III 통계

1 확률분포

01 확률변수와 확률분포 79~84쪽

준비하기 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

생각 열기 ❶ $S=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$

❷ $0, 1, 2$

문제 1 $0, 1, 2, 3, 4$

문제 2 (1) 연속확률변수

(2) 이산확률변수

(3) 이산확률변수

(4) 연속확률변수

문제 3 (1)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

(2) $\frac{11}{12}$

문제 4 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{5}{8}$

문제 5 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

문제 6 $\frac{13}{24}$

탐구 & 융합 85쪽

(1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{7}{27}$

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차 86~91쪽

준비하기 $\frac{1}{4}$

생각 열기 ❶ $\frac{5000\times70+10000\times20+20000\times10}{100}$

❷

X	5000	10000	20000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

문제 1 $\frac{6}{5}$

문제 2 $\mathrm{V}(X)=1, \sigma(X)=1$

문제 3 (1) 37 (2) 2

문제 4 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-m)^2)\\&=\mathrm{E}(X^2-2mX+m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(2mX)+\mathrm{E}(m^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-2m\times m+m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

문제 5 (1) $\mathrm{V}(3X)=81, \sigma(3X)=9$

(2) $\mathrm{V}\left(3X-\frac{1}{5}\right)=81, \sigma\left(3X-\frac{1}{5}\right)=9$

(3) $\mathrm{V}(-X+3)=9, \sigma(-X+3)=3$

(4) $\mathrm{V}\left(-\frac{1}{3}X-2\right)=1, \sigma\left(-\frac{1}{3}X-2\right)=1$

문제 6 $\sqrt{10}$

03 이항분포 92~96쪽

준비하기 10

생각 열기 ❶ ${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^3, {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1, {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{9}{10}\right)^3$

❷ 확률의 합이 이항정리를 이용하여

$\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3$을 전개한 식과 같으므로

$$
{}_3C_0\left(\frac{1}{10}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^2+{}_3C_2\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{9}{10}\right)^3
$$
$$
=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\right)^3
$$
$$
=1
$$

문제 1 (1) $\mathrm{B}\left(100, \frac{3}{5}\right)$

(2) 독립시행이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

(3) $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$

문제 2 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_5C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

(2) $\frac{144}{625}$

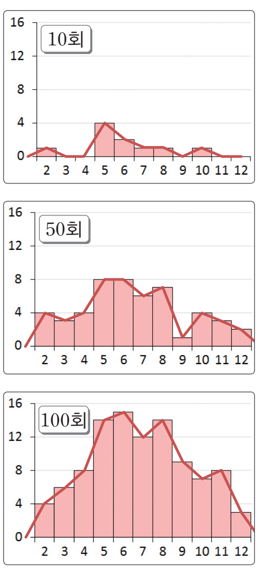
문제 3 $\mathrm{E}(X)=120,\ \sigma(X)=4\sqrt{3}$

문제 4 $\mathrm{E}(X)=270,\ \sigma(X)=3\sqrt{3}$

04 정규분포 97 ~ 104쪽

준비하기 8

생각 열기 ❶



❷ 예시 종 모양에 가까워진다.

문제 1 평균이 가장 큰 것: (4)

표준편차가 가장 큰 것: (1)

생각톡톡 0.5

문제 2 (1) 0.1587 (2) 0.95

문제 3 (1) 1.5 (2) 2.5

함께하기 ❶ $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$

$$
=\frac{1}{\sigma}\{\mathrm{E}(X)-m\}
$$
$$
=0
$$

❷ $\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$

$$
=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\mathrm{V}(X)
$$
$$
=1
$$

문제 4 (1) 0.9053 (2) 0.0668

문제 5 30.85 %

문제 6 2.5

생각 열기 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{1}{5}\right)$과 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 8)$의 평균은 10, 표준편차는 $\sqrt{8}$로 평균과 표준편차는 각각 같고 그래프의 모양도 서로 비슷하다.

문제 7 0.0228

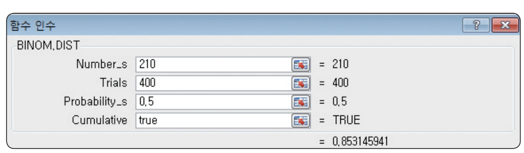
생각 넓히기 ❶ 0.2

❷ 평균: 80, 표준편차: 8

❸ 0.1056

공학적 도구 105쪽

(1)



$\mathrm{P}(X\leq 210)=0.853145941$

(2) =NORM.DIST(82,70,4,TRUE)-NORM.DIST(74,70,4,TRUE)

$P(74 \le X \le 82) = 0.157305356$

III-1 중단원 마무리하기 106~108쪽

01 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{2}{5}$

02 $E(X)=\frac{1}{8}$, $V(X)=\frac{23}{64}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{23}}{8}$

03 $E(Y)=12$, $V(Y)=4$, $\sigma(Y)=2$

04 $E(X)=3$, $V(X)=\frac{9}{4}$, $\sigma(X)=\frac{3}{2}$

05 0.9772

06 1

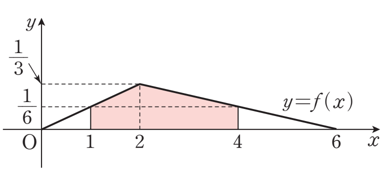
07 해결 과정 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times 6\times k=1, \quad \text{즉} \quad k=\frac{1}{3}$$ ▶ 30 %

따라서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}x & (0\le x<2) \\ -\frac{1}{12}x+\frac{1}{2} & (2\le x\le 6)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▶ 40 %

답 구하기 $P(1\le X\le 4)$

$$=P(1\le X\le 2)+P(2\le X\le 4)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\times 1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\times 2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$ ▶ 30 %

08 $\frac{11}{2}$

09 105

10 문제 이해 확률변수 X는 정규분포 $N(10, \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-10}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. ▶ 20 %

해결 과정 $P(7\le X\le 10)$

$$=P\left(\frac{7-10}{\sigma}\le Z\le\frac{10-10}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(-\frac{3}{\sigma}\le Z\le 0\right)$$

이고 $P(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$$-\frac{3}{\sigma}=-0.5, \quad \text{즉} \quad \sigma=6$$ ▶ 40 %

답 구하기 $P(X\ge 16)=P\left(Z\ge\frac{16-10}{6}\right)$

$$=P(Z\ge 1)$$

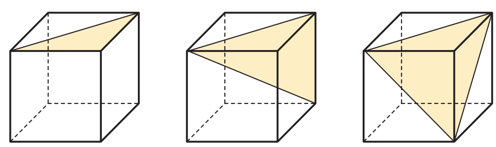
$$=0.5-0.3413$$

$$=0.1587$$ ▶ 40 %

11 16

12 0.0013

13



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

(i) [그림 1]과 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

(ii) [그림 2]와 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(iii) [그림 3]과 같이 세 꼭짓점을 택하여 만든 삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이상에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

이고,

$$P\left(X=\frac{1}{4}\right)=\frac{24}{{}_8C_3}=\frac{3}{7},$$

$$P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{{}_8C_3}=\frac{3}{7},$$
$$P\left(X=\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{{}_8C_3}=\frac{1}{7}$$
이므로
$$E(X)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}$$
$$=\frac{3}{7}$$
$$E(X^2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{7}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{7}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{7}$$
$$=\frac{3}{14}$$
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{3}{14}-\left(\frac{3}{7}\right)^2$$
$$=\frac{3}{98}$$
따라서 구하는 분산은
$$V(7X)=49V(X)$$
$$=49\times\frac{3}{98}$$
$$=\frac{3}{2}$$

14 이 학교 학생의 1000 m 달리기 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(230,\ 30^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{X-230}{30}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
기록이 a초 이하일 때 상위 10위 이내에 든다고 하면
$$P(X\le a)=P\left(Z\le\frac{a-230}{30}\right)$$
$$=\frac{10}{400}$$
$$=0.025$$
이므로
$$P\left(0\le Z\le\frac{230-a}{30}\right)=0.5-0.025$$
$$=0.475$$
그런데 $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로
$$\frac{230-a}{30}=1.96,\quad 즉\quad a=171.2$$
따라서 기록이 171.2초 이하이면 상위 10위 이내에 든다.

2 통계적 추정

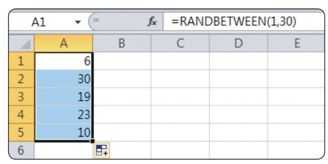
01 모집단과 표본 110~115쪽

준비하기 평균: 12, 표준편차: $2\sqrt{21}$

생각 열기 예시 1 [방법 1]을 택하는 것이 정확한 결과를 얻을 수 있다.
예시 2 [방법 2]를 택하는 것이 시간과 비용을 줄일 수 있다.

문제 1 (1) 표본조사
(2) 전수조사
(3) 표본조사
(4) 전수조사

문제 2 예시 우리 반 학생 30명 중에서 5명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같이 임의추출한다.
셀 A1에 ‘=RANDBETWEEN(1,30)’을 입력한 후, ‘채우기 핸들’을 이용하여 셀 A5까지 드래그한다.



문제 3 (1) 25 (2) 20 (3) 10

생각 열기 ❶ 0.048 ppm
❷ 예시 9일과 11일의 오존 농도의 평균은
$$\frac{0.046+0.045}{2}=0.0455\ (\text{ppm})$$
따라서 ❶의 결과와 다르다.
❸ 예시 8일과 12일을 임의추출한 경우의 평균은
$$\frac{0.024+0.034}{2}=0.029\ (\text{ppm})$$
따라서 ❷에서 구한 평균과 다르다.

문제 4 평균: 860 g, 표준편차: 10 g

문제 5 0.8185

02 모평균의 추정 116~119쪽

준비하기 (1) 0.84 (2) 0.0228

생각 열기 ❶ 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균이 10 g이므로 모평균은 10 g일 것으로 추측할 수 있다.

❷ 표본이 다르면 그에 따라 과자 10개의 과자 1개당 당류 함유량의 표본평균도 달라질 것이다. 따라서 추측한 값이 모평균과 같다고 확신할 수는 없지만 모평균은 추측한 값에 가까울 것이라고 기대할 수 있다.

문제 1 $100.614 \le m \le 100.786$ (단위: m)

문제 2 $14.439 \le m \le 16.761$ (단위: km)

생각 넓히기 (가) 참 (나) 참 (다) 거짓

탐구 & 융합 120쪽

생략

Ⅲ-2 중단원 마무리하기 121~123쪽

01 (1) 표본조사 (2) 전수조사

02 $E(\overline{X})=56$, $V(\overline{X})=\frac{1}{4}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

03 0.9544

04 $14.02 \le m \le 15.98$

05 1600 **06** $\frac{8}{3}$

07 문제 이해 $E(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. ▶ 30 %

해결 과정 따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(|\overline{X}-m| \le 0.2)=0.9544$$

에서

$$P\left(|Z| \le 0.2\times\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.9544$$

$$P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{25}\right)=0.4772$$ ▶ 40 %

답 구하기 이때 $P(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{25}=2, \quad 즉 \quad n=2500$$ ▶ 30 %

08 36

09 $149.02 \le m \le 150.98$ (단위: kg)

10 문제 이해 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이를 l이라 하면

$$l=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ▶ 30 %

해결 과정 따라서 $l \le \frac{1}{2}\sigma$이므로

$$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}\sigma, \quad \sqrt{n} \ge 2\times2\times1.96$$

$$\sqrt{n} \ge 7.84, \quad 즉 \quad n \ge 61.4656$$ ▶ 60 %

답 구하기 따라서 n의 최솟값은 62이다. ▶ 10 %

11 주머니에서 1개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=4\times\frac{2}{5}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{10}$$
$$=5$$

$$V(X)=(-1)^2\times\frac{2}{5}+0^2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{10}$$
$$=1$$

$\sigma(X)=1$

$n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(5, \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-5}{\frac{1}{10}}=10(\overline{X}-5)$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}(Z\ge 10(k-5))=0.0228$$
$$\mathrm{P}(0\le Z\le 10(k-5))=0.5-0.0228=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$10(k-5)=2,\quad 즉\quad k=\frac{26}{5}$$

12 $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{4}{m}$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{4}{m}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{4}{m}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-1\le\overline{X}\le m+1)=0.9544$에서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{m}{4}\le Z\le\frac{m}{4}\right)=0.9544$$
$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m}{4}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{m}{4}=2,\quad 즉\quad m=8$$

13 한 상자에 들어 있는 초콜릿 4개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로 출하한 상자가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(4\overline{X}\le 109.76)\\&=\mathrm{P}(\overline{X}\le 27.44)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{27.44-30}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.28)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)\\&=0.5-0.4\\&=0.1\end{aligned}$$

한편, 초콜릿 상자 400개 중에서 불량품인 상자의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따른다.

이때 n이 충분히 크므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 28)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{28-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

III 대단원 **평가하기**

124 ~ 127쪽

01 ⑤ **02** ④

03 ① **04** ③

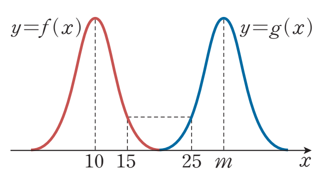
05 ③ **06** ②

07 125

08 정규분포를 따르는 두 확률변수 X와 Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 대칭축의 위치는 다르지만 모양이 같다.

이때 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르고 조건 ㈎에서 $\mathrm{P}(X\le 10)\le\mathrm{P}(Y\ge 25)$이므로

$0.5\le\mathrm{P}(Y\ge 25)$, $m\ge 25$



또, 조건 ㈏에서

$$f(15)=g(25)$$

이므로

$$m=25+(15-10)=30$$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 3^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 36)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-30}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.9772\end{aligned}$$

09 0.1587 **10** 9974

11 10

12 A 타이어의 수명을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40000,\ 2000^2)$을 따르므로 확률변수

$Z=\dfrac{X-40000}{2000}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 A 타이어의 수명이 43000 km 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 43000)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{43000-40000}{2000}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$

B 타이어의 수명을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(45000,\ 4000^2)$을 따르므로 확률변수

$Z=\dfrac{Y-45000}{4000}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 B 타이어의 수명이 a km 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-45000}{4000}\right)$$

이때 $\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-45000}{4000}\right)$이므로

$$1.5=-\frac{a-45000}{4000},\qquad 6000=-a+45000$$

즉, $\quad a=39000$

13 77점

14 0.0228

15 0.1587

16 A 제품 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.
따라서 임의로 택한 A 제품 4개의 평균 무게가 k 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-m}{1}\right)$$

이다.

B 제품 4개의 무게의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균 $\overline{Y}$의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{Y})=3m,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$$

이므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3m,\ 2^2)$을 따른다.
따라서 임의로 택한 B 제품 4개의 평균 무게가 k 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-3m}{2}\right)$$

이다.

이때 $\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-m}{1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-3m}{2}\right)$이므로

$$\frac{k-m}{1}=-\frac{k-3m}{2},\qquad 2k-2m=-k+3m$$

$$3k=5m,\quad 즉\quad \frac{m}{k}=\frac{3}{5}$$

17 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간 $a\le m\le b$에서 $b-a=11.76$이므로

$$2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=11.76,\quad 즉\quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+5.88)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m+5.88-m}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1.96)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$$
$$=0.5-0.4750$$
$$=0.025$$

18 100

19 문제 이해 공에 적힌 수를 4로 나눈 나머지가 r인 숫자의 집합을 A_r라 하면

$A_0=\{4,\ 8,\ 12\}$,
$A_1=\{1,\ 5,\ 9\}$,
$A_2=\{2,\ 6,\ 10\}$,
$A_3=\{3,\ 7,\ 11\}$ ▶ 30 %

해결 과정 (i) $X=1$인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 A_0의 원소이어야 하므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$ ▶ 20 %

(ii) $X=2$인 경우

꺼낸 공에 적힌 수가 각각 A_1, A_3의 원소이거나, 각각 A_3, A_1의 원소이거나, 두 개의 원소가 모두 A_2의 원소이어야 하므로

$$\mathrm{P}(X=2)$$
$$=2\times\left(\frac{3}{12}\times\frac{3}{11}\right)+\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}$$
$$=\frac{2}{11}$$ ▶ 20 %

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{11}$$
$$=\frac{19}{44}$$ ▶ 20 %

답 구하기　따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 3)=1-\mathrm{P}(X\le 2)$$
$$=\frac{25}{44}$$ ▶ 10 %

20 문제 이해　$\mathrm{P}(X=3)={}_{10}\mathrm{C}_3\,p^3(1-p)^7$,
$\mathrm{P}(X=4)={}_{10}\mathrm{C}_4\,p^4(1-p)^6$ ▶ 30 %

해결 과정　$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\mathrm{P}(X=4)$에서

$${}_{10}\mathrm{C}_3\,p^3(1-p)^7=\frac{4}{5}\times{}_{10}\mathrm{C}_4\,p^4(1-p)^6,$$
$$\frac{10!}{3!7!}p^3(1-p)^7=\frac{4}{5}\times\frac{10!}{4!6!}p^4(1-p)^6,$$
$5-5p=7p$,　즉　$p=\frac{5}{12}$ ▶ 40 %

답 구하기　따라서 $\mathrm{E}(X)=10\times\frac{5}{12}=\frac{25}{6}$이므로

$$\mathrm{E}(6X)=6\times\frac{25}{6}=25$$ ▶ 30 %

21 해결 과정　$Z=\frac{X-7}{3}$로 놓으면

$$\mathrm{P}(2a-5\le X\le 4a+1)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{2a-12}{3}\le Z\le\frac{4a-6}{3}\right)$$ ▶ 30 %

주어진 확률이 최대이려면 $\frac{2a-12}{3}$와 $\frac{4a-6}{3}$이 직선 $Z=0$에 대하여 대칭이어야 한다. ▶ 40 %

답 구하기　즉, $\frac{2a-12}{3}=-\frac{4a-6}{3}$이므로

$a=3$ ▶ 30 %

22 문제 이해　표본평균을 $\overline{X}$, 표본의 크기를 n이라 하면, 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$|m-\overline{X}|\le 1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}$$ ▶ 40 %

해결 과정　모평균과 표본평균의 차가 39.2 m 이하가 되려면

$1.96\times\frac{80}{\sqrt{n}}\le 39.2$,　　$\sqrt{n}\ge 4$

즉,　$n\ge 16$ ▶ 40 %

답 구하기　따라서 표본의 크기의 최솟값은 16이다.
▶ 20 %