p.014 [기초 1] $\sqrt[3]{8^5} \times 4^{-3}$의 값은?

⇨ ❶ $= \left\{\left(2^3\right)^5\right\}^{\frac{1}{3}} \times \left(2^2\right)^{-3} = 2^5 \times 2^{-6} = 2^{5+(-6)}$

$= 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

p.014 [기초 2] ❶ $\left(3^{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}+1}$의 값은?

⇨ $3^{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{1}{9} = 3^{\sqrt{3}+1} \times 3^{-2} = 3^{(\sqrt{3}+1)-2} = 3^{\sqrt{3}-1}$

∴ ❶ $= \left(3^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} = 3^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= 3^{3-1} = 3^2 = 9$

p.014 [기초 3] ❶ -64의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 하고, ❷ 실수 b의 네제곱근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$일 때, ❸ $a+b$의 값은?

⇨ ❶ : $a = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

❷ : 방정식 $x^4 = b$의 근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$

$\therefore\ b = (\sqrt{5})^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^2 = 25$

$\therefore$ ❸ $= -4 + 25 = 21$

p.014 [기초 4] 두 실수 x, y에 대하여 ❶ $6^x = 4^y = 27$일 때, ❷ $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}$의 값은?

$\boxed{1}$ ❶ : $27^{\frac{1}{x}} = 6,\ 27^{\frac{1}{y}} = 4 \Rightarrow 27^{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}} = \dfrac{\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2}{27^{\frac{1}{y}}} = \dfrac{6^2}{4} = 9$

$3^{3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{y}\right)} = 3^2,\ 3\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}\right) = 2\ \therefore$ ❷ $= \dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$ ❶ : $x = \log_6 27,\ y = \log_4 27 \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \log_{27} 6,\ \dfrac{1}{y} = \log_{27} 4$

$\therefore$ ❷ $= 2 \times \log_{27} 6 - \log_{27} 4 = \log_{27} \dfrac{6^2}{4} = \log_{27} 9 = \dfrac{2}{3}$

p.015 [기초 5] ❶ $\log_x(-x^2+4x+12)$가 정의되기 위한

❷ 모든 정수 x의 값의 합은?

⇨ ❶ 밑의 조건 : $x \neq 1$, $x > 0$

진수 조건 : $-x^2+4x+12>0$

$x^2-4x-12=(x+2)(x-6)<0 \quad \therefore \; -2<x<6$

x값의 범위 : $0<x<1$ 또는 $1<x<6$

∴ ❷ $=2+3+4+5=14$

p.015 [기초 6] ❶ $\log_3 54-\log_3 \frac{2}{3}$의 값은?

⇨ ❶ $=\log_3\left(54\times\frac{3}{2}\right)=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

p.015 [기초 7] ❶ $\left(\log_2 9 + 4\log_4 2\right) \times \log_6 4$의 값은?

⇨ ❶ $= \left(\log_2 9 + 2\log_2 2\right) \times \log_6 4$

$= \left(\log_2 9 + \log_2 4\right) \times \log_6 4$

$= \log_2 36 \times \log_6 4$

$= \dfrac{2\log 6}{\log 2} \times \dfrac{2\log 2}{\log 6} = 4$

[기초 8] 두 실수 a, b에 대하여 ❶ $3^a = \sqrt[4]{7}$, ❷ $b = \log_7 64$ 일 때, ❸ 9^{ab}의 값은?

⇨ ❶ : $3^a = \sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$, ❷ : $b = \log_7 64 = 6\log_7 2$

∴ ❸ $= \left(3^a\right)^{2b} = \left(7^{\frac{1}{4}}\right)^{12\log_7 2} = 7^{\frac{1}{4} \times 12\log_7 2}$

$= 7^{3\log_7 2} = 7^{\log_7 8} = 8^{\log_7 7} = 8$

p.015 [기초 9] $\log 1.1 = a$ 일 때, 다음 중 ❶ $\log 1210$ 의 값을 a 로 나타내면?

⇨ $1210 = 1.21 \times 10^{3} = 1.1^{2} \times 10^{3}$

$\therefore$ ❶ $= \log\left(1.1 \times 10^{3}\right) = 2\log 1.1 + 3\log 10 = 2a + 3$

p.016 [기본 1] ❶ $\left(\sqrt[3]{2^{10}}\right)^{\frac{n}{8}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 ❷ 자연수 n 의 ❸ 최솟값은?

⇨ ❶ $= \left\{\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{n}{8}} = 2^{\frac{10}{3} \times \frac{n}{8}} = 2^{\frac{5n}{12}}$: 자연수

❷ $\Rightarrow$ n 의 값 : 12의 배수

$\therefore$ ❸ $= 12$

p.016 [기본 2] ❶ 정수 a와 ❷ 2이상의 자연수 n에 대하여 ❸ 64의 n제곱근이 a가 되는 ❹ 두 수 n, a의 순서쌍 $(n,\ a)$의

❺ 개수는?

⇨ ❸ : $a^n = 64 = 2^6$ $\Rightarrow$ ❶&❷ n의 값 : 2, 3, 6

㉠ $n = 2$ $\Rightarrow$ ❸ : $a^2 = 64$ $\therefore$ ❹ : $(2,\ -8),\ (2,\ 8)$

㉡ $n = 3$ $\Rightarrow$ ❸ : $a^3 = 64$ $\therefore$ ❹ : $(3,\ 4)$

㉢ $n = 6$ $\Rightarrow$ ❸ : $a^6 = 64$ $\therefore$ ❹ : $(6,\ -2),\ (6,\ 2)$

$\therefore$ ❺ $= 2 + 1 + 2 = 5$

p.016 [기본 3] 두 양수 a, b에 대하여 ❶ $a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} = 3$,

❷ $a^{-1} + b^{-1} = 5$일 때, ❸ $a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$의 값은?

⇨ ❶^2 : $a^{-1} + 2a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1} = 9$

❷ : $2a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} = 9 - 5 = 4$ $\therefore$ $a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} = (ab)^{-\frac{1}{2}} = 2$

양변에 (-2)제곱 : $\left\{(ab)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{-2} = 2^{-2}$ $\therefore$ $ab = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ❸ $= a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} (b^{-1} + a^{-1}) = (ab)^{\frac{1}{2}} (a^{-1} + b^{-1})$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \times 5 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

p.016 [기본 4] ❶ 점 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt[4]{8})$을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자.

❷ 삼각형 AOB의 넓이를 S라 할 때, ❸ $\log_2 S=\frac{q}{p}$이다.

❹ $p+q$의 값은? (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수)

⇨ ❶ B의 x좌표 : $\frac{1}{2}\sqrt{x}=\sqrt[4]{8}$, $x^{\frac{1}{2}}=2\times 2^{\frac{3}{4}}$ $\therefore\ x=2^{\frac{7}{2}}$

❷ : $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{8}\times 2^{\frac{7}{2}}$

$=2^{-1+\frac{3}{4}+\frac{7}{2}}=2^{\frac{13}{4}}$ ⇒ ❸ $=\frac{13}{4}=\frac{q}{p}$ $\therefore$ ❹ $=17$

p.017 [기본 5] 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 ❶ 이차방정식 $x^2-\left(\log_a\frac{a^3}{4}\right)x-2=0$의 서로 다른 두 근이 $\log_2 a$, $\log_a b$ 일 때, ❷ ab의 값은?

⇨ ❶ 두 근의 곱 : $\log_2 a\times\log_a b=\frac{\log a}{\log 2}\times\frac{\log b}{\log a}=-2$

$\log b=-2\log 2=\log\frac{1}{4}$ $\therefore\ b=\frac{1}{4}$

❶ 두 근의 합 : $\log_2 a+\log_a\frac{1}{4}=\log_a\frac{a^3}{4}$

정리 : $\log_2 a-2\log_a 2=3-2\log_a 2$, $\log_2 a=3$

$a=2^3=8$ $\therefore$ ❷ $=8\times\frac{1}{4}=2$

p.017 [기본 6] 두 양수 a, b에 대하여 ❶ 두 점 $A(-1,\ 1)$, $B(\log_3 a,\ \log_3 b)$를 지나는 직선과 직선 $y=(1/2)x-1$이 서로 평행하고 ❷ $\log_2 a+\log_2 27b=3$일 때, ❸ $81(a+b)$의 값은? ⇨ ❶ : $(\text{기울기})=\dfrac{\log_3 b-1}{\log_3 a-(-1)}=\dfrac{1}{2}$

$$2\log_3 b-2=\log_3 a+1,\ 2\log_3 b-\log_3 a=\log_3\frac{b^2}{a}=3$$

$\dfrac{b^2}{a}=3^3$ ∴ ㉠ $a=\dfrac{b^2}{27}$, ❷ : $\log_2 27ab=3,\ 27ab=2^3=8$

㉠을 대입 : $27\times\dfrac{b^2}{27}\times b=8,\ b^3=8$ ∴ $b=2$ ($\because\ b>0$)

㉠ : $a=\dfrac{4}{27}$ ∴ ❸ $=81\left(\dfrac{4}{27}+2\right)=12+162=174$

p.017 [기본 7] 두 실수 x, y에 대하여 ❶ $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$이고 ❷ $81^x=12^y$일 때, ❸ $4x\log_6 9+y\log_6 12$의 값은?

⇨ ❷ Let $81^x=12^y=k$ (단, $k>0$) $\Rightarrow 3^{4x}=k$

$$3=k^{\frac{1}{4x}},\ 12=k^{\frac{1}{y}}\Rightarrow k^{\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{4x}}\times k^{\frac{1}{y}}=3\times 12=36$$

❶ : $k^{\frac{2}{3}}=6^2$ ∴ $k=(6^2)^{\frac{3}{2}}=6^{2\times\frac{3}{2}}=6^3=216$

$81^x=216\Rightarrow x=\log_{81}216,\ 12^y=216\Rightarrow y=\log_{12}216$

∴ ❸ $=4\times\log_{81}216\times\log_6 9+\log_{12}216\times\log_6 12$

$$=4\times\frac{3\log 6}{4\log 3}\times\frac{2\log 3}{\log 6}+\frac{3\log 6}{\log 12}\times\frac{\log 12}{\log 6}=6+3=9$$

p.017 [기본 8] 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a - \log_2 b = \log_{10} 314 - \log_{10} 3.14$
(나) $\sqrt[4]{2^a} \times \sqrt[3]{4^{-b}} = 6$

❶ $\left(\sqrt[15]{4}\right)^{a+b}$의 값은?

⇨ (가) : $\log_2 \dfrac{a}{b} = \log_{10} \dfrac{314}{3.14} = \log_{10} 100 = 2$, $\dfrac{a}{b} = 2^2 = 4$

∴ ㉠ $a = 4b$, (나) : $2^{\frac{a}{4}} \times 2^{-\frac{2b}{3}} = 2^{\frac{a}{4} - \frac{2b}{3}} = 6$

㉠을 대입 : $2^{b - \frac{2b}{3}} = 2^{\frac{b}{3}} = 6$, $\dfrac{b}{3} = \log_2 6$ ∴ $b = 3\log_2 6$

㉠ : $a = 12\log_2 6$ ∴ $a + b = 12\log_2 6 + 3\log_2 6 = 15\log_2 6$

p.017 [기본 8] ❶ $\left(\sqrt[15]{4}\right)^{a+b}$의 값은?

⇨ $a + b = 12\log_2 6 + 3\log_2 6 = 15\log_2 6$

∴ ❶ $= 4^{\frac{a+b}{15}} = 4^{\frac{15\log_2 6}{15}} = 4^{\log_2 6} = 6^{\log_2 4}$

$= 6^{2\log_2 2} = 6^2 = 36$

p.018 [실력 1] ❶ $a>1$, $b>1$인 두 상수 a, b에 대하여
❷ 원 $\left(x-\log_2 a\right)^2+\left(y-\log_2 b\right)^2=2$와 직선 $x+y-1=0$
이 접하고 ❸ $5\log_a 2=\log_b 2$일 때, ❹ $\left(\sqrt[5]{a}\times\sqrt[4]{b}\right)^8$의 값은?

⇨ ❷ : (반지름의 길이) $=\dfrac{\left|\log_2 a+\log_2 b-1\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$

$\log_2 a+\log_2 b-1=2$ 또는 $\log_2 a+\log_2 b-1=-2$

$\log_2 ab=3$ 또는 $\log_2 ab=-1$ $\therefore$ ㉠ $ab=8$ ($\because$ ❶)

❸ : $5=\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\log_b a$ $\therefore$ ㉡ $a=b^5$

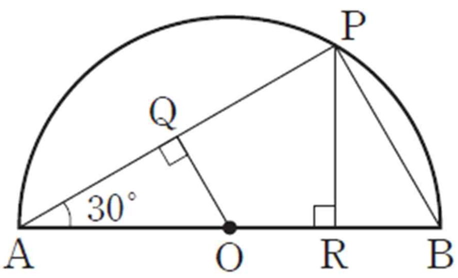
㉠을 대입 : $b^5\times b=b^6=8=2^3$ $\therefore$ $b=2^{\frac{1}{2}}$ ($\because$ ❶)

p.018 [실력 1] ❹ $\left(\sqrt[5]{a}\times\sqrt[4]{b}\right)^8$의 값은?

⇨ ㉡ $a=b^5$, $b=2^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ ㉡에 대입 : $a=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5=2^{\frac{5}{2}}$

$\therefore$ ❹ $=a^{\frac{8}{5}}\times b^2=\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{8}{5}}\times\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^{4+1}=2^5=32$

p.018 [실력 2] 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 R라 하자.



❶ $\angle PAB = 30°$이고 ❷ 삼각형 QAO의 넓이가 $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$일 때,

❸ $\log_3(\overline{AR} \times \overline{BR}) = (q/p)$이다. ❹ $p+q$의 값은?

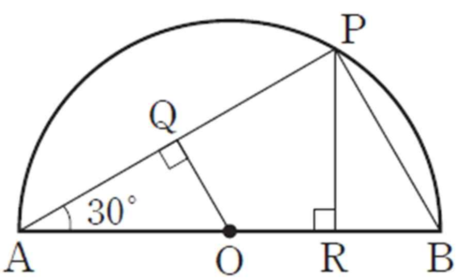
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

⇨ Let $\overline{OQ} = x \Rightarrow$ ❶ : $\overline{AQ} = \overline{OQ} \times \sqrt{3} = \sqrt{3}\,x$

❷ $= \dfrac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{OQ} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3}\,x \times x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$

[실력 2] ❸ $\log_3(\overline{AR} \times \overline{BR}) = (q/p)$

❹ $p+q$의 값은?



$\overline{OQ} = x$, $\overline{AQ} = \sqrt{3}\,x$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$

$x^2 = \sqrt[4]{3} \quad \therefore \ x = \sqrt[8]{3} \Rightarrow \triangle QAO$: $\overline{AO} = \dfrac{\overline{OQ}}{\sin 30°} = 2\sqrt[8]{3}$

$\angle POB = 2\angle PAB = 60° \Rightarrow \triangle POB$는 정삼각형

$\overline{PR} \perp \overline{OB} \Rightarrow \overline{BR} = \overline{OR} = \dfrac{1}{2}\overline{OB} = \dfrac{1}{2}\overline{AO} = \sqrt[8]{3}$

$\overline{AR} = 2\overline{AO} - \overline{BR} = 4\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{3} = 3\sqrt[8]{3}$

❸ $= \log_3(3\sqrt[8]{3} \times \sqrt[8]{3}) = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \dfrac{5}{4} = \dfrac{q}{p} \quad \therefore$ ❹ $= 9$

p.018 [실력 3] 다음 조건을 만족시키는 세 실수 a, b, n의 모든 ❶ 순서쌍 (a, b, n)의 ❷ 개수는?

(가) $\log_2(8a-a^2)$의 값은 자연수이다. (나) 2이상의 어떤 자연수 n에 대하여 b는 $8a-a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

⇨ (가) : Let $\log_2(8a-a^2)=m$ (단, m은 자연수)

㉠ $8a-a^2=2^m$, (가) 진수 조건 : $8a-a^2>0$

$a^2-8a=a(a-8)<0$ ∴ a값의 범위 : $0<a<8$

$8a-a^2=-(a-4)^2+16 \Rightarrow 0<8a-a^2\le 16$

㉠ : $0<2^m\le 16 \Rightarrow$ 자연수 m의 값 : 1, 2, 3, 4

p.018 [실력 3] 모든 ❶ 순서쌍 (a, b, n)의 ❷ 개수는?

(나) 2이상의 어떤 자연수 n에 대하여 b는 $8a-a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

⇨ ㉠ $8a-a^2=2^m$, 자연수 m의 값 : 1, 2, 3, 4

① $m=1 \Rightarrow$ ㉠ : $8a-a^2=2 \Rightarrow$ (나) : $b^n=2$ ∴ 모순

② $m=2 \Rightarrow$ ㉠ : $8a-a^2=4 \Rightarrow$ (나) : $b^n=4$

$n=2$일 때, $b^2=4$에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$n\ge 3$일 때, $b^n=4$를 만족시키는 b와 n은 없다.

㉠ : $a^2-8a+4=0 \Rightarrow D_1/4=16-4=12>0$ ∴ ❶ $=4$

③ $m=3 \Rightarrow$ ㉠ : $8a-a^2=8 \Rightarrow$ (나) : $b^n=8$

p.018 [실력 3] 모든 ❶ 순서쌍 (a, b, n)의 ❷ 개수는?

㈏ 2이상의 어떤 자연수 n에 대하여
b는 $8a-a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

⇨ ㉠ $8a-a^2=2^m$, 자연수 m의 값 : 1, 2, 3, 4

① $m=1$ ⇒ 모순, ② $m=2$ ⇒ ❶ $=4$

③ $m=3$ ⇒ ㉠ : $8a-a^2=8$ ⇒ ㈏ : $b^n=8$

$n=2$일 때, $b^2=8$을 만족시키는 정수 b는 없다.

$n=3$일 때, $b^3=8$에서 $b=2$

$n\geq 4$일 때, $b^n=8$을 만족시키는 b와 n은 없다.

㉠ : $a^2-8a+8=0$ ⇒ $D_2/4=16-8=8>0$ ∴ ❶ $=2$

④ $m=4$ ⇒ ㉠ : $8a-a^2=16$ ⇒ ㈏ : $b^n=16$

p.018 [실력 3] 모든 ❶ 순서쌍 (a, b, n)의 ❷ 개수는?

㈏ 2이상의 어떤 자연수 n에 대하여
b는 $8a-a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

⇨ ㉠ $8a-a^2=2^m$, 자연수 m의 값 : 1, 2, 3, 4

① $m=1$ ⇒ 모순, ② $m=2$ ⇒ ❶ $=4$, ③ $m=3$ ⇒ ❶ $=2$

④ $m=4$ ⇒ ㉠ : $8a-a^2=16$ ⇒ ㈏ : $b^n=16$

$n=2$일 때, $b^2=16$에서 $b=-4$ 또는 $b=4$

$n=3$일 때, $b^3=16$을 만족시키는 정수 b는 없다.

$n=4$일 때, $b^4=16$에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$n\geq 5$일 때, $b^n=16$을 만족시키는 b와 n은 없다.

㉠ : $a^2-8a+16=(a-4)^2=0$ ∴ ❶ $=4$ ∴ ❷ $=10$

p.019 [대표 기출] 자연수 n에 대하여 ❶ $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 ❷ 1000 이하의 모든 n의 값의 합은?

⇨ ❶ $= \log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2 \overset{\text{def}}{=} m$ (단, m은 정수)

㉠ $\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2 = 8^m \Rightarrow 4n+16$이 3의 배수

∴ $n = 3k-1$ (단, k는 $1 \leq k \leq 333$인 자연수)

㉠ : $\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2 = 8^m = 2^{3m} \Rightarrow (k+1)^2 = 2^{-3m-4}$

$(k+1)^2$의 값 : 2^2, 2^8, 2^{14}

$k+1$의 값 : 2, 2^4, 2^7 $\Rightarrow$ k의 값 : 1, 15, 127

∴ ❷ $= 2+44+380 = 426$