2 수열의 합

01 합의 기호 $\sum$

02 여러 가지 수열의 합

> 수학에 사용되는 모든 기호는, 우리가 발견의 여정에서 사용하는 수단으로 이해할 수 있다.

(출처: Buchanan, S. M., 『Poetry and Mathematics』)

부캐넌(Buchanan, S. M., 1895~1968)
미국의 철학자

이 글은 1929년 부캐넌이 출간한 『시와 수학(Poetry and Mathematics)』에 나오는 것으로, 그는 기호를 사용하여 수학의 내용을 쉽게 표현할 수 있음을 말하고 있다.

01 합의 기호 $\sum$

학습 목표

$\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

준비하기

다음 수열의 일반항 a_n을 추측해 보시오.

$1\times3,\ 2\times4,\ 3\times5,\ 4\times6,\ \cdots$

다가서기

그래픽 심벌은 언어, 국가, 민족에 관계없이 누구나 빠르고 쉽게 이해할 수 있도록 만든 기호이며, 수학에서 사용하는 ${}_n\mathrm{P}_r$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $n!$도 수의 계산을 나타내는 기호이다.
수열의 합도 기호를 사용하여 간단히 나타낼 수 있다.

횡단보도

어린이 보호

보행자 전용 도로

자전거 전용 도로

회전 교차로

보행자 보행 금지

합의 기호 $\sum$

생각 열기 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 추측해 보자.

❷ $1+3+5+\cdots+81$은 이 수열의 첫째항부터 제몇 항까지의 합인지 말해 보자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

은 합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k$로 나타낼 수 있다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

이다.

기호 $\sum$는 합을 뜻하는 Sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자로, 'sigma'라고 읽는다.

한편, $m\le n$일 때 제m항부터 제n항까지의 합은 $\sum_{k=m}^{n} a_k$로 나타낸다.

참고 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 k 대신에 다른 문자를 사용하여 $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_j$, $\sum_{m=1}^{n} a_m$ 등으로 나타내기도 한다.

보기 ① $1+4+7+\cdots+28=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$

② $\sum_{i=4}^{13} 2^i=2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{13}$

문제 1 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $2+4+6+\cdots+20$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

문제 2 다음을 합의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=3}^{8}(4k+1)$ (2) $\sum_{j=1}^{n}j^3$

탐구 **문제 3** 기호 $\sum$를 사용하면 수열의 합을 다양한 방법으로 나타낼 수 있다. 다음에 답하시오.

(1) 다음 등식이 성립하도록 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-3)=\sum_{k=3}^{\square}(\boxed{})$$

(2) 등차수열 108, 112, 116, $\cdots$, 1004의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 다양한 방법으로 나타내고, 친구들과 비교하시오.

$\sum$의 성질

다음을 통해 합의 기호 $\sum$의 성질을 알아보자.

함께하기 다음은 두 수열의 합과 실수배에 대한 기호 $\sum$의 성질을 알아보는 과정이다.

■ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(\boxed{})\end{aligned}$$

■ 수열 $\{a_n\}$과 상수 c에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k&=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n\\&=c(\boxed{})\end{aligned}$$

활동 ❶ $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ❷ 다음 식을 완성해 보자.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}\square+\sum_{k=1}^{n}b_k,\quad \sum_{k=1}^{n}ca_k=\square\sum_{k=1}^{n}a_k$$

위의 활동에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k,\quad \sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

문제 4 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 상수 c에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각 톡톡

$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$ 가 성립할까?

∑의 성질

❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ ❷ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

❸ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수) ❹ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

보기 ① $\sum_{k=1}^{n}(3a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{n}3a_k-\sum_{k=1}^{n}2b_k=3\sum_{k=1}^{n}a_k-2\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{100}3=3\times100=300$

문제 5 $\sum_{k=1}^{10}a_k=30$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=20$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-3b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}3(a_k+b_k-1)$

생각 넓히기

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 있다.

9, 98, 997, 9996, 99995, ⋯, 9999999990, ⋯

활동 ❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 추측해 보자.

활동 ❷ 9999999990은 수열 $\{a_n\}$의 제몇 항인지 말해 보자.

활동 ❸ 등차수열 및 등비수열의 합과 기호 ∑의 성질을 이용하여 다음 식의 값을 구해 보자.

$$9+98+997+9996+99995+\cdots+9999999990$$

02 여러 가지 수열의 합

학습 목표

여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

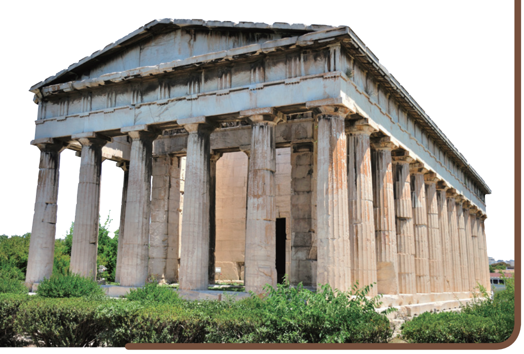
준비하기

다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 정하시오.

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

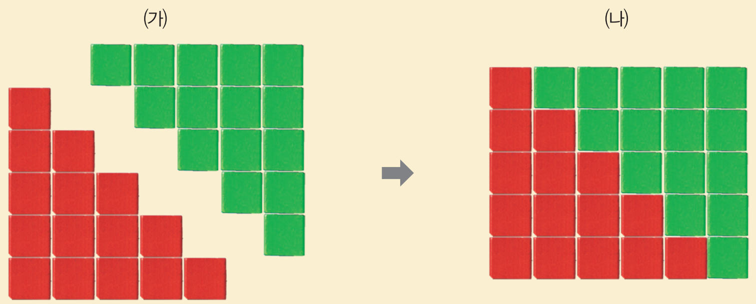
다가서기

고대 그리스인들은 만물을 수라 생각하여 자연과 우주의 현상을 수로 설명하고자 노력하였으며, 여러 가지 수의 개념을 발전시켰다.
또한, 1부터 n까지의 자연수의 합, 자연수의 제곱의 합, 자연수의 세제곱의 합을 구하는 방법을 이미 알고 있었다.



여러 가지 수열의 합

생각 열기 다음은 (가)의 빨간색 블록과 초록색 블록을 (나)와 같이 맞춘 것이다.



위의 그림으로부터 $1+2+3+4+5=\frac{5\times6}{2}$이 성립함을 말해 보자.

자연수의 거듭제곱의 합을 구해 보자.

1부터 n까지의 자연수의 합은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k&=1+2+3+\cdots+n\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

이제 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n}k^2$을 구해 보자.

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$에 $k=1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하면 다음과 같다.

$(k+1)^3$
$=k^3+3k^2+3k+1$

$$\begin{aligned}
&k=1\text{일 때}, && 2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1\\
&k=2\text{일 때}, && 3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1\\
&k=3\text{일 때}, && 4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&k=n\text{일 때}, && (n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1
\end{aligned}$$

앞의 식에서

$$\begin{array}{r} 2^3-1^3 \\ 3^3-2^3 \\ 4^3-3^3 \\ \vdots \\ +\underline{)\ (n+1)^3-n^3} \\ (n+1)^3-1^3 \end{array}$$

이 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$\begin{aligned}(n+1)^3-1^3&=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+1\times n\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

탐구 **문제 1** 다음은 1부터 n까지의 자연수의 세제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n}k^3$을 항등식

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

을 이용하여 구하는 과정의 일부이다. 물음에 답하시오.

$k=1$일 때,	$2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$
$k=2$일 때,	$3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$
$k=3$일 때,	$4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$
$\vdots$	$\vdots$
$k=n$일 때,	$(n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1$

(1) 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 보이시오.

이상을 정리하면 다음과 같다.

자연수의 거듭제곱의 합

❶ $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

❷ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❸ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

보기 ① $1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9(9+1)(2\times9+1)}{6}=\frac{9\times10\times19}{6}=285$

② $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2=3025$

문제 2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$

여러 가지 수열의 합을 구해 보자.

예제 1 다음 합을 구하시오.

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$$

자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

문제 3 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$

(2) $\sum_{k=1}^{8}k(k+1)(k-1)$

문제 4 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+15\times17$

(2) $2^3+5^3+8^3+\cdots+17^3$

예제 2 다음 합을 구하시오.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

풀이 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

문제 5 다음 합을 구하시오.

(1) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(2) 분모를 유리화한다.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

일반적으로 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합, 즉 $\sum_{k=m}^{n}a_k$는 다음과 같이 구할 수 있다.

(단, $1<m\leq n$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}a_k&=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1})\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k\end{aligned}$$

활동 1 위의 방법을 이용하여 $4^2+5^2+6^2+\cdots+13^2$의 값을 구해 보자.

활동 2 $\sum_{k=1}^{10}(k+3)^2$, $\sum_{k=2}^{11}(k+2)^2$, $\sum_{k=5}^{14}(k-1)^2$을 합의 꼴로 나타내고 이를 비교해 보자.

활동 3 $10^3+11^3+12^3+\cdots+25^3$의 값을 여러 가지 방법으로 구해 보자.

탐구 & 융합

그림으로 이해하는 자연수의 거듭제곱의 합

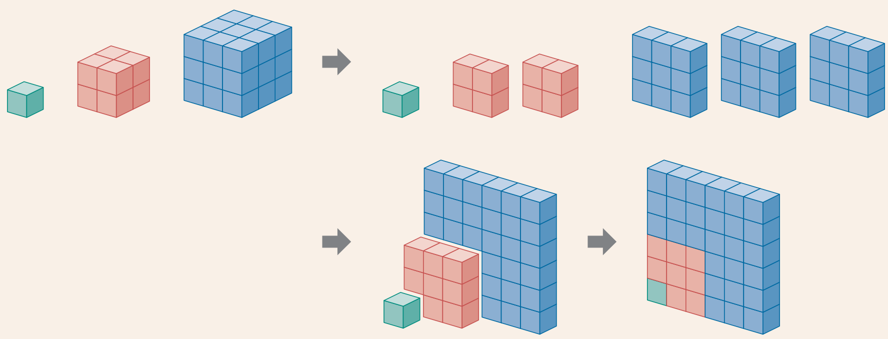
추론 | 의사소통 | 정보 처리

그림을 이용하면 자연수의 거듭제곱의 합을 쉽고 재밌게 이해할 수 있다.

다음 그림은

$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$$

이 성립함을 보이고 있다.

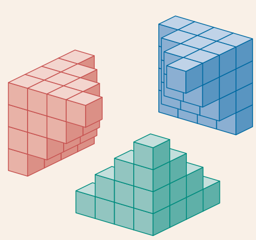


이와 같은 원리를 이용하면 자연수 n에 대하여

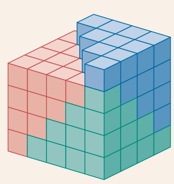
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

이 성립함을 그림을 이용하여 확인할 수 있다.

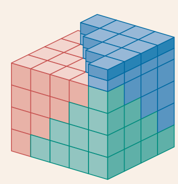
탐구 **1** 다음 그림은 $3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$이 성립함을 보이고 있다. 이 등식이 성립하는 원리를 설명해 보자.



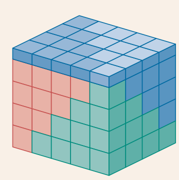
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]

2 **1**의 원리를 이용하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 성립함을 설명해 보자.

Ⅲ-2. 수열의 합

중단원 마무리하기

합의 기호 $\sum$

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합은 $\sum_{k=m}^{n}a_k$로 나타낸다. (단, $m\le n$)

$\sum$의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

여러 가지 수열의 합

(1) 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$

(단, $a\ne b$)

기본

01 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $3+6+9+\cdots+27$

(2) $5+7+9+\cdots+63$

(3) $\frac{1}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{3}{4\times5}+\cdots+\frac{10}{11\times12}$

02 $\sum_{k=1}^{15}a_k=25$, $\sum_{k=1}^{15}b_k=12$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{15}(b_k-a_k)$

(2) $\sum_{k=1}^{15}(2a_k+3b_k-1)$

03 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-5)$

(2) $\sum_{k=1}^{13}(3k+5)+\sum_{k=1}^{13}(k-2)$

(3) $\sum_{k=1}^{8}(k+2)(k-2)$

(4) $\sum_{k=1}^{5}(k^3+3k)$

04 $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$의 값을 구하시오.

표 준

05 $\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k-3)^2$의 값을 구하시오.

06 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{30} (k+3)^2-\sum_{k=1}^{30} k(k+6)$

(2) $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k+1}$

(3) $\sum_{m=1}^{20} \left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l} 2\right)\right\}$

(4) $\sum_{k=1}^{9} (1-k^2)+\sum_{k=1}^{10} (1+k^2)$

|서·술·형|

07 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1}+a_{2k})=2n^2$$

이 성립할 때, $\sum_{k=11}^{30} a_k$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

08 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하시오.

(1) $\frac{1}{1\times4}$, $\frac{1}{4\times7}$, $\frac{1}{7\times10}$, $\frac{1}{10\times13}$, $\cdots$, $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2) 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\frac{1}{1+2+3+4}$, $\cdots$, $\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$

09 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$$

발 전

10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} \log_5 \{\log_{k+1}(k+2)\}$의 값을 구하시오.

11 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{99} a_k=16,\ a_{100}=\frac{1}{11}$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} k(a_k-a_{k+1})$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

12 등식

$$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\ \cdots\ +(n-1)\times 2+n\times 1$$
$$=\frac{n(n+a)(n+b)}{6}$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

사고력+

13 다음과 같이 자연수를 나열할 때, n행에 나열되는 수들의 합을 a_n이라 하자. 이때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

1행	1				
2행	2	4			
3행	3	6	9		
4행	4	8	12	16	
5행	5	10	15	20	25
⋮	⋮				