OO'}^2+\overline{O'B}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

즉, $\overline{OB}^2=\overline{BC}^2+\overline{OC}^2$이므로 삼각형 OBC는 $\angle OCB=90°$인 직각삼각형이다.

한편, 직선 BC′이 주어진 원뿔대의 지름의 길이가 4인 밑면(원)과 만나는 점 중 점 B가 아닌 점을 E라 하면 두 삼각형 BC′O′, BEA는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 1 : 2이므로

$\overline{EC'}=\overline{BC'}=\sqrt{3}$, $\overline{BE}=2\sqrt{3}$

점 C′은 선분 BE의 중점이므로 두 삼각형 BC′C, EC′C는 서로 합동이고

$\overline{EC}=\overline{BC}=\sqrt{7}$

직각삼각형 OO′E에서

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OO'}^2+\overline{O'E}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

즉, $\overline{OE}^2=\overline{EC}^2+\overline{OC}^2$이므로 삼각형 OCE는 $\angle OCE=90°$인 직각삼각형이다.

또한 두 직선 CD, C′D′이 서로 평행하고 두 직선 AE, C′D′이 서로 평행하므로 두 직선 CD, AE가 서로 평행하다.

그러므로 점 E는 평면 ACD 위의 점이다.

따라서 평면 BCD와 평면 ACD (AECD)가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\angle BCE$이므로 삼각형 BCE에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{EC}^2-\overline{BE}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{EC}}$$

$$=\frac{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+2^2}=\sqrt{11}$

이므로 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{11}}{2}$이다.

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2\times\cos\theta=\pi\times\frac{11}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{11}{28}\pi$$

답 ⑤

07 공간좌표

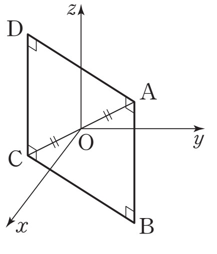
유제 본문 87~93쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ①	5 22
6 ②	7 ②	8 10		

1 점 $P(a,\ b,\ c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점은
$Q(a,\ b,\ -c)$
점 $Q(a,\ b,\ -c)$를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점은
$R(-a,\ -b,\ -c)$
점 R의 좌표가 $(2,\ 4,\ -3)$이므로
$-a=2,\ -b=4,\ -c=-3$
따라서 $a=-2,\ b=-4,\ c=3$이므로
$a+b+c=-2+(-4)+3=-3$

답 ①

2 조건 (가)에서 점 B는 점 $A(a,\ b,\ c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점이므로
$B(a,\ b,\ -c)$
조건 (나)에서 점 C는 점 $A(a,\ b,\ c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이므로
$C(-a,\ -b,\ -c)$



이때 사각형 ABCD가 직사각형이므로
$\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이어야 한다.
즉, 두 점 C, D는 xy평면에 대하여 대칭이어야 하므로
$D(-a,\ -b,\ c)$
조건 (다)에서 $D(-2,\ -2,\ 3)$이므로
$-a=-2,\ -b=-2,\ c=3$에서
$a=2,\ b=2,\ c=3$
따라서 $abc=2\times2\times3=12$

답 ④

3 점 P가 y축 위의 점이므로 $P(0,\ t,\ 0)$이라 하면 두 점 $A(1,\ 3,\ 5)$, $B(-4,\ -2,\ -1)$에 대하여
$\overline{PA}^2=(1-0)^2+(3-t)^2+(5-0)^2$
$=t^2-6t+35$
$\overline{PB}^2=(-4-0)^2+(-2-t)^2+(-1-0)^2$
$=t^2+4t+21$
이때 $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$t^2-6t+35=t^2+4t+21$
$10t=14$
$t=\frac{7}{5}$
따라서 $P\left(0,\ \frac{7}{5},\ 0\right)$이므로
$\overline{OP}=\left|\frac{7}{5}-0\right|=\frac{7}{5}$

답 ③

4 세 점 $A(1,\ 2,\ -1)$, $B(-1,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ a)$에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-2)^2+\{0-(-1)\}^2}$
$=\sqrt{6}$
$\overline{BC}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(0-1)^2+(a-0)^2}$
$=\sqrt{a^2+2}$
$\overline{CA}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(-1-a)^2}$
$=\sqrt{a^2+2a+6}$
삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이어야 한다.
(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$에서
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$6=a^2+2$
$a^2=4$
$a=-2$ 또는 $a=2$
(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$에서
$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로
$a^2+2=a^2+2a+6$
$2a=-4$
$a=-2$
(i), (ii)에서 $a=-2$

답 ①

5 $A(p,\ q,\ r)$라 하면 두 점 A, $B(1,\ 1,\ 2)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}, \frac{r+2}{2}\right)$

이때 선분 AB의 중점이 $M(3, -1, 0)$이므로

$\frac{p+1}{2}=3$, $\frac{q+1}{2}=-1$, $\frac{r+2}{2}=0$에서

$p=5$, $q=-3$, $r=-2$

즉, 점 A의 좌표는 $(5, -3, -2)$이고, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times1-2\times5}{1-2}, \frac{1\times1-2\times(-3)}{1-2}, \frac{1\times2-2\times(-2)}{1-2}\right)$

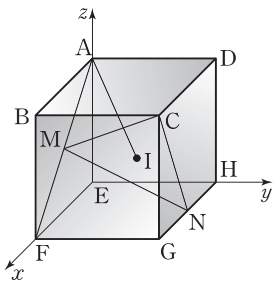
즉, $(9, -7, -6)$

따라서 $a=9$, $b=-7$, $c=-6$이므로

$|a|+|b|+|c|=|9|+|-7|+|-6|=22$

답 22

6 점 E가 원점, 반직선 EF가 x축의 양의 방향, 반직선 EH가 y축의 양의 방향, 반직선 EA가 z축의 양의 방향이 되도록 정육면체 ABCD−EFGH를 놓으면 그림과 같다.



정육면체 ABCD−EFGH의 한 모서리의 길이가 2이므로

$A(0, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$, $F(2, 0, 0)$,

$G(2, 2, 0)$, $H(0, 2, 0)$

점 M은 선분 AF의 중점이므로

$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $M(1, 0, 1)$

점 N은 선분 GH의 중점이므로

$N\left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $N(1, 2, 0)$

점 I는 삼각형 CMN의 무게중심이므로

$I\left(\frac{2+1+1}{3}, \frac{2+0+2}{3}, \frac{2+1+0}{3}\right)$, 즉 $I\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$

따라서

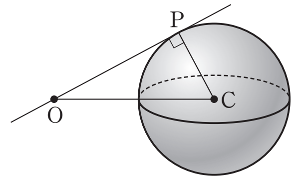
$$\overline{AI}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+(1-2)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{41}}{3}$$

답 ②

7 $x^2+y^2+z^2-8x-2y+2z+14=0$에서

$(x-4)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2^2$

따라서 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(4, 1, -1)$이고 구의 반지름의 길이는 2이다.



원점 O를 지나는 직선이 구와 한 점 P에서만 만날 때는 그림과 같이 구와 점 P에서 접할 때이다.

이때

$\overline{OC}=\sqrt{4^2+1^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{CP}=2$

따라서 $\angle OPC=90°$인 직각삼각형 OPC에서

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}$$
$$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2^2}$$
$$=\sqrt{14}$$

답 ②

8 두 조건 (가), (나)에 의하여 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원을 C라 하면 원 C는 x축과 y축에 모두 접하므로 원 C의 중심의 x좌표와 y좌표는 같다.

이때 구 S의 중심 $P(a, b, c)$에서 xy평면에 내린 수선의 발이 원 C의 중심이고 이 점의 좌표는 $(a, b, 0)$이므로

$a=b$

조건 (나)에서 원 C의 넓이가 8π이므로

$\pi\times a^2=8\pi$

$a^2=8$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

즉, $P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, c)$이고 $\overline{OP}=3\sqrt{2}$에서

$$\overline{OP}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+c^2}$$
$$=\sqrt{c^2+16}=3\sqrt{2}$$

$c^2=2$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{2}$

따라서 점 $P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(2\sqrt{2}, 0, 0)$이고

$$r^2=\overline{PH}^2$$
$$=(2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2+(0-2\sqrt{2})^2+(0-\sqrt{2})^2$$
$$=10$$

답 10

Level 1 기초 연습 본문 94~95쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 ④	5 ③
6 ①	7 ④	8 ⑤		

1 점 $A(1, -3, a)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-1, 3, -a)$이고 이 점이 조건 (나)에 의하여 점 $C(c, d, -5)$와 일치하므로

$-1=c$, $3=d$, $-a=-5$

즉, $a=5$, $c=-1$, $d=3$이므로

$A(1, -3, 5)$, $C(-1, 3, -5)$

조건 (가)에 의하여 두 점 $A(1, -3, 5)$, $B(7, 1, b)$에서 z축에 내린 수선의 발이 일치하므로 두 점 A, B의 z좌표는 같다.

즉, $b=5$

따라서 $ab+cd=5\times5+(-1)\times3=22$

답 ③

2 두 점 $A(a-b, a+b, -2)$, P가 yz평면에 대하여 대칭이므로

$P(-a+b, a+b, -2)$ …… ㉠

두 점 $B(2b-a, 5, c)$, P가 y축에 대하여 대칭이므로

$P(a-2b, 5, -c)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-a+b=a-2b$, $a+b=5$, $-2=-c$

$-a+b=a-2b$에서 $b=\frac{2}{3}a$

$b=\frac{2}{3}a$를 $a+b=5$에 대입하면

$a+\frac{2}{3}a=5$, $\frac{5}{3}a=5$, $a=3$

$a=3$을 $a+b=5$에 대입하면 $b=2$

$-2=-c$에서 $c=2$

따라서 $abc=3\times2\times2=12$

답 ④

3 $A(-3, t, 2)$, $B(1, -4, t)$에서

$$f(t)=\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(-4-t)^2+(t-2)^2}$$
$$=\sqrt{2t^2+4t+36}$$
$$=\sqrt{2(t+1)^2+34}$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{34}$를 갖는다.

답 ②

4 점 P가 xy평면 위의 점이므로 선분 AP의 길이는 점 P가 점 $A(1, 2, 3)$에서 xy평면에 내린 수선의 발, 즉 $P'(1, 2, 0)$에 있을 때 최소가 되고, 점 Q가 zx평면 위의 점이므로 선분 BQ의 길이는 점 Q가 점 $B(4, 5, 6)$에서 zx평면에 내린 수선의 발, 즉 $Q'(4, 0, 6)$에 있을 때 최소가 되어 두 선분 AP, BQ의 길이의 합이 최소가 된다.

따라서 선분 $P'Q'$의 길이는

$$\overline{P'Q'}=\sqrt{(4-1)^2+(0-2)^2+(6-0)^2}=7$$

답 ④

5 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-1)+7}{3}, \frac{1+5+6}{3}, \frac{2+0+(-2)}{3}\right)$$

즉, $(3, 4, 0)$

따라서 $\overline{OG}=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$

답 ③

6 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2\times a+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times\sqrt{2}+1\times3\sqrt{2}}{2+1}\right)$$

즉, $P\left(\frac{2a-1}{3}, 1, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$

점 Q는 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2\times a-1\times(-1)}{2-1}, \frac{2\times(-1)-1\times5}{2-1}, \frac{2\times\sqrt{2}-1\times3\sqrt{2}}{2-1}\right)$$

즉, $Q(2a+1, -7, -\sqrt{2})$

$\overline{PQ}=16$이므로

$$\overline{PQ}^2=\left(2a+1-\frac{2a-1}{3}\right)^2+(-7-1)^2+\left(-\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$=16^2$$

$a^2+2a-99=0$

$(a+11)(a-9)=0$

$a=-11$ 또는 $a=9$

$a>0$이므로 $a=9$

답 ①

다른 풀이

점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

점 Q는 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$\overline{AQ}=2\overline{AB}$

그러므로

$$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=2\overline{AB}-\frac{2}{3}\overline{AB}=\frac{4}{3}\overline{AB}$$

이때 $\overline{PQ}=16$이므로

$\overline{AB}=\frac{3}{4}\overline{PQ}=\frac{3}{4}\times16=12$

따라서 $\overline{AB}^2=144$이므로

$\overline{AB}^2=\{a-(-1)\}^2+(-1-5)^2+(\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2$

$\quad=a^2+2a+45=144$

$a^2+2a-99=0$

$(a+11)(a-9)=0$

$a=-11$ 또는 $a=9$

$a>0$이므로 $a=9$

7 선분 AB가 구 S의 지름이므로 구 S의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이고 반지름의 길이는 $\overline{AC}$이다.

$C\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$에서

$C(1, -1, -2)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(1-0)^2+\{-1-(-3)\}^2+\{-2-(-4)\}^2}=3$

즉, 구 S의 방정식은

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3^2$ ······ ㉠

방정식 ㉠에 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$(x-1)^2+(0+1)^2+(0+2)^2=3^2$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구 S가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-1, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$이므로 이 두 점 사이의 거리는

$|3-(-1)|=4$

답 ④

8 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 C라 하면

$C\left(\frac{1\times5+2\times2}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}, \frac{1\times3+2\times(-3)}{1+2}\right)$

즉, $C(3, 2, -1)$

선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 D라 하면

$D\left(\frac{1\times5-2\times2}{1-2}, \frac{1\times(-2)-2\times4}{1-2}, \frac{1\times3-2\times(-3)}{1-2}\right)$

즉, $D(-1, 10, -9)$

주어진 조건에 의하여 구 S는 점 C를 중심으로 하고 점 D를 지나므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{CD}=\sqrt{(-1-3)^2+(10-2)^2+\{-9-(-1)\}^2}=12$

그러므로 구 S의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=12^2$

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z-130=0$

따라서 $a=-6$, $b=-4$, $c=2$, $d=-130$이므로

$a+b+c+d=-6+(-4)+2+(-130)=-138$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 96~97쪽

1 ⑤ **2** ⑤ **3** ② **4** 6 **5** ③
6 199

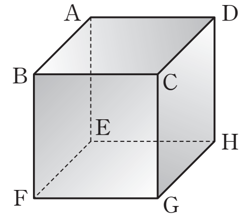
1 두 조건 (가), (나)에 의하여 두 점 A, B는 정육면체 C의 이웃한 점이므로 정육면체 C의 모서리의 길이는 $\overline{AB}$이다.

조건 (나)에서 두 점 $A(-2, -3, 1)$, B가 yz평면에 대하여 대칭이므로 $B(2, -3, 1)$이고

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{-3-(-3)\}^2+(1-1)^2}=4$

따라서 정육면체 C의 모든 모서리의 길이는 4이다.

그림과 같이 정육면체 C의 8개의 꼭짓점을 A, B, C, D, E, F, G, H라 하고, 이 중에서 점 P와 일치하는 점을 찾아보자.



점 $P(a, b, c)$에서

$b>0$, $c<0$이므로 네 점 D, C, G, H의 y좌표는 양수이고, 네 점 E, F, G, H의 z좌표는 음수이다.

네 직선 AD, BC, FG, EH는 모두 y축과 평행하므로 네 점 A, B, F, E의 y좌표는 모두 서로 같고, 네 점 D, C, G, H의 y좌표는 모두 서로 같다. 이때 점 A의 y좌표가 -3이므로 네 점 A, B, F, E의 y좌표는 모두 -3이다. 점 P의 y좌표 b가 양수이므로 점 P는 네 점 D, C, G, H 중의 하나이다.

정육면체 C의 한 모서리의 길이가 4이므로 두 점 A, D의 y좌표의 차도 4이어야 한다.

즉, 점 D의 y좌표는 $-3+4=1$이다.

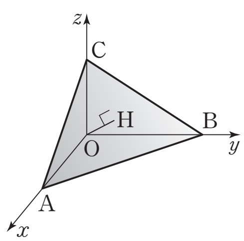
이때 점 P의 y좌표 b가 양수이므로 네 점 D, C, G, H의 y좌표는 모두 1이고, $b=1$이다.

또한 네 직선 AE, BF, CG, DH는 모두 z축과 평행하므로 네 점 A, B, C, D의 z좌표는 모두 서로 같고, 네 점 E, F, G, H의 z좌표는 모두 서로 같다. 이때 점 A의 z좌표가 1이므로 네 점 A, B, C, D의 z좌표는 모두 1이다. 점 P의

z좌표 c가 음수이므로 점 P는 두 점 G, H 중의 하나이다.
정육면체 C의 한 모서리의 길이가 4이므로 두 점 D, H의 z좌표의 차도 4이어야 한다.
즉, 점 H의 z좌표는 $1-4=-3$이다.
이때 점 P의 z좌표 c가 음수이므로 네 점 E, F, G, H의 z좌표는 모두 -3이고, $c=-3$이다.
네 점 A, E, H, D의 x좌표가 모두 -2이고, 네 점 B, F, G, C의 x좌표가 모두 2이므로
$\mathrm{G}(2, 1, -3)$, $\mathrm{H}(-2, 1, -3)$이다.
이때
$2+1+(-3)=0$, $-2+1+(-3)=-4$
이므로 점 P는 점 H이다.
따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=-3$이므로
$abc=(-2)\times1\times(-3)=6$

답 ⑤

2



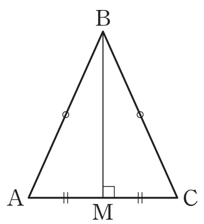
$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OC}}=2$이므로 사면체 OABC의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\right)\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\right)\times2$$
$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편, $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 2)$에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(2\sqrt{2}-0)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{3}$$
$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(0-0)^2+(0-2\sqrt{2})^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$$
$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{2}$
직각삼각형 ABM에서

$$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$$

이므로 사면체 OABC의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{BM}}\right)\times\overline{\mathrm{OH}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{10}\right)\times\overline{\mathrm{OH}}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{3}\times\overline{\mathrm{OH}}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

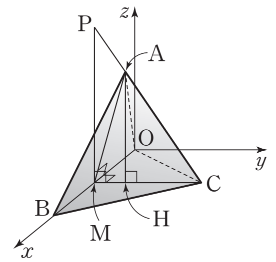
㉠, ㉡에서

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\times\overline{\mathrm{OH}}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ⑤

3



정사면체 OABC의 모든 모서리의 길이가 6이고 $d>0$이므로 $\mathrm{B}(6, 0, 0)$
선분 OB의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 OAB, OBC는 모두 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{OB}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{OB}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$
$\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{BM}}=3$
이고 $\mathrm{M}(3, 0, 0)$
$\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로 직각삼각형 OMC에서

$$\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$$

이때 e, f가 모두 양수이므로 점 C의 좌표는 $(3, 3\sqrt{3}, 0)$
점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 OBC의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{MH}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{CM}}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}=3\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{MH}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$$

이때 a, b, c가 모두 양수이므로 점 A의 좌표는
$(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$
한편, 직선 CM은 zx평면과 수직이고 직선 AC가 zx평면과 만나는 점이 P이므로 두 직선 CM, PM은 수직이다.
두 직각삼각형 CAH, CPM은 서로 닮은 도형이고, 닮음비는 $\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{CM}}=2:3$이므로

$\overline{AH} : \overline{PM} = 2 : 3$

$\overline{PM} = \frac{3}{2}\overline{AH} = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

따라서 점 P의 z좌표는 $3\sqrt{6}$이다.

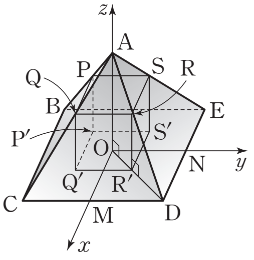
답 ②

$pqr = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

따라서 $8\sqrt{2}pqr = 8\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{8} = 6$

답 6

4



정사각뿔 A$-$BCDE의 꼭짓점 A가 z축 위에 있으므로 점 A에서 평면 BCDE, 즉 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.

네 직선 BC, CD, DE, EB가 각각 x축 또는 y축과 평행하고 정사각뿔 A$-$BCDE의 모든 모서리의 길이가 3이므로 x축과 선분 CD가 만나는 점을 M, y축과 선분 DE가 만나는 점을 N이라 하면

$\overline{OM} = \overline{ON} = \frac{3}{2}$

그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$이고

$\overline{OD} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AD} = 3$이므로 직각삼각형 AOD에서

$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 정사각뿔 A$-$BCDE의 부피 V는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \overline{BC}^2 \times \overline{OA} \\ &= \frac{1}{3} \times 3^2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

한편, 점 R(p, q, r)에서

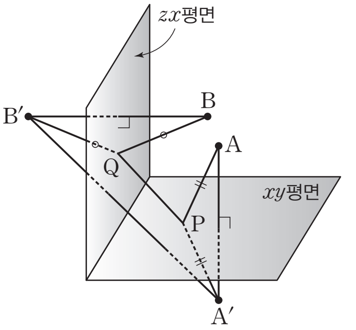
$\overline{RS} = 2p$, $\overline{QR} = 2q$, $\overline{RR'} = r$

이고 직육면체 PQRS$-$P′Q′R′S′의 부피가 $\frac{1}{3}V$이므로

$2p \times 2q \times r = \frac{1}{3}V$

$4pqr = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2}$

5



점 A(1, 2, 1)을 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 A′(1, 2, -1)이고

$\overline{AP} = \overline{A'P}$

점 B(-1, 3, 3)을 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′이라 하면 B′(-1, -3, 3)이고

$\overline{QB} = \overline{QB'}$

그러므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} + \overline{BA} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} + \overline{BA} \\ &\geq \overline{A'B'} + \overline{BA} \end{aligned}$$

이때

$\overline{A'B'} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = 3\sqrt{5}$

$\overline{BA} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-2)^2 + (3-1)^2} = 3$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} + \overline{BA}$의 최솟값은

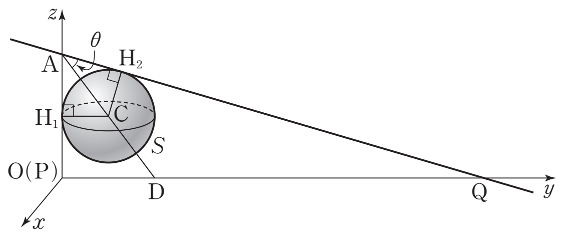
$\overline{A'B'} + \overline{BA} = 3(\sqrt{5} + 1)$

답 ③

6 구 S: $x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3^2$의 중심을 C라 하면 C(0, 3, 4)이고 구 S의 반지름의 길이가 3이므로 구 S는 z축에 접한다.

즉, 원점 O에 대하여 구 S가 직선 AO와 접하므로 두 점 P, Q 중에서 점 P를 점 O라 하자.

두 점 A, C가 모두 yz평면 위의 점이므로 그림과 같이 직선 AC는 y축과 만난다.



점 C$(0,\ 3,\ 4)$에서 z축에 내린 수선의 발을 H_1, 직선 AC가 y축과 만나는 점을 D라 하면 $H_1(0,\ 0,\ 4)$이므로

$\overline{AH_1}=4$, $\overline{CH_1}=3$

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{CH_1}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

두 직각삼각형 AH_1C, AOD는 서로 닮은 도형이고, 닮음비는 $\overline{AH_1} : \overline{AO}=4 : 8=1 : 2$이므로

$\overline{OD}=2\overline{CH_1}=2\times3=6$

$\overline{AD}=2\overline{AC}=2\times5=10$

구 S의 중심 C에서 직선 AQ에 내린 수선의 발을 H_2라 하고 $\angle CAH_2=\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하면 두 삼각형 AH_1C, AH_2C는 서로 합동이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AH_2}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}}=\dfrac{4}{5}$

점 Q의 좌표를 $(0,\ a,\ 0)\ (a>6)$이라 하면

$\overline{DQ}=\overline{OQ}-\overline{OD}=a-6$

$\overline{AQ}=\sqrt{(0-0)^2+(a-0)^2+(0-8)^2}=\sqrt{a^2+64}$

삼각형 ADQ에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AD}^2+\overline{AQ}^2-\overline{DQ}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{AQ}}$$
$$=\frac{10^2+(\sqrt{a^2+64})^2-(a-6)^2}{2\times10\times\sqrt{a^2+64}}=\frac{4}{5}$$

$3a+32=4\sqrt{a^2+64}$

$(3a+32)^2=16(a^2+64)$

$9a^2+192a+1024=16a^2+1024$

$a(7a-192)=0$

$a>6$이므로 $a=\dfrac{192}{7}$

그러므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(0,\ 0,\ 0)$, $\left(0,\ \dfrac{192}{7},\ 0\right)$이다.

또 점 Q를 점 O라 하면 마찬가지 방법으로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\left(0,\ \dfrac{192}{7},\ 0\right)$, $(0,\ 0,\ 0)$이다.

따라서 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{192}{7}$이므로 $p=7$, $q=192$이고

$p+q=7+192=199$

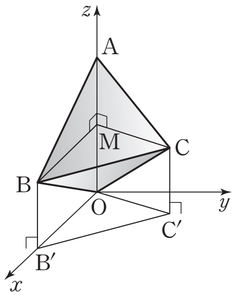
답 199

Level 3 실력 완성

본문 98~99쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 6 4 ④ 5 ④
6 ②

1



ㄱ. $\overline{OA}=4$이므로 정사면체 OABC의 모든 모서리의 길이는 4이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\overline{OM}=2$

이때 $\overline{BM}\perp\overline{OA}$, $\overline{CM}\perp\overline{OA}$이므로 직선 OA, 즉 z축은 평면 BCM과 수직이다.

따라서 세 점 M, B, C의 z좌표는 모두 2로 같으므로

$b=e=2$ (참)

ㄴ. $\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{AB}=\overline{BC}=4$

이므로 직각삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{CM}=\overline{BM}=2\sqrt{3}$

점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발이 원점 O이므로 두 점 B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′이라 하면

$\overline{B'O}=\overline{BM}=\overline{C'O}=\overline{CM}=2\sqrt{3}$

$\overline{B'C'}=\overline{BC}=4$

따라서 $B'(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$, $C'(c,\ d,\ 0)$이므로

$\overline{C'O}^2=c^2+d^2+0^2=(2\sqrt{3})^2$에서

$c^2+d^2=12$ …… ㉠

$\overline{B'C'}^2=(c-2\sqrt{3})^2+(d-0)^2+(0-0)^2=4^2$에서

$c^2+d^2-4\sqrt{3}c=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12-4\sqrt{3}c=4$, $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하면 $d>0$이므로

$d=\sqrt{12-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

따라서 $cd=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 점 B′의 x좌표가 $2\sqrt{3}$이므로 점 B의 x좌표도 $2\sqrt{3}$이다.

즉, $\mathrm{B}(2\sqrt{3},\ 0,\ 2)$

네 점 O, A, B, C를 지나는 구를 S라 하고 구 S의 중심을 $\mathrm{D}(p,\ q,\ r)$라 하면

$\overline{\mathrm{DO}}^2=\overline{\mathrm{DA}}^2=\overline{\mathrm{DB}}^2=\overline{\mathrm{DC}}^2$

정사면체 OABC는 평면 BCM에 대하여 대칭이므로 구의 중심 D는 평면 BCM 위에 있다.

이때 평면 BCM 위의 모든 점의 z좌표가 모두 2이므로 $r=2$이다.

$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 4)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{3},\ 0,\ 2)$,

$\mathrm{C}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{4\sqrt{6}}{3},\ 2\right)$, $\mathrm{D}(p,\ q,\ 2)$에서

$$\overline{\mathrm{DO}}^2=p^2+q^2+2^2$$
$$=p^2+q^2+4$$
$$\overline{\mathrm{DA}}^2=(0-p)^2+(0-q)^2+(4-2)^2$$
$$=p^2+q^2+4$$
$$\overline{\mathrm{DB}}^2=(2\sqrt{3}-p)^2+(0-q)^2+(2-2)^2$$
$$=p^2+q^2-4\sqrt{3}p+12$$
$$\overline{\mathrm{DC}}^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-p\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}-q\right)^2+(2-2)^2$$
$$=\left(p-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(q-\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

$\overline{\mathrm{DA}}^2=\overline{\mathrm{DB}}^2$이므로

$$p^2+q^2+4=p^2+q^2-4\sqrt{3}p+12$$
$$4\sqrt{3}p=8$$
$$p=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{\mathrm{DA}}^2=\overline{\mathrm{DC}}^2$이므로

$$p^2+q^2+4=\left(p-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(q-\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

이 식에 $p=\frac{2\sqrt{3}}{3}$을 대입하면

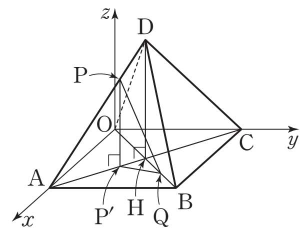
$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+q^2+4=0^2+\left(q-\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$$
$$\frac{8\sqrt{6}}{3}q=\frac{16}{3}$$
$$q=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $pqr=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2



$\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{6}$이고 사각형 OABC는 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 OB의 중점이다.

즉, $\mathrm{H}(1,\ 1,\ 0)$이고,

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 DAH에서

$\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$

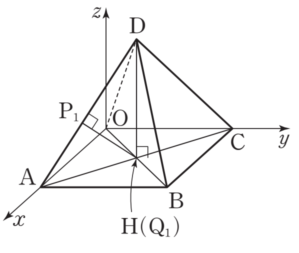
그러므로 점 D의 좌표는 $(1,\ 1,\ 2)$이다.

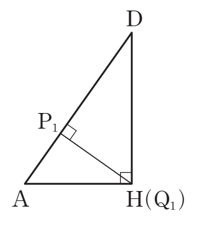
한편, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 점 P′은 선분 AH 위의 점이고, 점 Q가 선분 OB 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{P'Q}}\ge\overline{\mathrm{P'H}}$

따라서 점 Q가 점 H에 있고 점 P가 점 H에서 선분 AD에 내린 수선의 발에 있을 때, 선분 PQ의 길이가 최소가 되므로

$\mathrm{Q}_1(1,\ 1,\ 0)$





점 H에서 선분 AD에 내린 수선의 발이 P_1, 점 H가 Q_1이고 두 삼각형 AHP_1, ADH가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AP}_1}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AH}}$에서

$$\overline{\mathrm{AP}_1}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $\overline{\mathrm{DP}_1}=\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AP}_1}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}_1}:\overline{\mathrm{DP}_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}:\frac{2\sqrt{6}}{3}=1:2$$

즉, 점 P_1은 선분 AD를 $1:2$로 내분하는 점이다.

이때 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(1,\ 1,\ 2)$이므로

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{1\times1+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times1+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times2+2\times0}{1+2}\right)$$

즉, $\mathrm{P}_1\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{3}$, $d=1$, $e=1$이므로

$$\frac{a+b+c}{d+e}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}$$

답 ③

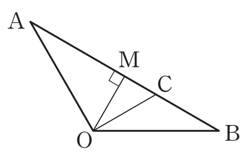
3 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$

점 B가 xy평면 위의 점이므로 점 B의 좌표를 $(p,\ q,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{p^2+q^2+0^2}=\sqrt{p^2+q^2}$

조건 (가)의 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$이므로

$p^2+q^2=8$ …… ㉠



삼각형 AOB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로 두 선분 OM, AB는 서로 수직이다.

직각삼각형 OMA에서

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

두 삼각형 AOM, BOM은 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{6}$

이때

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(p-1)^2+\{q-(-1)\}^2+(0-\sqrt{6})^2}$

$\quad=\sqrt{p^2+q^2-2p+2q+8}=2\sqrt{6}$

$p^2+q^2-2p+2q=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8-2p+2q=16$

$q=p+4$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$p^2+(p+4)^2=8$

$2(p+2)^2=0$

$p=-2$

$p=-2$를 ㉢에 대입하면 $q=2$이므로 $\mathrm{B}(-2,\ 2,\ 0)$이다.

한편, 직선 OC가 $\angle$BOM의 이등분선이고

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OM}}=2\sqrt{2}:\sqrt{2}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{MC}}=2:1$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{MC}}$이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MC}}$

$\quad=\overline{\mathrm{BM}}+\overline{\mathrm{MC}}$

$\quad=3\overline{\mathrm{MC}}+\overline{\mathrm{MC}}$

$\quad=4\overline{\mathrm{MC}}$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=4\overline{\mathrm{MC}}:2\overline{\mathrm{MC}}=2:1$, 즉 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\mathrm{C}\left(\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times2+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times\sqrt{6}}{2+1}\right)$

즉, $\mathrm{C}\left(-1,\ 1,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$(3abc)^2=\left\{3\times(-1)\times1\times\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}^2=6$

답 6

4 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-4)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-3-2)^2+(1-2)^2+(1-2)^2}=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{51}$

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$

$\quad=\frac{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{51})^2}{2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}$

$\quad=-\frac{1}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\theta$

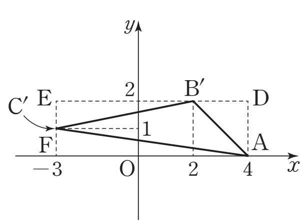
$\quad=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\quad=6\sqrt{2}$

두 점 B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′이라 하면

$\mathrm{B'}(2,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C'}(-3,\ 1,\ 0)$

세 점 A, B′, C′을 xy평면에 나타내면 그림과 같다.



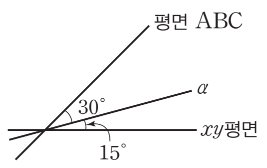
D$(4,\ 2,\ 0)$, E$(-3,\ 2,\ 0)$, F$(-3,\ 0,\ 0)$이라 하자.
삼각형 AB′C′의 넓이는 직사각형 ADEF의 넓이에서 세 삼각형 ADB′, B′EC′, C′FA의 넓이의 합을 뺀 것과 같으므로 삼각형 AB′C′의 넓이를 S'이라 하면

$$\begin{aligned}S' &= \overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AD}}\\ &\quad -\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{B'D}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EB'}}\times\overline{\mathrm{EC'}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FA}}\times\overline{\mathrm{C'F}}\right)\\ &=7\times2-\left(\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times5\times1+\frac{1}{2}\times7\times1\right)\\ &=6\end{aligned}$$

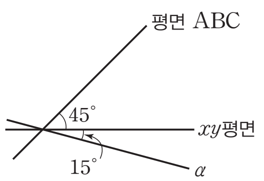
평면 ABC와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ'이라 하면
$S'=S\cos\theta'$에서

$$\cos\theta'=\frac{S'}{S}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $\theta'=45^\circ$
두 조건 (가), (나)에 의하여 평면 α, 평면 ABC, xy평면의 위치 관계는 그림과 같이 두 가지 경우가 있다.



[그림 1]



[그림 2]

(ⅰ) [그림 1]의 경우
평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 30°이므로 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$S\cos30^\circ=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$$

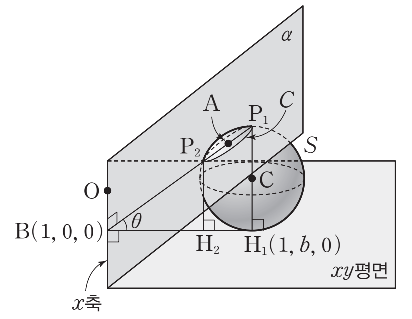
(ⅱ) [그림 2]의 경우
평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 60°이므로 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$S\cos60^\circ=6\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=3\sqrt{6}$, $m=3\sqrt{2}$이므로
$Mm=3\sqrt{6}\times3\sqrt{2}=18\sqrt{3}$

답 ④

5 구 S의 중심을 C$(a,\ b,\ c)$ $(b>0)$이라 하자.
두 조건 (가), (나)에 의하여 $a=1$, $c=5$이므로 C$(1,\ b,\ 5)$이고, 조건 (다)에 의하여 구 S의 반지름의 길이는 5, 지름의 길이는 10이다.

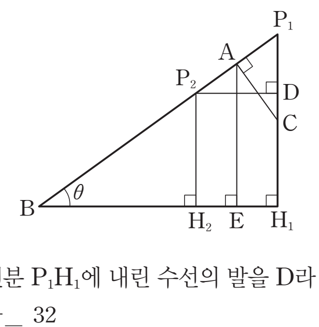


점 C$(1,\ b,\ 5)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면 $\mathrm{H_1}(1,\ b,\ 0)$
직선 $\mathrm{CH_1}$이 구 S와 만나는 점 중에서 점 $\mathrm{H_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{P_1}$이라 하면 $\mathrm{P_1}(1,\ b,\ 10)$이고
$\overline{\mathrm{P_1H_1}}=10$, $\overline{\mathrm{P_1C}}=5$
이때 선분 PH의 길이의 최댓값이 10이므로 점 $\mathrm{P_1}$은 원 C 위의 점이다.
원점을 O라 하고 점 $\mathrm{H_1}$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하면 B$(1,\ 0,\ 0)$이고
$\overline{\mathrm{P_1H_1}}\perp(xy$평면$)$, $\overline{\mathrm{OB}}\perp\overline{\mathrm{H_1B}}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{P_1B}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$
원 C의 중심을 A, 직선 $\mathrm{P_1A}$가 원 C와 만나는 점 중에서 점 $\mathrm{P_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{P_2}$, 점 $\mathrm{P_2}$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.
네 점 $\mathrm{P_1}$, A, $\mathrm{P_2}$, B는 한 직선 위에 있고 점 A의 x좌표는 1이다.

이때 선분 PH의 길이의 최솟값이 $\frac{32}{5}$이므로

$$\overline{\mathrm{P_2H_2}}=\frac{32}{5}$$

또한 점 A에서 선분 $\mathrm{BH_1}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 A의 y좌표는 선분 BE의 길이이다.



점 $\mathrm{P_2}$에서 선분 $\mathrm{P_1H_1}$에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{P_2H_2}}=\frac{32}{5}$$

$$\overline{\mathrm{P_1D}}=\overline{\mathrm{P_1H_1}}-\overline{\mathrm{DH_1}}=10-\frac{32}{5}=\frac{18}{5}$$

두 삼각형 $\mathrm{P_1P_2D}$, $\mathrm{P_1CA}$는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{P_1P_2}} : \overline{\mathrm{P_1D}} = \overline{\mathrm{P_1C}} : \overline{\mathrm{P_1A}}$에서

$\overline{\mathrm{P_1P_2}} \times \overline{\mathrm{P_1A}} = \overline{\mathrm{P_1C}} \times \overline{\mathrm{P_1D}}$

이때 $\overline{\mathrm{P_1P_2}} = 2\overline{\mathrm{P_1A}}$이므로

$2\overline{\mathrm{P_1A}}^2 = \overline{\mathrm{P_1C}} \times \overline{\mathrm{P_1D}}$

$\overline{\mathrm{P_1A}}^2 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{P_1C}} \times \overline{\mathrm{P_1D}} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{18}{5} = 9$

$\overline{\mathrm{P_1A}} > 0$이므로 $\overline{\mathrm{P_1A}} = 3$이고

$\overline{\mathrm{P_1P_2}} = 2\overline{\mathrm{P_1A}} = 2 \times 3 = 6$

$\overline{\mathrm{P_2D}} = \sqrt{\overline{\mathrm{P_1P_2}}^2 - \overline{\mathrm{P_1D}}^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}$

한편, $\overline{\mathrm{AE}} = \frac{\overline{\mathrm{P_1H_1}} + \overline{\mathrm{P_2H_2}}}{2} = \frac{10 + \frac{32}{5}}{2} = \frac{41}{5}$이고

두 삼각형 $\mathrm{P_1P_2D}$, ABE는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{P_1D}} : \overline{\mathrm{P_2D}} = \frac{18}{5} : \frac{24}{5} = 1 : \frac{4}{3}$

$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{4}{3}\,\overline{\mathrm{AE}} = \frac{4}{3} \times \frac{41}{5} = \frac{164}{15}$

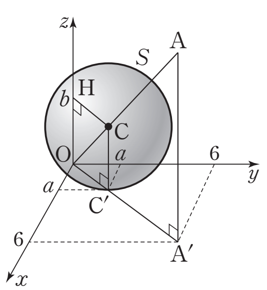
즉, 점 A의 y좌표는 $\frac{164}{15}$이다.

따라서 점 A의 x좌표와 y좌표의 합은

$1 + \frac{164}{15} = \frac{179}{15}$

답 ④

6



구 S의 중심 $\mathrm{C}(a,\ a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C'}$이라 하면

$\mathrm{C'}(a,\ a,\ 0)$, $\overline{\mathrm{CC'}} = b$

조건 (가)에 의하여 구 S와 xy평면은 점 $\mathrm{C'}$에서 접하므로 구 S의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CC'}} = b$이다.

구 S의 중심 $\mathrm{C}(a,\ a,\ b)$에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\mathrm{H}(0,\ 0,\ b)$, $\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{C'O}}$

조건 (나)에 의하여 구 S와 z축은 점 H에서 접하고 구 S의 반지름의 길이는 선분 CH의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{CC'}} = \overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{C'O}} = \sqrt{a^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2}a$

$b = \sqrt{2}a$

따라서 구 S는 중심이 $\mathrm{C}(a,\ a,\ \sqrt{2}a)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}a$인 구이므로 구 S의 방정식은

$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-\sqrt{2}a)^2 = (\sqrt{2}a)^2$

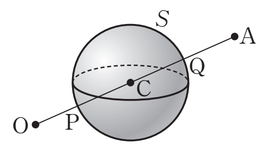
한편, 점 $\mathrm{A}(6,\ 6,\ 6\sqrt{2})$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A'}$이라 하면

$\mathrm{A'}(6,\ 6,\ 0)$

세 점 O, $\mathrm{C'}$, $\mathrm{A'}$은 xy평면 위의 직선 $y=x$ 위에 있고 두 삼각형 $\mathrm{COC'}$, $\mathrm{AOA'}$은 직각이등변삼각형으로 서로 닮음이므로 세 점 O, C, A도 한 직선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{a^2 + a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = 2a$

이고 $\overline{\mathrm{OP}} < \overline{\mathrm{OQ}}$이므로



$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{PC}}$

$= 2a - \sqrt{2}a = (2-\sqrt{2})a$

$\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{QC}}$

$= 2a + \sqrt{2}a = (2+\sqrt{2})a$

조건 (다)에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = (2-\sqrt{2})a \times (2+\sqrt{2})a = 2a^2 = 8$

$a^2 = 4$

$a > 0$이므로 $a = 2$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PC}} + \overline{\mathrm{QC}} = 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OQ}} = (2+\sqrt{2})a = 2(2+\sqrt{2})$

또한

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{6^2 + 6^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OQ}}$

$= 12 - 2(2+\sqrt{2}) = 2(4-\sqrt{2})$

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{AQ}} = 4\sqrt{2} \times 2(4-\sqrt{2}) = 16(2\sqrt{2}-1)$

답 ②

MEMO