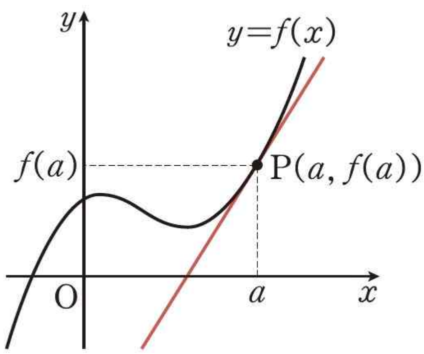
Ⅱ_2. 도함수의 활용

[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
[12수학Ⅱ02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1 접선의 방정식 ❶



(1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
$$\Leftrightarrow\ y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

☑ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta \Leftrightarrow f'(a)=\tan\theta$

1 접선의 방정식 ❷

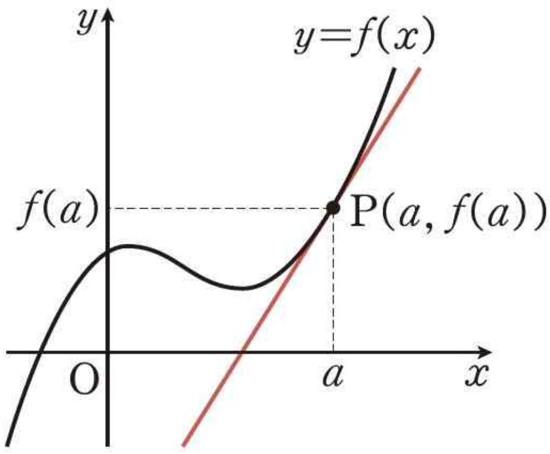
예 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구해보자. $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=3(x-1)+1=3x-2$$

☑ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선(법선)의 방정식은

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)\ \ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

1 접선의 방정식 ❸



(2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 방정식 $f'(a)=m$을 만족시키는 실수 a의 값을 구한다.

② 위의 ①에서 구한 a의 값을 $y=m(x-a)+f(a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

1 접선의 방정식 ❹

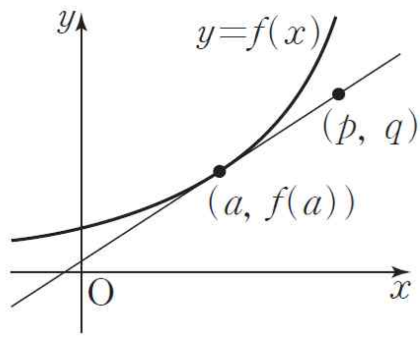
예 곡선 $y=3x^2$에 접하고 기울기가 6인 접선의 방정식을 구해보자. $f(x)=3x^2$이라 하면 $f'(x)=6x$

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(a)=6a=6$에서 $a=1$

따라서 기울기가 6인 접선의 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y=6(x-1)+3=6x-3$

(3) 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식



함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

② 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$를 구한다.

③ 점 $(p,\ q)$는 접선 위의 점이므로 위의 ②에서 구한 접선의 방정식에 $x=p$, $y=q$를 대입하여 실수 a의 값을 구한다.

④ 위의 ③에서 구한 a의 값을 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$에 대입하여 실수 a의 값을 구한다.

1 접선의 방정식 ❺

예 점 $(0,\ -1)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자. $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$이다.

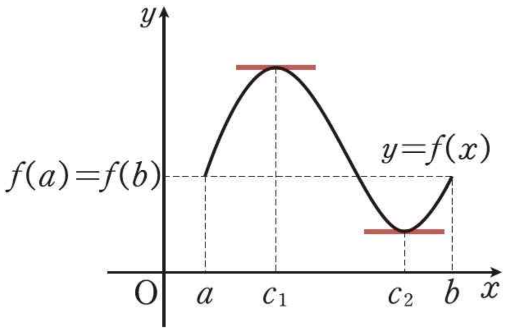
이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $-1=-a^2$,

$(a+1)(a-1)=0$, 즉 $a=-1$또는 $a=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$a=-1$일 때 $y=-2x-1$, $a=1$일 때 $y=2x-1$이다.

2 평균값 정리 ❶

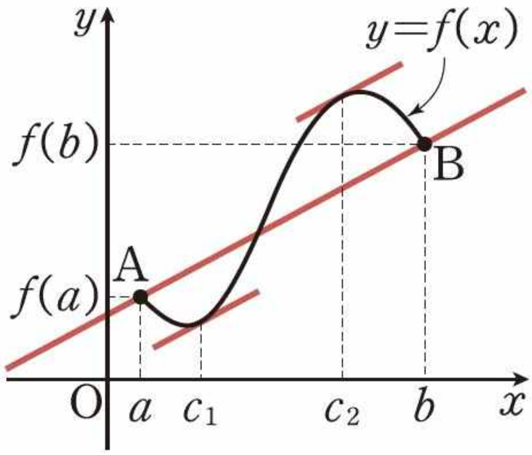


(1) 롤(Role)의 정리 : 함수 $f(x)$가

① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속

② 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능

③ $f(a)=f(b) \Rightarrow f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



(2) 평균값 정리 : 함수 $f(x)$가

① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속

② 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가

열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

2 평균값 정리 ❷

☑ 롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명해 보자.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다.

2 평균값 정리 ❸

따라서 롤의 정리에 의하여

$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

☑ ① 평균값 정리는 열린구간 (a, b)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 직선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

② 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

② 평균값 정리 ❹

예 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구해 보자.

함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{4-0}{2-0}=2$이고

$f'(x)=2x$에서 $f'(c)=2c$이므로 $2c=2$

$\therefore\ c=1$

③ 함수의 증가와 감소 ❶

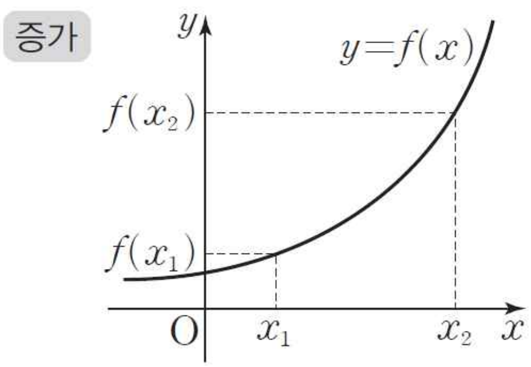
(1) 함수의 증가와 감소 : 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

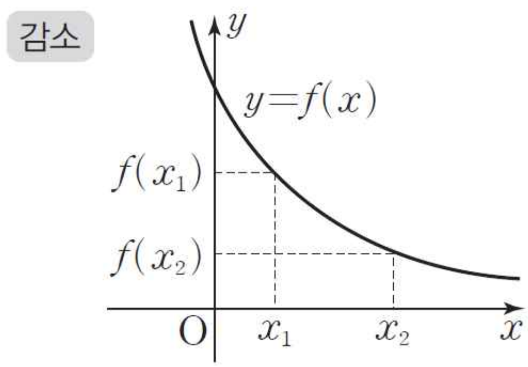
① $x_1<x_2$일 때, $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$이면

함수 $f(x)$는 이 구간에서 '증가한다'고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$이면

함수 $f(x)$는 이 구간에서 '감소한다'고 한다.





3 함수의 증가와 감소 ❷

(2) 도함수의 부호와 함수의 증가 또는 감소의 관계

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고,
이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

☑ 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이라 하자. 열린구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, 닫힌구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

3 함수의 증가와 감소 ❸

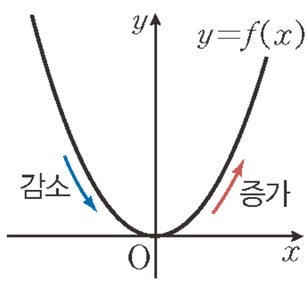
인 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(c)>0$이고 $x_2-x_1>0$이므로

$f(x_2)-f(x_1)>0$, 즉 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 증가한다.

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 감소함을 알 수 있다.



3 함수의 증가와 감소 ❹

☑ ① 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

② 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수일 때

㉠ 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

㉡ 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 감소하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

3 함수의 증가와 감소 ❺

예 함수 $f(x)=x^3-3x^2$에서

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

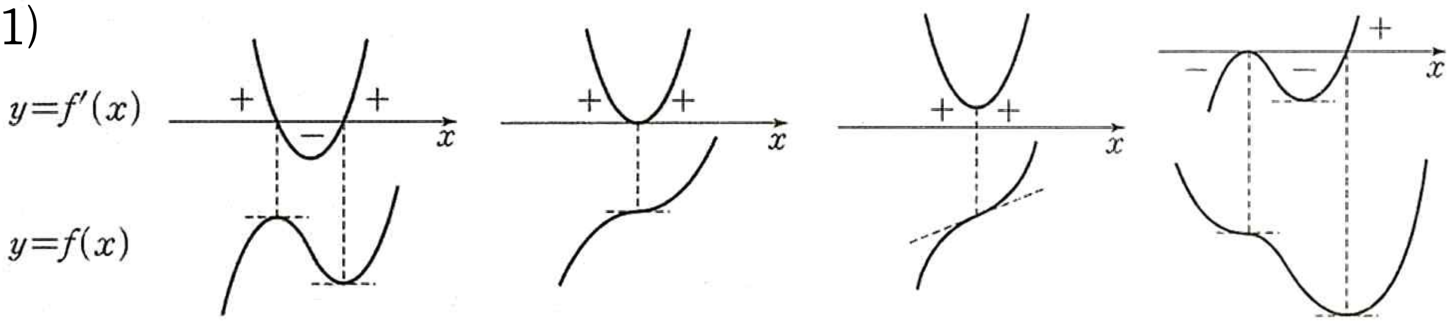
$x\le 0$ 또는 $x\ge 2$에서 $f'(x)\ge 0$이므로

함수 $f(x)$는 증가하고,

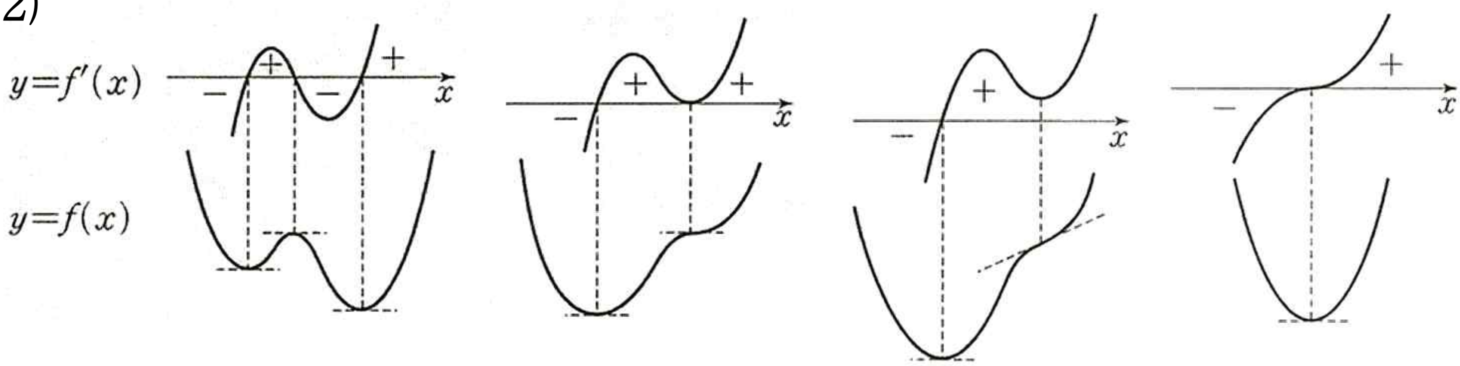
$0\le x\le 2$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

✡ $f'(x)$로부터 $f(x)$의 그래프 개형 구하기

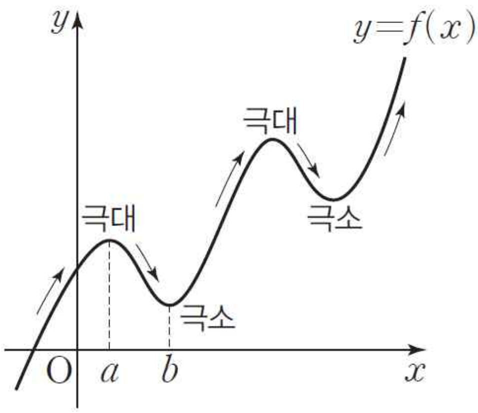
(1)



(2)



4 함수의 극대와 극소 ❶



(1) 함수의 극대와 극소

① 함수 $f(x)$에서 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \leq f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 '극대(Local Maximum)'라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 '극댓값'이라고 한다.

② 함수 $f(x)$에서 b를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \geq f(b)$

이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 '극소(Local Minimum)'라 하고, 그때의 함숫값 $f(b)$를 '극댓값'이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 '극값'이라고 한다.

4 함수의 극대와 극소 ❷

(2) 극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고

$x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

☑ 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.

즉, $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 것은 아니다.

예를 들어 $f(x)=x^3$에서 $f'(0)=0$이지만

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

✡ 극값과 미분계수 사이의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고

$x=a$에서 극값을 갖는다. $\not\Longleftarrow\!\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

(1) 미분불능인 점(첨점)에서도 극값을 가질 수 있다.

예 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분불능이지만 극소

(2) ($\not\Leftarrow$) $f'(a)=0$이지만 극값을 갖지 않는 경우도 있다.

예 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근

(3) ($\Leftarrow$) $f'(x)=0$이 서로 다른 실근을 가질 때 성립

(4) $x=a$에서 불연속이면 극값을 판정할 수 없다.

$\boxed{4}$ 함수의 극대와 극소 ❸

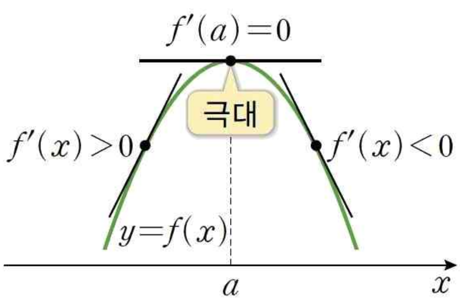
(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

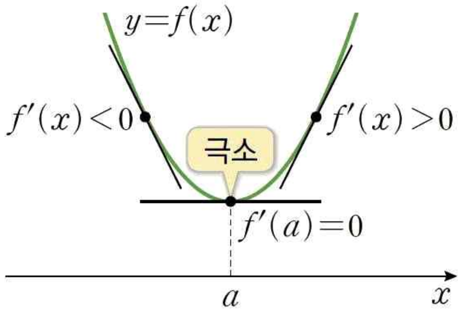
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때,

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.





$\boxed{4}$ 함수의 극대와 극소 ❹

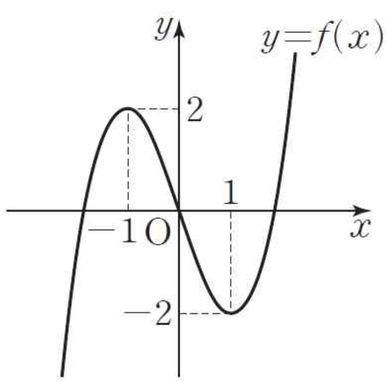
$\boxed{\text{예}}$ 함수 $f(x)=x^3-3x$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

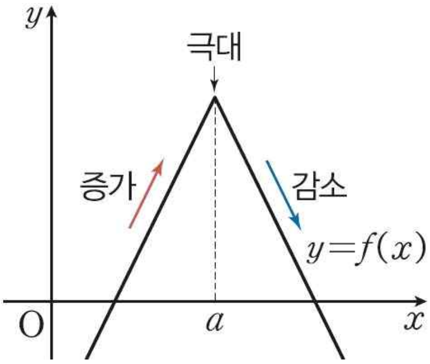
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

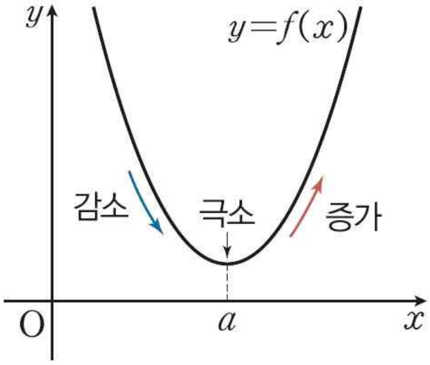


따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=2$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-2$를 갖는다.

$\boxed{4}$ 함수의 극대와 극소 ❺

☑ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않더라도
$x=a$에서 극값을 가질 수 있다.
예를 들어 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않지만 $x=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(1)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.





✡ 극값과 미정계수

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가진다. $\not\Longleftarrow\!\!\!\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

⇨ $f'(x)=0$의 서로 다른 실근 : a

(2) $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가진다.

⇨ $f'(a)=0$, $f(a)=b$

(3) $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\, b)$에서의 접선의 기울기가 m

⇨ $f'(a)=m$, $f(a)=b$

$\boxed{5}$ 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 그래프와 좌표축이 만나는 점 등을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

✡ 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형

(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.

(2) $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

(3) $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 극값을 구한다.

(4) $f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

예 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 그래프를 그려 보자.

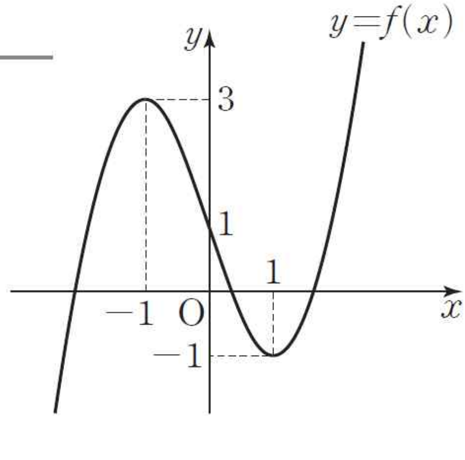
$f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

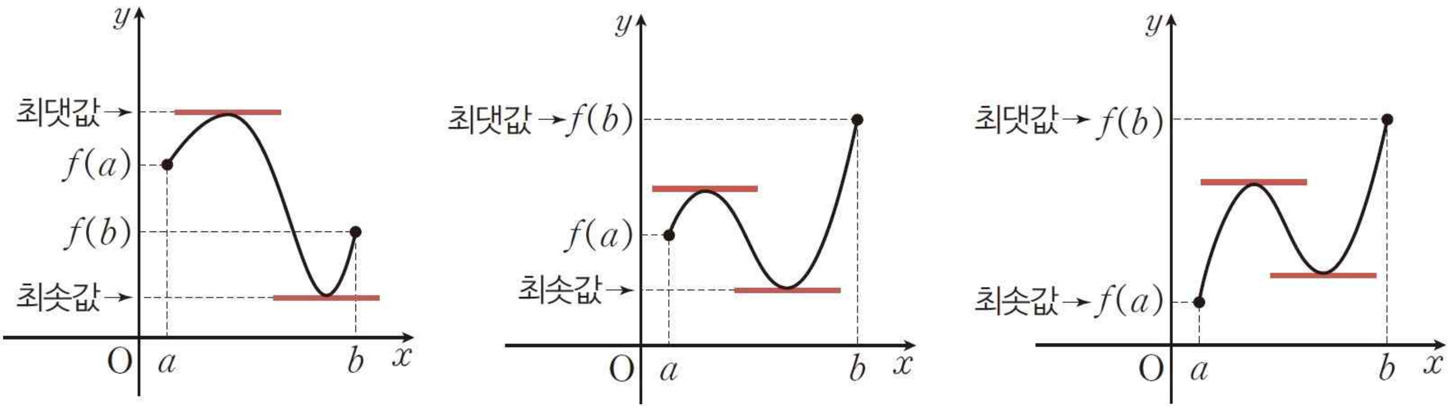


함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖고, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 또 $f(0)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 점 $(0,1)$에서 만난다.

6 함수의 최댓값과 최솟값 ❶

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



6 함수의 최댓값과 최솟값 ❷

(2) 함수의 최댓값과 최솟값의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 조사한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

7 방정식에의 활용 ❶

(1) 방정식의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

☑ 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

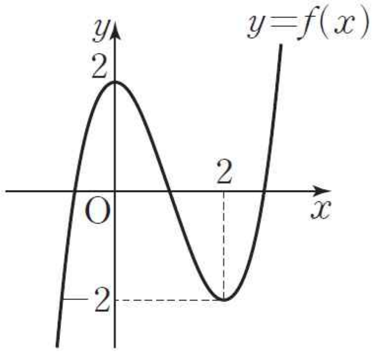
예 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자. $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

7 방정식에의 활용 ❷

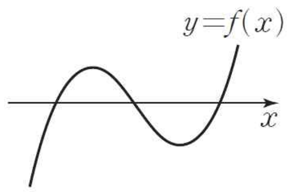
(2) 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

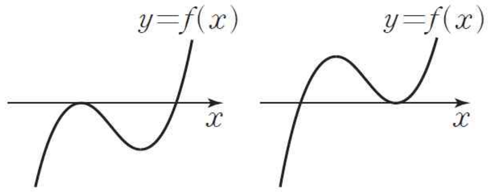
① (극댓값) $\times$ (극솟값) <0 $\Leftrightarrow$ 서로 다른 실근 3개

② (극댓값) $\times$ (극솟값) $=0$ $\Leftrightarrow$ 서로 다른 실근 2개

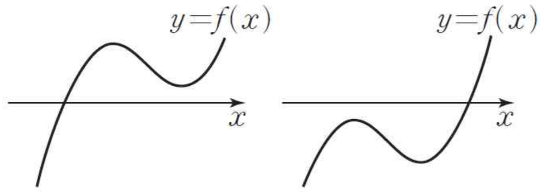
③ (극댓값) $\times$ (극솟값) >0 $\Leftrightarrow$ 서로 다른 실근 1개



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

8 부등식에의 활용 ❶

(1) 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 가질 때, 이 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보이려면 이 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

(2) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이려면 이 구간에서 $f(x)-g(x)\geq 0$임을 보이면 된다.

예 $x\geq 0$에서 부등식 $2x^3+1\geq 3x^2$이 성립함을 증명해 보자.

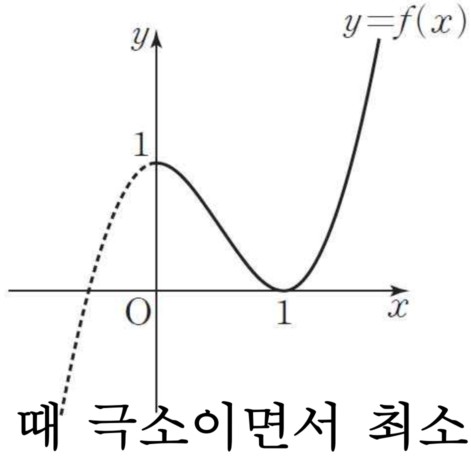
$x\geq 0$에서 부등식 $2x^3+1\geq 3x^2$이 성립함을 보이려면 $x\geq 0$에서 부등식 $2x^3-3x^2+1\geq 0$이 성립함을 보이면 된다. $f(x)=2x^3-3x^2+1$로 놓으면

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$x \geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$



함수 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다. $x \geq 0$에서 함수 $f(x)$는 $x = 1$일 때 극소이면서 최소이다. 이때 최솟값이 $f(1) = 0$이므로 $x \geq 0$인 모든 x에 대하여 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$이다.

따라서 $x \geq 0$에서 부등식 $2x^3 + 1 \geq 3x^2$이 성립한다.

8 부등식에의 활용 ❷

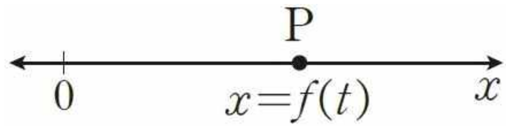
(3) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 증명하려면

① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x) \geq 0$일 때, $f(a) \geq 0$임을 보이면 된다.

② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x) \leq 0$일 때, $f(b) \geq 0$임을 보이면 된다.

③ 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때, 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하고 $\{f(x)$의 최솟값$\} \geq 0$임을 보이면 된다.

$\boxed{9}$ 속도와 가속도 ❶



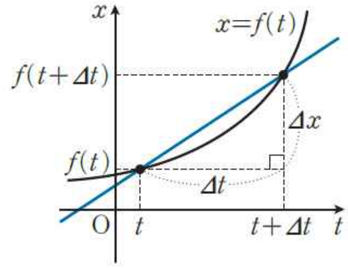
(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

☑ 점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치를 x라 하면 x는 t에 대한 함수이다. 이 함수를 $x=f(t)$라 하면 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$



$\boxed{9}$ 속도와 가속도 ❷

이고, 이것은 함수 $f(t)$의 평균변화율이다.

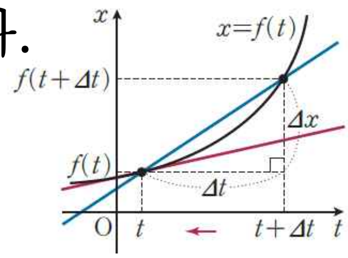
이때 점 P의 위치 $x=f(t)$의 시각 t에서의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 '순간속도' 또는 '속도'라고 하며 보통 v로 나타낸다.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

☑ 속도 v의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

$v>0$이면 점 P는 양의 방향으로 움직이고,

$v<0$이면 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



9 속도와 가속도 ❸

(2) 수직선 위를 움직이는 점의 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 v일 때, 점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

☑ 점 P의 속도 v도 시각 t에 대한 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 점 P의 시각 t에서의 속도의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라 하며 보통 a로 나타낸다.

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

9 속도와 가속도 ❹

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x = f(t)$

(1) 속도 : $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

(2) 가속도 : $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = v'(t)$

$$\text{위치} \xrightarrow{\text{시각 } t\text{에 대하여 미분}} \text{속도} \xrightarrow{\text{시각 } t\text{에 대하여 미분}} \text{가속도}$$

$$x=f(t) \qquad v=\frac{dx}{dt}=f'(t) \qquad a=\frac{dv}{dt}=v'(t)$$

9 속도와 가속도 ❺

예 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-3t$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3$$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a=\frac{dv}{dt}=6t$$

따라서 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도는 $3\times2^2-3=9$이고, 점 P의 시각 $t=2$에서의 가속도는 $6\times2=12$이다.

✡ 속도와 운동 방향

수직선 위를 움직이는 점의 속도가 $v(t)=f'(t)$

❶ $v(t)=f'(t)>0$ $\Leftrightarrow$ 위치 $x=f(t)$는 증가

$\Leftrightarrow$ $|v(t)|$의 속력으로 양의(처음) 방향으로 진행

❷ $v(t)=f'(t)<0$ $\Leftrightarrow$ 위치 $x=f(t)$는 감소

$\Leftrightarrow$ $|v(t)|$의 속력으로 음의(반대) 방향으로 진행

❸ $v(t)=f'(t)=0$ $\Leftrightarrow$ ① 최고 높이에 도달했을 때

② 정지할 때

③ 운동 방향이 바뀔 때